

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

ETAPA BÁSICA (TRONCO COMÚN)

PLAN DE ESTUDIOS 2009-2

UNIDAD DE APRENDIZAJE:

# ESTÁTICA

(CLAVE 11217)

# APUNTES

(COMPILACIÓN)

(PARTE 1)

ELABORADO POR:

M.C. ALBERTO PARRA MEZA

M.C. MIGUEL MARIO JUÁREZ VILLARREAL

M.I. RICARDO SÁNCHEZ VERGARA

M.I JOEL MELCHOR OJEDA RUÍZ

# **CONTENIDO**

**¿Qué es la mecánica?**

**Conceptos y principios fundamentales**

**Sistemas de Unidades**

**Conversión de un sistema de unidades a otro.**

**Fuerzas sobre una partícula.**

**Resultante de dos fuerzas.**

**Vectores.**

**Adición de Vectores.**

**Resultante de varias fuerzas concurrentes.**

**Descomposición de una fuerza en componentes.**

**Componentes rectangulares de una fuerza.**

**Vectores unitarios.**

**Suma de fuerzas por adición de componentes  $x$  y  $y$ .**

**Equilibrio de una partícula.**

**Primera ley de newton del movimiento.**

**Problemas que involucran el equilibrio  
de una partícula. Diagrama de cuerpo libre.**

**Componentes rectangulares de una fuerza  
en el espacio.**

# **CONTENIDO**

## **(CONTINUACIÓN)**

**Fuerza definida en términos de su magnitud  
y dos puntos sobre su línea de acción.**

**Adición de fuerzas concurrentes en el espacio.**

**Equilibrio de una partícula en el espacio.**

**Principio de transmisibilidad. Fuerzas equivalentes**

**Producto vectorial de dos vectores.**

**Momento de una fuerza con respecto a un punto.**

**Momento de una fuerza con respecto a un eje.**

**Momento de un par; pares equivalentes, adición o suma de pares.**

**Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par.**

## 1.1. ¿QUÉ ES LA MECÁNICA?

La mecánica se puede definir como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: la mecánica de *cuerpos rígidos*, la mecánica de *cuerpos deformables* y la mecánica de *fluidos*.

La mecánica de cuerpos rígidos se subdivide en *estática* y *dinámica*; la primera estudia los cuerpos en reposo y la segunda los cuerpos en movimiento. En esta parte del estudio de la mecánica se supone que los cuerpos son perfectamente rígidos. Sin embargo, las estructuras y las máquinas reales nunca lo son y se deforman bajo las cargas a las que están sometidas. Estas deformaciones casi siempre son pequeñas y no afectan de manera apreciable las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. Pero son importantes cuando se tiene en cuenta la resistencia de la estructura a las fallas y se estudian en la mecánica de materiales, que es una parte de la mecánica de cuerpos deformables. La tercera parte de la mecánica, la de fluidos, se subdivide en el estudio de los *fluidos incompresibles* y el de los *fluidos compresibles*. La *hidráulica* es una subdivisión importante en el estudio de los fluidos incompresibles y trata problemas relativos a los líquidos.

La mecánica es una ciencia física puesto que estudia fenómenos físicos. Sin embargo, algunos la asocian con las matemáticas, mientras que otros la consideran un tema de ingeniería. Ambos puntos de vista se justifican parcialmente. La mecánica es la base de la mayoría de las ciencias de la ingeniería y es un requisito indispensable para estudiarlas. Sin embargo, no tiene el carácter *empírico* propio de algunas ciencias de la ingeniería, es decir, no se basa sólo en la experiencia u observación; por su rigor y la importancia que da al razonamiento deductivo se parece a las matemáticas. Pero tampoco es una ciencia *abstracta*, ni siquiera una ciencia *pura*; es una ciencia *aplicada*. Su propósito es explicar y predecir los fenómenos físicos y poner las bases para aplicarlas en ingeniería.

## 1.2. CONCEPTOS Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Aunque el estudio de la mecánica se remonta a los tiempos de Aristóteles (384-322 a.C.) y de Arquímedes (287-212 a.C.), se tuvo que esperar hasta Newton (1642-1727) para encontrar una formulación satisfactoria de sus principios fundamentales, los cuales fueron expresados

después en forma modificada por d'Alembert, Lagrange y Hamilton. Su validez permaneció incólume hasta que Einstein formuló su *teoría de la relatividad* (1905). Si bien ahora se han reconocido las limitaciones de la *mecánica newtoniana*, ésta aún es la base de las actuales ciencias de la ingeniería.

Los conceptos básicos que se emplean en la mecánica son *espacio*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estos conceptos no pueden ser definidos en forma exacta; deben aceptarse sobre las bases de nuestra intuición y experiencia y emplearse como un marco de referencia mental en el estudio de la mecánica.

El concepto de *espacio* se asocia con la noción de posición de un punto  $P$ . La posición de éste puede definirse por tres longitudes medidas desde cierto punto de referencia u *origen*, en tres direcciones dadas. Estas longitudes se reconocen como *coordenadas* de  $P$ .

Para definir un evento, no es suficiente con indicar su posición en el espacio sino que debe darse también el *tiempo* del evento.

El concepto de *masa* tiene la función de caracterizar y comparar los cuerpos con base en ciertos experimentos mecánicos fundamenta-

Se estudiarán las condiciones de reposo o movimiento de partículas y cuerpos rígidos a partir de los cuatro principios básicos que se han les. Por ejemplo, dos cuerpos que tengan la misma masa serían atraídos por la Tierra de igual forma; también presentarán la misma resistencia a un cambio en su movimiento traslacional.

Una *fuerza* representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por contacto real o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud* y *dirección* y se representa con un *vector* (sección 2.3).

En la mecánica newtoniana, espacio, tiempo y masa son conceptos absolutos e independientes entre sí (esto no es así en la *mecánica relativista*, donde el tiempo de un evento depende de su posición y la masa de un cuerpo varía con su velocidad). Por otra parte, el concepto de fuerza no es independiente de los otros tres. En realidad, uno de los principios fundamentales de la mecánica newtoniana, que se enuncian más adelante, indica que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo se relaciona con la masa de éste y con la forma en que varía su velocidad en el tiempo.

expuesto. Por *partícula* se entiende una pequeñísima cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio. Un *cuerpo rígido* es la combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí. El estudio de la mecánica de las partículas es un requisito previo al de los cuerpos rígidos. Además, los resultados obtenidos para una partícula pueden usarse directamente en muchos problemas que tratan de las condiciones de reposo o movimiento de cuerpos reales.

El estudio de la mecánica elemental descansa sobre seis principios fundamentales basados en la evidencia experimental.

**La ley del paralelogramo para la adición de fuerzas.** Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser sustituidas por una sola fuerza llamada *resultante*, que se obtiene al trazar la diagonal del paralelogramo que tiene los lados iguales a las fuerzas dadas (sección 2.2).

**El principio de transmisibilidad.** Establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza que actúa en un punto del cuerpo rígido se sustituye por una fuerza de la misma magnitud y la misma dirección, pero que actúe en un punto diferente, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción (sección 3.3).

**Las tres leyes fundamentales de Newton.** Fueron formuladas por Sir Isaac Newton a finales del siglo XVII y pueden enunciarse como sigue:

**PRIMERA LEY.** Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento) (sección 2.10).

**SEGUNDA LEY.** Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de ésta.

Como se verá en la sección 12.2 esta ley puede expresarse así

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{F}$ ,  $m$  y  $\mathbf{a}$  representan, respectivamente, la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la masa de ésta y la aceleración de la misma, expresadas en un sistema congruente de unidades.

**TERCERA LEY.** Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 6.1).

**La ley de gravitación de Newton.** Establece que dos partículas de masa  $M$  y  $m$  se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  (figura 1.1), de magnitud  $F$  dada por la fórmula

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.2)$$

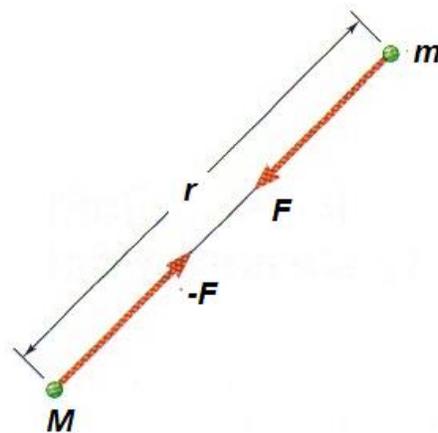


Figura 1.1

donde  $r$  = la distancia entre las dos partículas

$G$  = la constante universal llamada *constante de gravitación*

La ley de gravitación de Newton introduce la idea de una acción ejercida a distancia y extiende el alcance de aplicación de la tercera ley: la acción  $\mathbf{F}$  y la reacción  $-\mathbf{F}$  en la figura 1.1 son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción.

Un caso de gran importancia es el de la atracción que la Tierra ejerce sobre una partícula situada en su superficie. La fuerza  $\mathbf{F}$  ejercida por la Tierra sobre la partícula se define como el *peso*  $\mathbf{W}$  de la partícula. Tomando  $M$  igual a la masa de la Tierra,  $m$  igual a la masa de la partícula, y  $r$  igual al radio  $R$  de la Tierra e introduciendo la constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (1.3)$$

la magnitud  $W$  del peso de una partícula de masa  $m$  puede expresarse como<sup>†</sup>

$$W = mg \quad (1.4)$$

El valor de  $R$  en la fórmula (1.3) depende de la elevación del punto considerado; también depende de su latitud, puesto que la Tierra no es realmente esférica. Así que el valor de  $g$  varía con la posición del punto en cuestión. Mientras el punto permanezca sobre la superficie de la Tierra, en la mayoría de los cálculos de ingeniería es suficientemente preciso suponer que  $g$  es igual a  $9.81 \text{ m/s}^2$  o  $32.2 \text{ ft/s}^2$ .

Los principios que se acaban de enunciar se irán explicando en el curso del estudio de la mecánica conforme sea necesario. El estudio de la estática de partículas se realiza en el capítulo 2 y se basa sólo en la ley del paralelogramo para la adición y en la primera ley de Newton. El principio de transmisibilidad se expondrá en el capítulo 3, al comenzar el estudio de la estática de cuerpos rígidos, y la tercera ley de Newton se expone en el capítulo 6, cuando se analicen las fuerzas ejercidas entre los diferentes elementos que forman una estructura. En el estudio de la dinámica se introducirán la segunda ley de Newton y

<sup>†</sup>Una definición más precisa del peso  $\mathbf{W}$  debe tomar en cuenta la rotación de la Tierra.

la ley de gravitación. Allí se mostrará que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda ley (sección 12.2), y que el principio de transmisibilidad podría derivarse de los otros principios y por lo mismo quedar eliminado (sección 16.5). Por ahora, las primera y tercera leyes de Newton, la ley del paralelogramo para la adición y el principio de transmisibilidad proporcionarán las bases necesarias y suficientes para el estudio completo de la estática de partículas, de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos.

Como se dijo antes, los seis principios fundamentales enunciados antes se basan en la evidencia experimental. A excepción de la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad, todos son principios independientes y no se pueden obtener matemáticamente de los demás ni de cualquier otro principio físico elemental. En ellos descansa la mayor parte de la intrincada estructura de la mecánica newtoniana. La aplicación de estos principios fundamentales ha permitido resolver, por más de dos siglos, un gran número de problemas relacionados con las condiciones de reposo y movimiento de cuerpos rígidos, cuerpos deformables y fluidos. Muchas de las soluciones obtenidas pueden comprobarse mediante experimentos que proporcionan una verificación ulterior de los principios en que se basaron. Fue sólo hasta el siglo pasado que se encontró que la mecánica de Newton tiene deficiencias en el estudio del movimiento de los átomos y en el de ciertos planetas, y que debe complementarse con la teoría de la relatividad. Pero en la escala humana o en la escala de la ingeniería, donde las velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, la mecánica de Newton aún no ha sido refutada.

### 1.3. SISTEMAS DE UNIDADES

Con los cuatro conceptos fundamentales introducidos en la sección anterior se asocian las llamadas *unidades cinéticas*, es decir, las unidades de *longitud*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estas unidades no pueden escogerse de manera independiente si la ecuación (1.1) ha de satisfacerse. Tres de ellas pueden definirse en forma arbitraria; se les llama *unidades bá-*

sicas. La cuarta unidad, en cambio, debe escogerse de acuerdo con la ecuación (1.1) y se le identifica como *unidad derivada*. Se dice que las unidades cinéticas así seleccionadas forman un *sistema congruente de unidades*.

**Sistema Internacional de Unidades (Unidades del SI).<sup>†</sup>** En este sistema, que será de uso universal cuando Estados Unidos complete su conversión, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo, y se llaman, respectivamente, *metro* (m), *kilogramo* (kg) y *segundo* (s). Las tres están definidas de manera arbitraria. El segundo, que de manera original se eligió para representar 1/86 400 del día solar medio, se define ahora como la duración de 9 192 631 770 ciclos de la radiación emitida en la transición entre dos niveles del estado fundamental del átomo de cesio-133. El metro, definido en forma original como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador a un polo, se define ahora como 1 650 763.73 longitudes de onda de la luz naranja-roja correspondiente a cierta transición en un átomo de criptón-86. El kilogramo, que es aproximadamente igual a la masa de 0.001 m<sup>3</sup> de agua, se define como la masa de un patrón de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París, Francia. La unidad de fuerza es una unidad derivada y se llama *newton* (N). Se le define como la fuerza que proporciona una aceleración de 1 m/s<sup>2</sup> a una masa de un kilogramo (figura 1.2). A partir de la ecuación (1.1) se escribe

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (1.5)$$

Se dice que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades; esto significa que las tres unidades básicas seleccionadas son independientes del lugar en donde se utilicen las medidas. El metro, el kilogramo y el segundo se pueden usar en cualquier lugar de la Tierra; incluso pueden usarse en otro planeta y siempre tendrán el mismo significado.

<sup>†</sup>SI significa *Système International d'Unités* (francés).

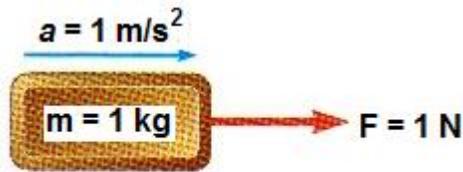


Figura 1.2

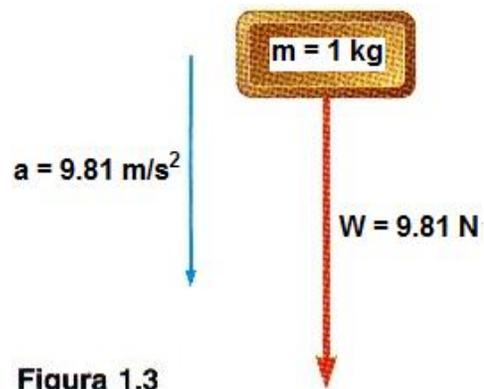


Figura 1.3

El *peso* de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* ejercida sobre él, debe expresarse en newtons, como cualquier otra fuerza. De la ecuación (1.4) se obtiene que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (figura 1.3) es

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \\ &= 9.81 \text{ N} \end{aligned}$$

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales del SI se pueden obtener con el uso de los prefijos que se definen en la tabla 1.1. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza de mayor uso en ingeniería son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*<sup>†</sup> (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). De acuerdo con la tabla 1.1, se tiene

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1\,000 \text{ m} & 1 \text{ mm} &= 0.001 \text{ m} \\ 1 \text{ Mg} &= 1\,000 \text{ kg} & 1 \text{ g} &= 0.001 \text{ kg} \\ 1 \text{ kN} &= 1\,000 \text{ N} \end{aligned}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, puede realizarse con sólo recorrer el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda. Por ejemplo, para convertir 3.82 km en metros, se recorre el punto decimal tres lugares a la derecha:

$$3.82 \text{ km} = 3\,820 \text{ m}$$

En forma semejante, 47.2 mm se convierten en metros recorriendo el punto decimal tres lugares a la izquierda:

$$47.2 \text{ mm} = 0.0472 \text{ m}$$

Con el uso de la notación científica, se puede escribir

$$3.82 \text{ km} = 3.82 \times 10^3 \text{ m}$$

$$47.2 \text{ mm} = 47.2 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Los múltiplos de la unidad de tiempo son el *minuto* (min) y la *hora* (h). Puesto que  $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$  y  $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$ , estos múltiplos no pueden convertirse tan fácilmente como los otros.

Con el uso del múltiplo o submúltiplo adecuado de cierta unidad, se puede evitar la escritura de números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, por lo general se escribe 427.2 km en lugar de 427 200 m, y 2.16 mm en lugar de 0.002 16 m.<sup>†</sup>

**Unidades de área y volumen.** La unidad de área es el *metro cuadrado* ( $\text{m}^2$ ), que representa el área de un cuadrado de 1 m de lado; la unidad de volumen es el *metro cúbico* ( $\text{m}^3$ ), que es igual al volumen de un cubo de 1 m de lado. Para evitar valores numéricos ex-

<sup>†</sup>También conocida como *tonelada métrica*.

cesivamente pequeños o demasiado grandes en el cálculo de áreas y volúmenes, se usan sistemas de subunidades que se obtienen elevando, respectivamente, al cuadrado y al cubo no sólo el milímetro sino también dos submúltiplos intermedios del metro, llamados *decímetro* (dm) y *centímetro* (cm). Entonces, por definición,

$$1 \text{ dm} = 0.1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ m}$$

$$1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m}$$

los submúltiplos de la unidad de área son

$$\begin{aligned}1 \text{ dm}^2 &= (1 \text{ dm})^2 = (10^{-1} \text{ m})^2 = 10^{-2} \text{ m}^2 \\1 \text{ cm}^2 &= (1 \text{ cm})^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \\1 \text{ mm}^2 &= (1 \text{ mm})^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2\end{aligned}$$

y los submúltiplos de la unidad de volumen son

$$\begin{aligned}1 \text{ dm}^3 &= (1 \text{ dm})^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 \\1 \text{ cm}^3 &= (1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3 \\1 \text{ mm}^3 &= (1 \text{ mm})^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3\end{aligned}$$

Debe notarse que cuando se mide el volumen de un líquido, el decímetro cúbico ( $\text{dm}^3$ ) se conoce en forma usual como un *litro* (L).

En la tabla 1.2 se muestran otras unidades derivadas del SI, que se usan para medir el momento de una fuerza, el trabajo de una fuerza, etc. Aunque estas unidades se introducirán en capítulos posteriores conforme se vayan necesitando, es necesario describir una regla importante en esta fase: cuando se obtiene una unidad derivada con la división de una unidad básica entre otra unidad básica, debe usarse un prefijo en el numerador de la unidad derivada pero no en su denominador. Por ejemplo, la constante  $k$  de un resorte que se elonga 20 mm bajo una carga de 100 N se expresará como

$$k = \frac{100 \text{ N}}{20 \text{ mm}} = \frac{100 \text{ N}}{0.020 \text{ m}} = 5\,000 \text{ N/m} \quad \text{o} \quad k = 5 \text{ kN/m}$$

pero nunca como  $k = 5 \text{ N/mm}$ .

**Tabla 1.1. Prefijos del SI**

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000 000 = $10^{12}$	tera	T
1 000 000 000 = $10^9$	giga	G
1 000 000 = $10^6$	mega	M
1 000 = $10^3$	kilo	k
100 = $10^2$	hecto <sup>†</sup>	h
10 = $10^1$	deca <sup>†</sup>	da
0.1 = $10^{-1}$	deci <sup>†</sup>	d
0.01 = $10^{-2}$	centi <sup>†</sup>	c
0.001 = $10^{-3}$	mili	m
0.000 001 = $10^{-6}$	micro	$\mu$
0.000 000 001 = $10^{-9}$	nano	n
0.000 000 000 001 = $10^{-12}$	pico	p
0.000 000 000 000 001 = $10^{-15}$	femto	f
0.000 000 000 000 000 001 = $10^{-18}$	ato	a

<sup>†</sup>Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

<sup>†</sup>Debe observarse que cuando se usan más de cuatro dígitos a ambos lados del punto decimal para expresar una cantidad en unidades del SI (como en 427 200 m o en 0.002 16 m) deben usarse espacios, no comas, para separar los dígitos en grupos de tres. Esto es con el fin de evitar confusiones con la coma, que se usa en muchos países en lugar del punto decimal.

**Tabla 1.2. Principales unidades del SI usadas en mecánica**

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	. . . .	$m/s^2$
Ángulo	Radián	rad	†
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	. . .	$rad/s^2$
Velocidad angular	Radián por segundo	. . .	$rad/s$
Área	Metro cuadrado	. . .	$m^2$
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	. . .	$kg/m^3$
Energía	Joule	J	$N \cdot m$
Fuerza	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	$s^{-1}$
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Longitud	Metro	m	‡
Masa	Kilogramo	kg	‡
Momento de una fuerza	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potencia	Watt	W	$J/s$
Presión	Pascal	Pa	$N/m^2$
Esfuerzo	Pascal	Pa	$N/m^2$
Tiempo	Segundo	s	‡
Velocidad	Metro por segundo	. . .	$m/s$
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	$m^3$
Líquidos	Litro	L	$10^{-3} m^3$
Trabajo	Joule	J	$N \cdot m$

†Unidad suplementaria (1 revolución =  $2\pi$  rad =  $360^\circ$ ).

‡Unidad básica.

**Unidades de uso común en Estados Unidos.** La mayoría de los ingenieros practicantes estadounidenses todavía utiliza un sistema en el que las unidades básicas son las unidades de longitud, fuerza y tiempo. Estas unidades son, respectivamente, el *pie* (ft), la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es idéntico a la correspondiente unidad del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como el *peso* de un patrón de platino, llamado *libra estándar*, que está en el National Institute of Standards and Technology en las afueras de Washington, su masa es de 0.453 592 43 kg. Como el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, la cual varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe estar localizada al nivel del mar y a una latitud de  $45^\circ$  para definir en forma apropiada una fuerza de una libra. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman un sistema de unidades absoluto. Por su dependencia de la atracción gravitacional de la Tierra constituyen un sistema de unidades *gravitacional*.

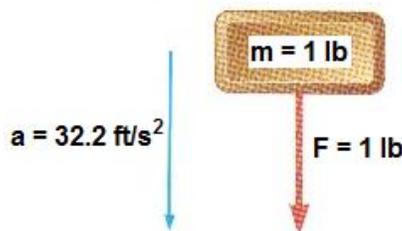


Figura 1.4

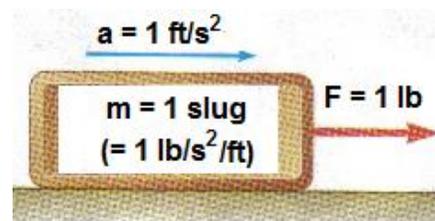


Figura 1.5

Aun cuando la libra estándar se emplea también como unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede usarse así en cálculos de ingeniería, debido a que no sería consistente con las unidades básicas definidas en el apartado anterior. De hecho, cuando una fuerza de 1 lb actúa sobre la libra estándar, es decir, cuando está sujeta a la gravedad, recibe la aceleración de la gravedad,  $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$  (figura 1.4), ésta no es la unidad de aceleración que se requiere según la ecuación (1.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa que recibe una aceleración de  $1 \text{ ft/s}^2$  al aplicársele una fuerza de 1 lb (figura 1.5). Esta unidad, algunas veces llamada *slug*, puede derivarse de la ecuación  $F = ma$  después de sustituir 1 lb y  $1 \text{ ft/s}^2$  para  $F$  y  $a$ , respectivamente. Se escribe ( $1 \text{ slug} = 32.216$ ).

$$F = ma \quad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

y se obtiene

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} \quad (1.6)$$

Comparando las figuras 1.4 y 1.5 se concluye que el *slug* es una masa 32.2 veces mayor que la masa de la libra estándar.

El hecho de que en el sistema de uso común en Estados Unidos, los cuerpos se caractericen por su peso en libras en lugar de por su masa en *slugs*, será ventajoso en el estudio de la estática, en donde se tratará en forma continua con pesos u otras fuerzas, y sólo en ocasiones con masas. Sin embargo, en el estudio de la dinámica, donde intervienen fuerzas, masas y aceleraciones, la masa  $m$  de un cuerpo se expresará en *slugs* cuando su peso  $W$  esté dado en libras. Recordando la ecuación (1.4) se escribe

$$m = \frac{W}{g} \quad (1.7)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ ).

Otras unidades de uso común en Estados Unidos que se presentan en forma frecuente en problemas de ingeniería son la *milla* (mi), igual a 5 280 ft; la *pulgada* (in.), igual a  $\frac{1}{12}$  ft, y la *kilolibra* (kip), igual a una fuerza de 1 000 lb.<sup>1</sup> La *tonelada* se usa con frecuencia para representar una masa de 2 000 lb pero, al igual que la libra, debe convertirse a *slugs* en los cálculos de ingeniería.

La conversión en pies, libras y segundos de cantidades expresadas en otras unidades de uso común en Estados Unidos, en forma general es más complicada y requiere mayor atención que la operación correspondiente en las unidades del SI. Por ejemplo, si se da la magnitud de

<sup>1</sup>En este caso se alude a la tonelada corta, ya que la tonelada larga equivale a 2 240 lb.

una velocidad como  $v = 30$  mi/h, se convierte en ft/s de la siguiente manera. Primero se escribe

$$v = 30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Puesto que se quieren convertir millas en pies, se debe multiplicar el miembro derecho de la ecuación por una expresión que contenga millas en el denominador y pies en el numerador. Pero, como no se quiere cambiar el valor del miembro derecho, la expresión implicada debe tener un valor igual a uno; el cociente  $(5\,280 \text{ ft})/(1 \text{ mi})$  es una expresión de este tipo. Haciendo una operación semejante para transformar la unidad hora en segundos, se escribe

$$v = \left(30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right) \left(\frac{5\,280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}}\right)$$

Realizando los cálculos numéricos y cancelando las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$v = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 44 \text{ ft/s}$$

#### 1.4. CONVERSIÓN DE UN SISTEMA DE UNIDADES A OTRO

Existen muchas situaciones en las que un ingeniero necesita convertir en unidades del SI un resultado numérico obtenido en unidades de uso común en Estados Unidos o viceversa. Como la unidad de tiempo es la misma en ambos sistemas, sólo se necesita convertir dos unidades cinéticas básicas y, puesto que todas las otras unidades cinéticas pueden derivarse de estas unidades básicas, sólo se requiere recordar dos factores de conversión.

**Unidades de longitud.** Por definición, la unidad de longitud de uso común en Estados Unidos es

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} \quad (1.8)$$

De aquí se tiene que

$$1 \text{ mi} = 5\,280 \text{ ft} = 5\,280(0.3048 \text{ m}) = 1\,609 \text{ m}$$

o bien

$$1 \text{ mi} = 1.609 \text{ km} \quad (1.9)$$

También

$$1 \text{ in.} = \frac{1}{12} \text{ ft} = \frac{1}{12}(0.3048 \text{ m}) = 0.0254 \text{ m}$$

o bien

$$1 \text{ in.} = 25.4 \text{ mm} \quad (1.10)$$

**Unidades de fuerza.** Recordando que la unidad de fuerza de uso común en Estados Unidos (la libra) se define como el peso de una libra estándar (de masa 0.4536 kg) al nivel del mar y a una latitud de  $45^\circ$  (donde  $g = 9.807 \text{ m/s}^2$ ) y usando la ecuación (1.4), se escribe

$$\begin{aligned} W &= mg \\ 1 \text{ lb} &= (0.4536 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

o, recordando la ecuación (1.5),

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} \quad (1.11)$$

**Unidades de masa.** La unidad de masa de uso común en Estados Unidos (el *slug*) es una unidad derivada. Así, con el uso de las ecuaciones (1.6), (1.8) y (1.11), se puede escribir

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = \frac{4.448 \text{ N}}{0.3048 \text{ m/s}^2} = 14.59 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

y por medio de la ecuación (1.5),

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg} \quad (1.12)$$

Aunque no puede usarse como unidad consistente de masa, recordando que la masa de la libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra masa} = 0.4536 \text{ kg} \quad (1.13)$$

Esta constante se puede usar para determinar la *masa* en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que esté caracterizado por su *peso* en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

Para convertir una unidad derivada de uso común en Estados Unidos en unidades del SI, simplemente se multiplica o se divide por los factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir la magnitud del momento de una fuerza que ha sido encontrada como  $M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in.}$  en unidades del SI, se usan las fórmulas (1.10) y (1.11) y se escribe

$$\begin{aligned} M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= 47(4.448 \text{ N})(25.4 \text{ mm}) \\ &= 5\,310 \text{ N} \cdot \text{mm} = 5.31 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Los factores de conversión dados en esta sección se pueden usar también para convertir un resultado numérico obtenido en las unidades del SI a unidades de uso común en Estados Unidos. Por ejemplo, si la magnitud del momento de una fuerza se encontró como  $M = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$ , con el procedimiento usado en el último párrafo de la sección 1.3, se escribe

$$M = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = (40 \text{ N} \cdot \text{m}) \left( \frac{1 \text{ lb}}{4.448 \text{ N}} \right) \left( \frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} \right)$$

Al realizar los cálculos numéricos y cancelar las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$M = 29.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Las unidades de uso común en Estados Unidos que se emplean con mayor frecuencia en la mecánica, y sus equivalentes en las unidades del SI, se enlistan en la tabla 1.3.

**Tabla 1.3. Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI**

Cantidad	Unidad de uso común en EU	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s <sup>2</sup>	0.3048 m/s <sup>2</sup>
	in./s <sup>2</sup>	0.0254 m/s <sup>2</sup>
Área	ft <sup>2</sup>	0.0929 m <sup>2</sup>
	in. <sup>2</sup>	645.2 mm <sup>2</sup>
Energía	ft · lb	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	lb · s	4.448 N · s
Longitud	ft	0.3048 m
	in.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	short ton (tonelada corta)	907.2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1.356 N · m
	lb · in.	0.1130 N · m
Momento de inercia de un área	in. <sup>4</sup>	0.4162 × 10 <sup>6</sup> mm <sup>4</sup>
	lb · ft · s <sup>2</sup>	1.356 kg · m <sup>2</sup>
Cantidad de movimiento	lb · s	4.448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft <sup>2</sup>	47.88 Pa
	lb/in. <sup>2</sup> (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft <sup>3</sup>	0.02832 m <sup>3</sup>
	in. <sup>3</sup>	16.39 cm <sup>3</sup>
	Líquidos	
	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	ft · lb	1.356 J

## 1.5. MÉTODO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un problema en mecánica debe abordarse de la misma manera en que se plantearía un problema real de ingeniería. Si se toma como base la experiencia y la intuición propias, será más fácil entender y formular el problema. Sin embargo, una vez que el problema se ha establecido en forma clara, no hay sitio para suposiciones particulares. *La solución se debe basar en los seis principios fundamentales establecidos en la sección 1.2 o en los teoremas derivados de éstos.* Cada paso debe estar justificado con estas bases. Deben seguirse reglas estrictas que conduzcan a la solución de una manera casi automática, sin dejar lugar para la intuición o "sentimientos" particulares. Después de obtener una respuesta, ésta debe verificarse. Aquí, de nuevo, se puede utilizar el sentido común y la experiencia personal. Si el resultado obtenido no es completamente satisfactorio, debe verificarse en forma cuidadosa la formulación del problema, la validez del método utilizado para su solución y la exactitud de los cálculos.

El *planteamiento* de un problema debe ser claro y preciso y contener los datos proporcionados, así como indicar la información que se requiere. Debe incluirse un dibujo claro que muestre todas las cantidades involucradas, así como un diagrama para cada uno de los cuerpos que participan, que indique en forma clara las fuerzas que actúan sobre ellos. A estos diagramas se les conoce como *diagramas de cuerpo libre* y se describirán en detalle en las secciones 2.11 y 4.2.

Los *principios fundamentales* de la mecánica que se enlistan en la sección 1.2 *se emplean para escribir ecuaciones* que expresen las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos considerados. Cada ecuación debe estar relacionada en forma clara con uno de los diagramas de cuerpo libre. Después se procederá a resolver el problema, observando en forma estricta las reglas usuales de álgebra y con el registro minucioso de los diferentes pasos dados.

Después de haber obtenido la respuesta, ésta debe *comprobarse con todo cuidado*. Con frecuencia se pueden detectar errores en el *razonamiento* mediante la verificación de las unidades. Por ejemplo, para determinar la magnitud del momento de una fuerza de 50 N sobre un punto a 0.60 m de su línea de acción, se escribiría (sección 3.12)

$$M = Fd = (50 \text{ N})(0.60 \text{ m}) = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La unidad  $N \cdot m$  que se obtiene al multiplicar newtons por metros es la unidad correcta para el momento de una fuerza; si se hubiera obtenido alguna otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de *cálculo* por lo general se encontrarán al sustituir los valores numéricos en una ecuación que no haya sido usada y verificar si la ecuación es correcta. No es posible exagerar la importancia de los cálculos correctos en ingeniería.

## 1.6. EXACTITUD NUMÉRICA

La exactitud en la solución de un problema depende de dos factores: 1) la exactitud de los datos proporcionados y 2) la de los cálculos desarrollados.

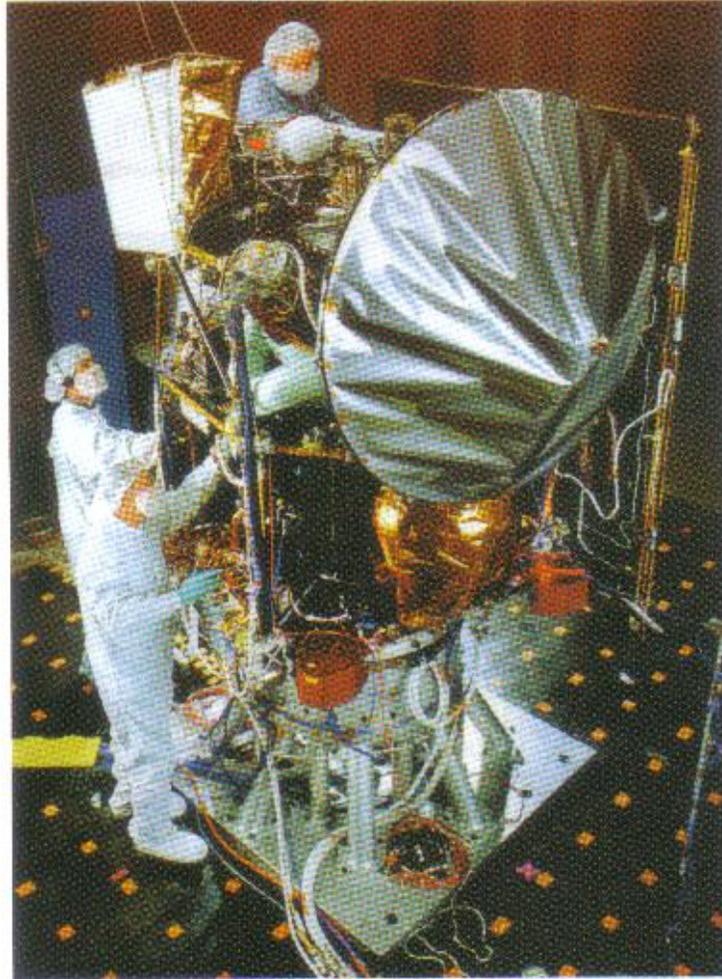
La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores; por ejemplo, si se sabe que la carga de un puente es de 75 000 lb con un posible error de 100 lb, el error relativo que mide el grado de precisión del dato es

$$\frac{100 \text{ lb}}{75\,000 \text{ lb}} = 0.0013 = 0.13 \text{ por ciento}$$

Entonces, al calcular la reacción en uno de los soportes del puente no tendría sentido anotarla como 14 322 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor de 0.13 por ciento, sin importar con qué exactitud se realicen los cálculos, y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como  $(0.13/100)(14\,322 \text{ lb}) \approx 20 \text{ lb}$ . La respuesta debería escribirse como  $14\,320 \pm 20 \text{ lb}$ .

En los problemas de ingeniería los datos rara vez se conocen con una exactitud mayor a 0.2 por ciento, por lo que casi nunca se justifica escribir las respuestas a dichos problemas con una exactitud mayor a 0.2 por ciento. Un criterio práctico es utilizar cuatro cifras para registrar números que inicien con un "1" y tres cifras en todos los otros casos. A menos que se indique otra cosa, los datos proporcionados en un problema deben asumirse como conocidos con un grado de exactitud comparable. Por ejemplo, una fuerza de 40 lb se debería leer 40.0 lb, y una fuerza de 15 lb se debería leer 15.00 lb.

Los ingenieros y estudiantes de ingeniería comúnmente usan las calculadoras electrónicas de bolsillo. La exactitud y velocidad de éstas facilita los cálculos numéricos en la solución de muchos problemas. Sin embargo, los estudiantes no deben registrar más cifras significativas de las que se pueden justificar, sólo porque éstas se pueden obtener fácilmente. Como se mencionó con anterioridad, una exactitud mayor que 0.2 por ciento rara vez es necesaria o significativa en la solución de problemas prácticos de ingeniería.



No se puede exagerar la importancia de incluir unidades en todos los cálculos. Se encontró que el satélite climatológico para Marte, con un costo de 125 millones de dólares, falló al ingresar a la órbita alrededor de Marte porque el principal contratista había proporcionado el equipo de navegación con datos operativos basados en unidades de uso común en Estados Unidos, en lugar de las especificaciones del SI.

## FUERZAS EN UN PLANO

**2.1. Fuerza sobre una partícula. Resultante de dos fuerzas.** Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro. Está caracterizada por su *puntode aplicación*, su *magnitud* y su *dirección*. En este capítulo estudiaremos los efectos de las fuerzas sobre las partículas. El uso de la palabra “partículas” no implica que nuestro estudio se limite al de corpúsculos pequeños. Esto significa que el tamaño y la forma de los cuerpos en consideración no afectan la solución de los problemas tratados en este capítulo y se supone que todas las fuerzas que actúan sobre determinado cuerpo tienen el mismo punto de aplicación. Así, cada fuerza estará completamente definida por su magnitud y dirección.

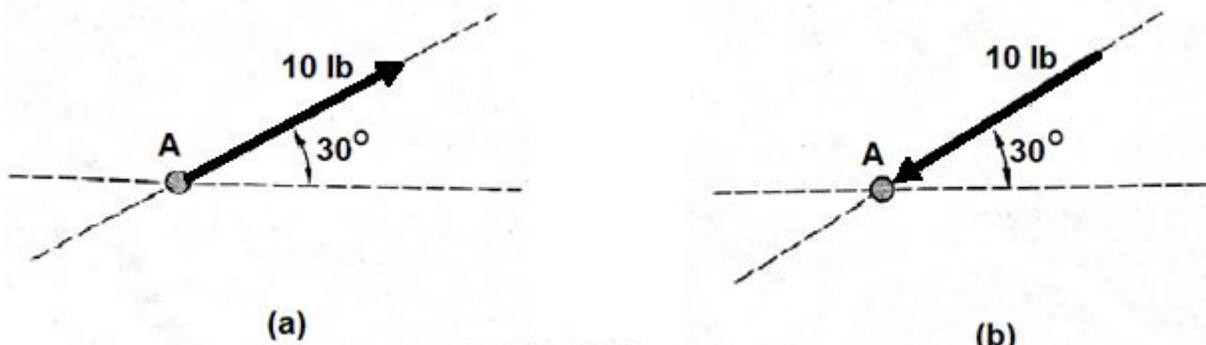


Fig. 2.1

Como se indicó en el capítulo 1, las unidades SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1000 N, en tanto que en el sistema SU, las unidades usadas para el mismo propósito son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip o k), igual a 1000 lb.

La dirección de una fuerza se define por su *línea de acción* y su *sentido*. La línea de acción es una línea infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza. Se caracteriza por el ángulo que forma con cierto eje fijo (figura 2.1). La fuerza se representa mediante un segmento de esta línea. Utilizando una escala apropiada, la longitud de este segmento puede ser escogida de manera tal que repre-

sente la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe ser indicado por la cabeza de una flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas, tales como las mostradas en las figuras 2.1a y 2.1b, que tienen igual magnitud y la misma línea de acción, pero sentidos diferentes, tendrán efectos directamente opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas  $P$  y  $Q$  que actúan sobre una partícula  $A$  (figura 2.2a) pueden remplazarse por una sola fuerza  $R$  que tiene el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2c). A esta fuerza se denomina *resultante* de las fuerzas  $P$  y  $Q$  y pueden obtenerse, como muestra la figura 2.2b, construyendo un paralelogramo, con  $P$  y  $Q$  como lados. *La diagonal que pasa por  $A$  representa la resultante*. Esto es conocido como la *ley del paralelogramo* para la suma de dos fuerzas. Esta ley se fundamenta en la evidencia experimental y no puede ser demostrada ni deducida matemáticamente.

**2.2. Vectores.** De lo anterior, se ve que las fuerzas no obedecen las leyes de la adición de la aritmética y álgebra ordinarias. Por ejemplo, dos fuerzas perpendiculares entre sí, una de 4 lb y la otra de 3 lb, sumadas dan 5 lb y no 7 lb. Las fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos*, las *velocidades*, las *aceleraciones* y los *momentos* son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección, y que

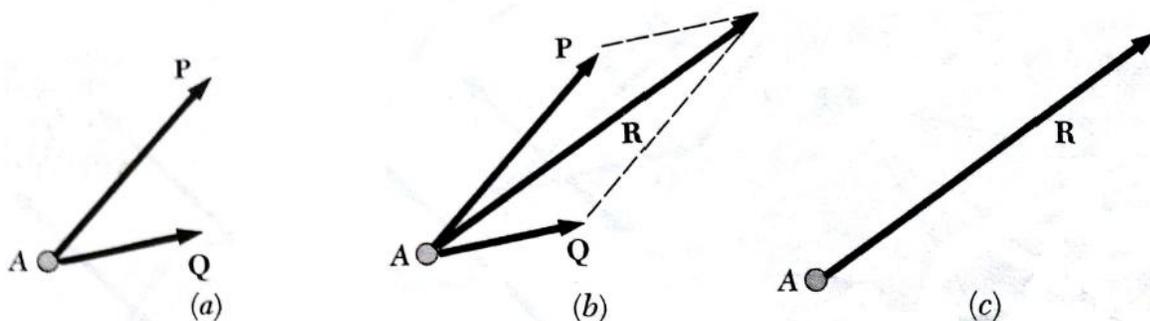


Fig. 2.2

se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Todas estas cantidades se pueden representar matemáticamente por *vectores*, mientras que aquellas cantidades que no tienen dirección, tales como el *volumen*, la *masa* o la *energía* se representan por números ordinarios o *escalares*.

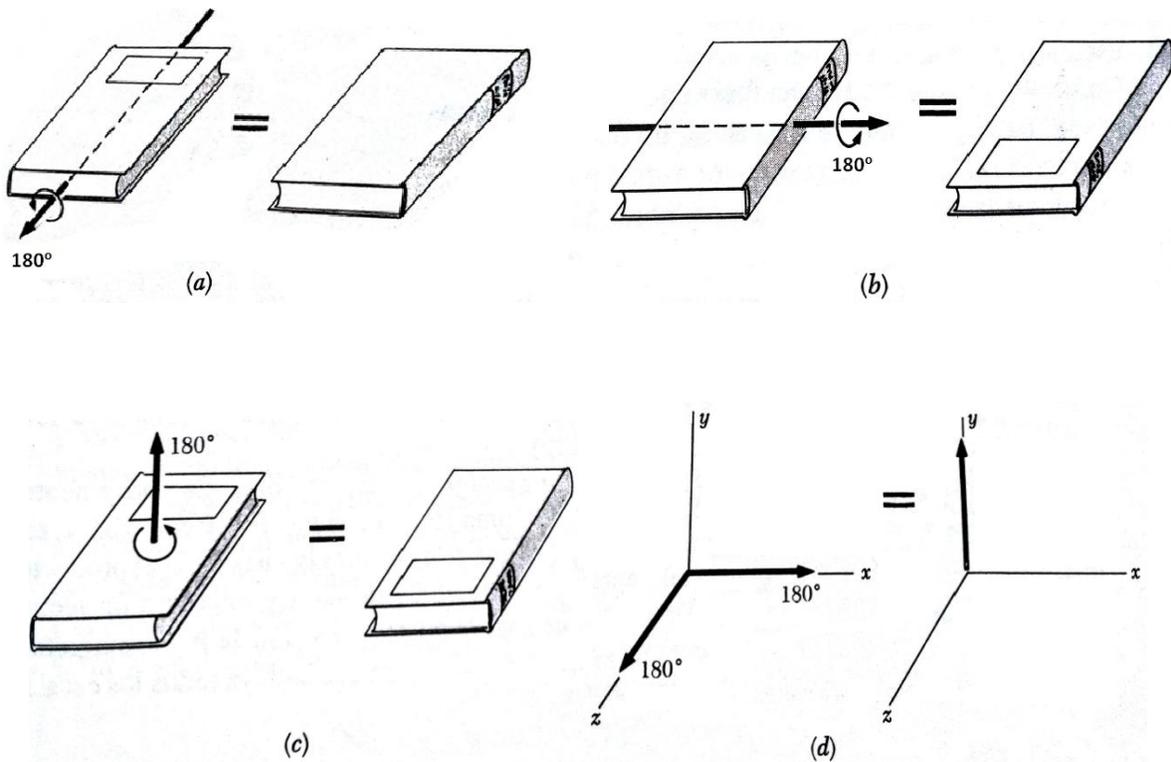
Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud y dirección, y que se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo*.<sup>\*</sup> En las ilustraciones, los vectores se representan por flechas y en este texto por el uso de símbolos en negrilla (**P**). En la escritura a mano, un vector puede ser caracterizado por una pequeña flecha dibujada en la parte superior de la letra que lo representa ( $\vec{P}$ ), o subrayando la letra (P). El último método está recibiendo amplia aceptación porque facilita el uso de la máquina de escribir. La magnitud de un vector define la longitud de la flecha con que se representa. En este libro, la magnitud de un vector se escribe en bastardilla. Así, la magnitud del vector **P** se representa por *P*.

Un vector que representa una fuerza que actúa sobre una partícula dada, tiene un punto de aplicación bien definido, esto es, la partícula misma. Se dice que tal vector es *fijo* y no puede moverse sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, tales como los pares de fuerzas (capítulo 3) se representan por vectores que pueden desplazarse libremente en el espacio y reciben el nombre de *vectores libres*. Otras cantidades

---

\* Algunas expresiones tienen magnitud y dirección pero no se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Aunque estas expresiones pueden representarse por flechas, *no pueden* considerarse como vectores.

Un grupo de dichas expresiones son las rotaciones finitas de un cuerpo rígido. Coloque sobre una mesa, frente a usted, un libro cerrado, con la tapa superior hacia arriba y el lomo hacia la izquierda. Ahora, hágalo girar un ángulo de 180° alrededor de un eje paralelo al lomo (figura 2.3a); esta rotación puede representarse por una flecha de 180 unidades de longitud y



**Fig. 2.3** Rotaciones finitas de un cuerpo rígido.

orientada tal como se indica en la figura. Deje el libro en esta nueva posición y hágalo rotar un ángulo de  $180^\circ$  alrededor de un eje horizontal perpendicular al lomo (figura 2.3b); la segunda rotación puede representarse por una flecha de 180 unidades de longitud y orientada tal como se indica. Pero el libro podría haber ocupado esta posición final por medio de una sola rotación de  $180^\circ$  alrededor de un eje vertical (figura 2.3c). Concluimos que la suma de las dos rotaciones de  $180^\circ$  representadas respectivamente por las flechas orientadas en las direcciones de los ejes  $z$  y  $x$ , es equivalente a la rotación de  $180^\circ$  representada por la flecha orientada en la dirección del eje  $y$  (figura 2.3d). En consecuencia, las rotaciones finitas de un cuerpo rígido *no obedecen* la ley de adición del paralelogramo; por tanto, *no pueden* representarse por medio de vectores.

físicas, tales como las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido (capítulo 3), se representan por vectores que pueden moverse o deslizarse a lo largo de la línea de acción y se conocen como vectores *deslizantes*.

Se dice que dos vectores son *iguales* cuando tienen la misma dirección y la misma magnitud, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.4); los vectores iguales pueden representarse con la misma letra.

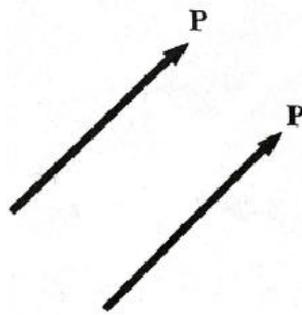


Fig. 2.4

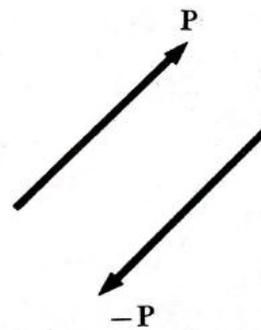


Fig. 2.5

El *vector negativo* de un vector  $P$  se define como el vector que tiene la misma magnitud de  $P$  y dirección opuesta a la de  $P$  (figura 2.5); el vector negativo de  $P$  se representa por  $-P$ . Comúnmente se dice que los vectores  $P$  y  $-P$  son *iguales y opuestos*. Evidentemente, tenemos que

$$P + (-P) = 0$$

**2.3. Adición de vectores.** Vimos en la sección anterior que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores  $P$  y  $Q$  se obtiene fijando los dos vectores al mismo punto de aplicación  $A$  y construyendo un paralelogramo con  $P$  y  $Q$  como dos lados contiguos del paralelogramo (figura 2.6). La diagonal que pasa por  $A$  representa la suma de los vectores  $P$  y  $Q$ , suma que se representa por  $P + Q$ .

El hecho de que se emplee el signo  $+$  para representar tanto a la suma vectorial como la escalar no debe producir confusión si se distinguen siempre con cuidado las cantidades vectoriales y escalares. Debemos observar que, en general, la magnitud del vector  $P + Q$  *no* es igual a la suma  $P + Q$  de las magnitudes de los vectores  $P$  y  $Q$ .

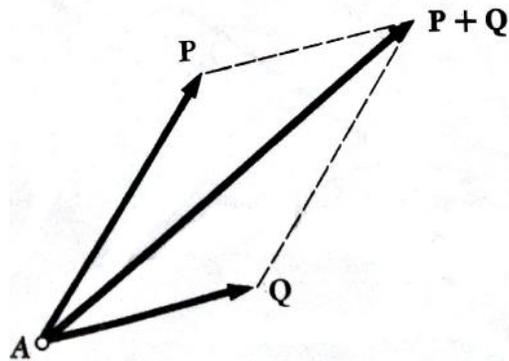


Fig. 2.6

Como el paralelogramo construido con los vectores  $P$  y  $Q$  no depende del orden en que se tomen  $P$  y  $Q$ , concluimos que la suma de dos vectores es *conmutativa* y escribimos

$$P + Q = Q + P \quad (2.1)$$

De la ley del paralelogramo se puede obtener un segundo método para determinar la suma de dos vectores. El método se conoce como la *regla del triángulo* y consiste en lo siguiente: Consideremos la figura 2.6, donde se ha obtenido la suma de los vectores  $P$  y  $Q$  por la ley del paralelogramo. Como el lado opuesto a  $Q$  es igual a  $Q$  en magnitud y dirección, podríamos dibujar solamente medio paralelogramo (figura 2.7a). Entonces, la suma de los vectores puede encontrarse *colocando el origen de  $Q$  en el extremo de  $P$* , y luego uniando el origen de  $P$  con el extremo

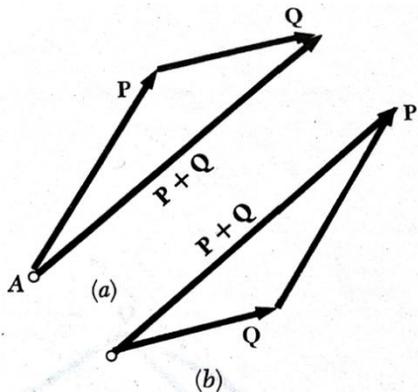


Fig. 2.7

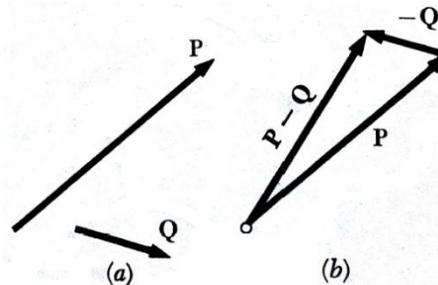


Fig. 2.8

de  $Q$ . En la figura 2.7b, se considera la otra mitad del paralelogramo, obteniéndose el mismo resultado. Esto confirma que la suma de vectores es conmutativa.

La sustracción de un vector se define como la adición del correspondiente vector negativo. Así, el vector  $P - Q$ , que representa la diferencia entre los vectores  $P$  y  $Q$ , se obtiene sumando a  $P$  el vector negativo  $-Q$  (figura 2.8). Escribimos

$$P - Q = P + (-Q) \quad (2.2)$$

Aquí, nuevamente, debemos observar que se usa el mismo signo para representar la sustracción vectorial y escalar, pero se evitarán confusiones y errores si se cuida en distinguir las cantidades vectoriales y escalares.

Consideremos ahora la *suma de tres o más vectores*. La suma de tres vectores  $P$ ,  $Q$  y  $S$  se obtendrá, *por definición*, sumando primero los vectores  $P$  y  $Q$  y luego el vector  $S$ , al vector  $P + Q$ . Escribimos entonces

$$P + Q + S = (P + Q) + S \quad (2.3)$$

En forma similar se obtendrá la suma de cuatro vectores sumando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Se puede concluir que la suma de cualquier número de vectores puede obtenerse aplicando consecutivamente la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores dados se remplacen por un solo vector.

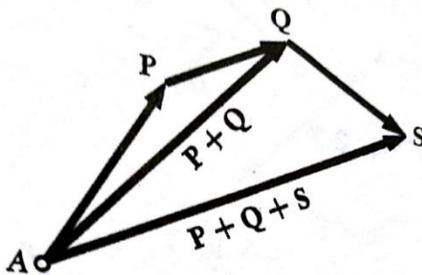


Fig. 2.9

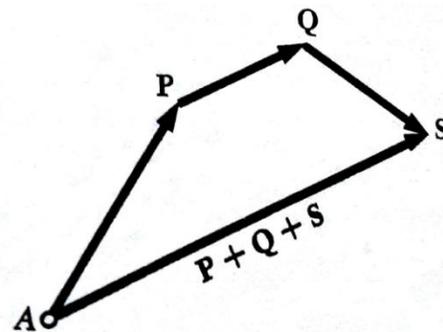


Fig. 2.10

Si los vectores son *coplanarios*, esto es, si están contenidos en el mismo plano, la suma puede obtenerse muy fácilmente con un método gráfico. En este caso se prefiere la aplicación consecutiva de la regla del triángulo a la ley del paralelogramo. De esta manera se obtiene en la figura 2.9 la suma de los tres vectores **P**, **Q** y **S**. En primer lugar, se aplica la regla del triángulo para obtener la suma  $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$  de los vectores **P** y **Q**; se aplica nuevamente la regla del triángulo para obtener la suma de los vectores  $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$  y **S**. Sin embargo, puede omitirse la determinación del vector  $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$  y la suma de los tres vectores puede obtenerse directamente, como se indica en la figura 2.10, *colocando sucesivamente el origen de uno de los vectores en el extremo del otro y finalmente uniendo el origen del primero con el extremo del último*. Esta es la *regla del polígono* para la suma de vectores.

Observamos que el resultado es invariable si, como se indica en la figura 2.11, los vectores **Q** y **S** se hubieran remplazado por su suma  $\mathbf{Q} + \mathbf{S}$ . Podemos entonces escribir

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \quad (2.4)$$

ecuación que expresa el hecho de que la adición de vectores es *asociativa*. Recordando que se ha demostrado, para el caso de dos vectores, que la adición es conmutativa, escribimos

$$\begin{aligned} \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.5)$$

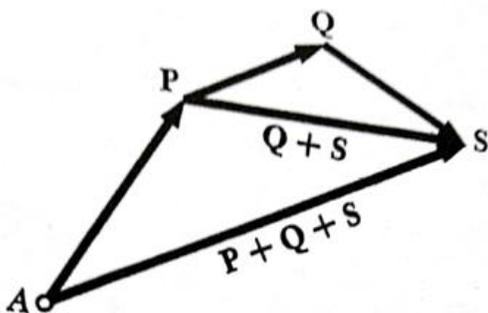


Fig. 2.11

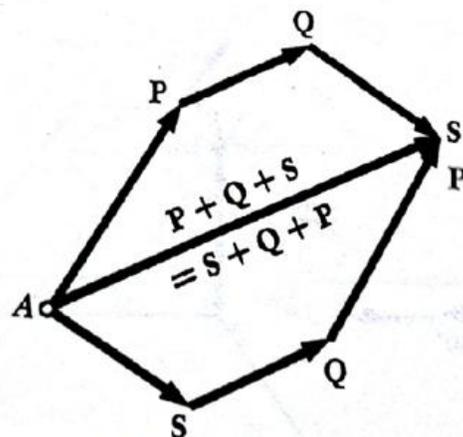


Fig. 2.12

Esta expresión, como otras que pueden obtenerse en forma análoga, indican que no importa el orden en que se sumen varios vectores (figura 2.12).

**Producto de un escalar por un vector.** Es conveniente expresar la suma  $\mathbf{P} + \mathbf{P}$  como  $2\mathbf{P}$ , la suma  $\mathbf{P} + \mathbf{P} + \mathbf{P}$  como  $3\mathbf{P}$  y, en general, representar la suma de  $n$  vectores iguales  $\mathbf{P}$  por el producto  $n\mathbf{P}$ . Definiremos el producto  $n\mathbf{P}$  de un entero positivo  $n$  y un vector  $\mathbf{P}$  como un vector que tiene la misma dirección de  $\mathbf{P}$  y la magnitud  $n\mathbf{P}$ . Extendiendo esta definición para que incluya todos los escala-

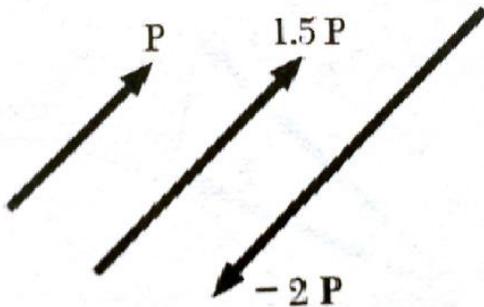


Fig. 2.13

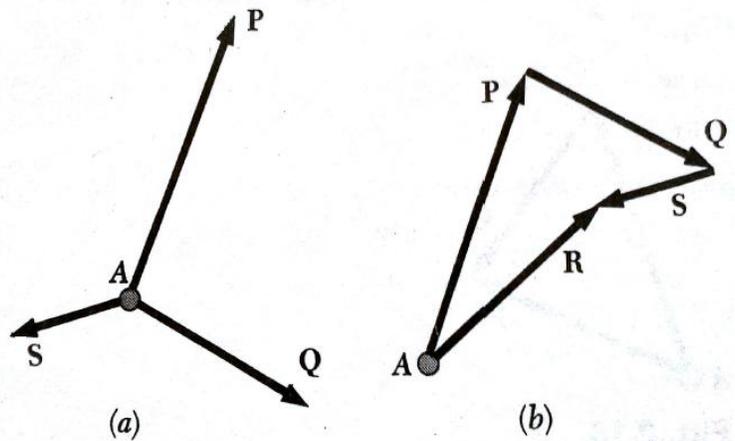


Fig. 2.14

res y recordando la definición de un vector negativo dada en la sección 2.2, definimos el producto  $k\mathbf{P}$  de un escalar  $k$  y un vector  $\mathbf{P}$  como un vector que tiene la misma dirección de  $\mathbf{P}$  (si  $k$  es positivo), o dirección opuesta a la de  $\mathbf{P}$  (si  $k$  es negativo) y la magnitud igual al producto de  $P$  con el valor absoluto de  $k$  (figura 2.13).

**2.4. Resultante de varias fuerzas concurrentes.** Consideremos una partícula  $A$  sobre la que actúan varias fuerzas coplanares, es decir, varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.14a). Como todas las fuerzas consideradas aquí pasan por el punto  $A$ , se dice que son *concurrentes*. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre  $A$  pueden sumarse por la regla del polígono (figura 2.14b). Como el empleo de la regla del polígono es equivalente a la aplicación consecutiva de la ley del paralelogramo, el vector  $\mathbf{R}$  así obtenido, representa la resultante de las

fuerzas concurrentes, es decir, la fuerza única que produce sobre la partícula  $A$  el mismo efecto que causan las fuerzas concurrentes dadas. Como se discutió anteriormente, no importa el orden en que se sumen los vectores  $P$ ,  $Q$  y  $S$  que representan las fuerzas dadas.

**2.5. Descomposición de una fuerza en componentes.** Hemos visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden remplazarse por una fuerza única que produce el mismo efecto sobre la partícula. Recíprocamente, una fuerza única  $F$  que actúa sobre una partícula puede remplazarse por dos o más fuerzas que en conjunto produzcan el mismo efecto sobre la partícula. Estas fuerzas se llaman *componentes* de la fuerza original  $F$  y el proceso de remplazar a  $F$  por ellas se llama *descomposición de la fuerza  $F$  en sus componentes*.

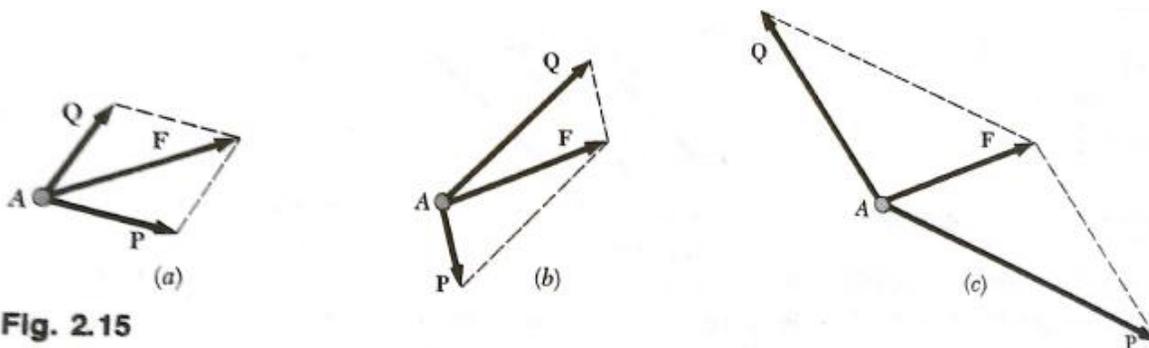


Fig. 2.15

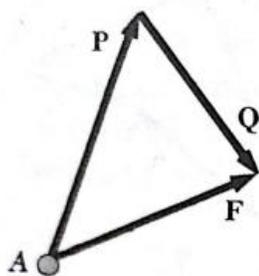


Fig. 2.16

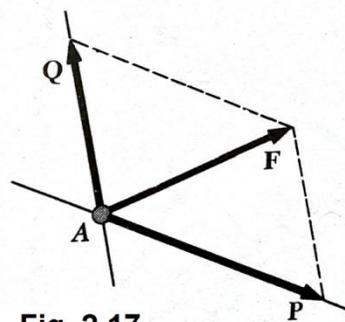
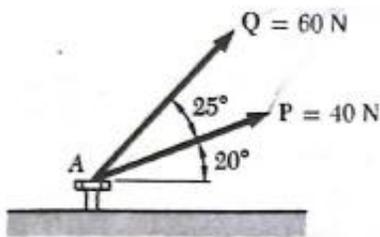


Fig. 2.17

Es evidente que para cada fuerza  $F$  existe un número infinito de conjuntos posibles de componentes. Los conjuntos más importantes, en lo que se refiere a las aplicaciones prácticas, son los de dos componentes  $P$  y  $Q$ . Pero, aún así, el número de formas en que una fuerza  $F$  puede descomponerse en dos componentes es ilimitado (figura 2.15). Hay dos casos de particular interés:

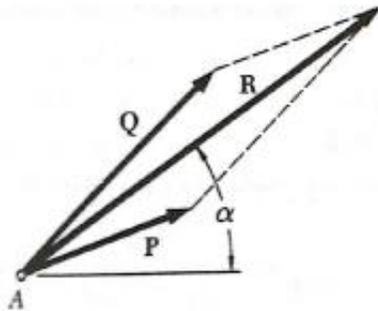
1. *Se conoce  $P$ , una de las dos componentes.* La segunda componente  $Q$ , se obtiene aplicando la regla del triángulo al unir el extremo de  $P$  con el extremo de  $F$  (figura 2.16); la magnitud y dirección de  $Q$  se determina gráficamente o por trigonometría. Cuando ya se ha determinado  $Q$ , ambas componentes  $P$  y  $Q$  deben aplicarse en  $A$ .
2. *Se conoce la línea de acción de cada componente.* La magnitud y dirección de las componentes se obtiene aplicando la ley del paralelogramo y trazando por el extremo de  $F$  líneas paralelas a las líneas de acción (figura 2.17). Este proceso conduce a dos componentes,  $P$  y  $Q$ , muy bien definidas, que pueden determinarse gráficamente o, mediante la ley de los senos.

Se pueden encontrar muchos otros casos; por ejemplo, se conoce la dirección de una componente, mientras que la magnitud de la otra es muy pequeña (véase el problema modelo 2.2). En todos los casos se debe dibujar el triángulo o paralelogramo apropiado que satisfaga las condiciones dadas.



### PROBLEMA MODELO 2.1

Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el perno **A**. Determinar su resultante.

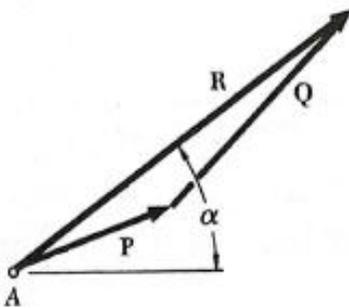


**Solución gráfica.** Se traza a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q**. Se mide la magnitud y dirección de la resultante; se encuentra que sus valores son

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \quad \blacktriangleleft$$

También puede emplearse la regla del triángulo. Se dibujan las fuerzas **P** y **Q** uniendo el extremo de una con el origen de la otra. Nuevamente, se mide la magnitud y dirección de la resultante.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad R = 98 \text{ N} \angle 35^\circ \quad \blacktriangleleft$$



**Solución trigonométrica.** Se emplea de nuevo la regla del triángulo; se conocen dos lados y el ángulo. Aplicamos la ley de los cosenos

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$

$$R^2 = (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ$$

$$R = 97.7 \text{ N}$$

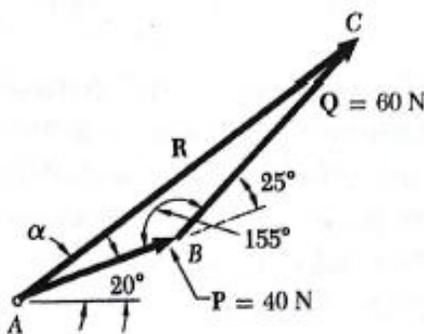
Ahora, aplicamos la ley de los senos

$$\frac{\text{sen } A}{Q} = \frac{\text{sen } B}{R} \quad \frac{\text{sen } A}{60 \text{ N}} = \frac{\text{sen } 155^\circ}{97.7 \text{ N}} \quad (1)$$

Usando una *calculadora*, primero calculamos el cociente y luego su arco seno, y obtenemos

$$A = 15.0^\circ \quad \alpha = 20^\circ + A = 35.0^\circ$$

$$R = 97.7 \text{ N} \angle 35.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$



Otra solución trigonométrica. Construimos el triángulo recto  $BCD$  y calculamos

$$CD = (60 \text{ N}) \sen 25^\circ = 25.4 \text{ N}$$

$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54.4 \text{ N}$$

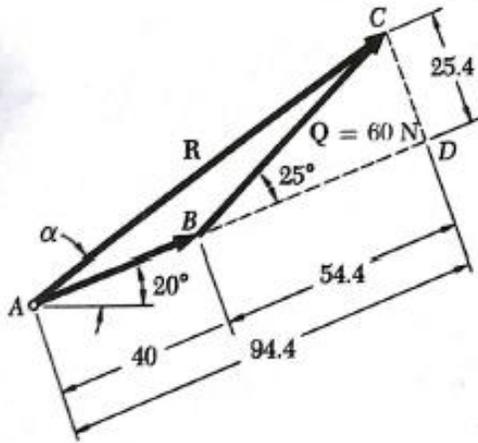
Luego, empleando el triángulo  $ACD$ , obtenemos

$$\tan A = \frac{25.4 \text{ N}}{94.4 \text{ N}} \quad A = 15.0^\circ$$

$$R = 25.4 / \sen A \quad R = 97.7 \text{ N}$$

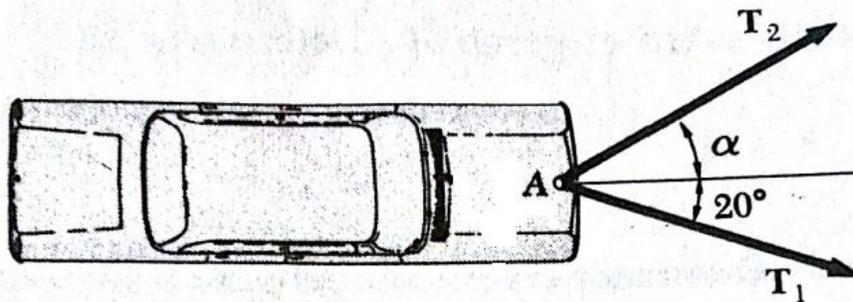
De nuevo

$$\alpha = 20^\circ + A = 35.0^\circ \quad R = 97.7 \text{ N} \angle 35.0^\circ \quad \blacktriangleleft$$



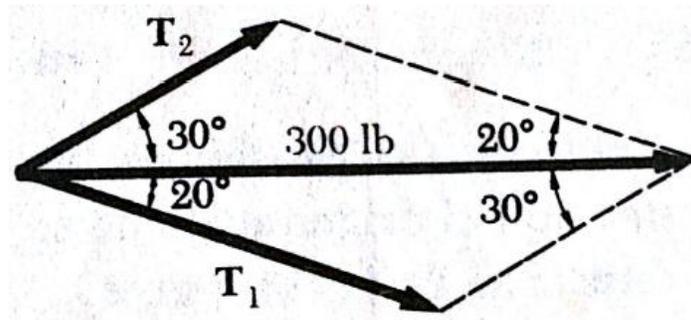
## PROBLEMA MODELO 2.2

Se arrastra un automóvil por medio de dos cables, como se aprecia en la figura. Si la resultante de las dos fuerzas ejercidas por los cables es una fuerza de 300 lb, paralela al eje del automóvil calcular: (a) la tensión en cada cable, sabiendo que  $\alpha = 30^\circ$ , (b) el valor de  $\alpha$  para que la tensión en el cable 2 sea mínima.



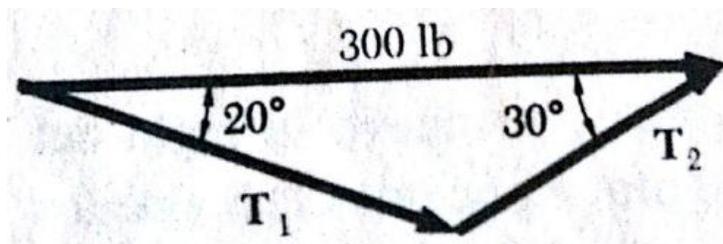
a. Tensión cuando  $\alpha = 30^\circ$ . *Solución gráfica.* Se utiliza la ley del paralelogramo; se sabe que la diagonal (la resultante) es igual a 300 lb y que se dirige hacia la derecha. Se trazan los dos lados paralelos a los cables. Si el dibujo se hace a escala, podemos medir

$$T_1 = 196 \text{ lb} \quad T_2 = 134 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$



**Solución trigonométrica.** Puede emplearse la regla del triángulo. Observamos que el triángulo representa la mitad del paralelogramo dibujado anteriormente. Utilizando la ley de los senos, escribimos

$$\frac{T_1}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{T_2}{\text{sen } 20^\circ} = \frac{300 \text{ lb}}{\text{sen } 130^\circ}$$



Con una *calculadora*, primero computamos y almacenamos el valor del último cociente. Multiplicando este valor sucesivamente por seno  $30^\circ$  y seno  $20^\circ$ , obtenemos

$$T_1 = 195.8 \text{ lb} \quad T_2 = 133.9 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

b. **Valor de  $\alpha$  para que  $T_2$  sea mínimo.** Para determinar el valor de  $\alpha$  con el cual la tensión en el cable 2 sea mínimo, se utiliza una vez más la regla del triángulo. En el diagrama, la línea 1-1 tiene la dirección de  $T_1$ . Por las líneas 2-2 se indican varias direcciones posibles de  $T_2$ . Vemos que el valor mínimo de  $T_2$  se obtiene cuando  $T_1$  y  $T_2$  son perpendiculares. El valor mínimo de  $T_2$  es

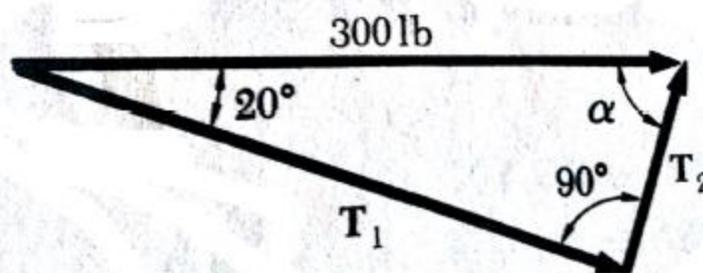
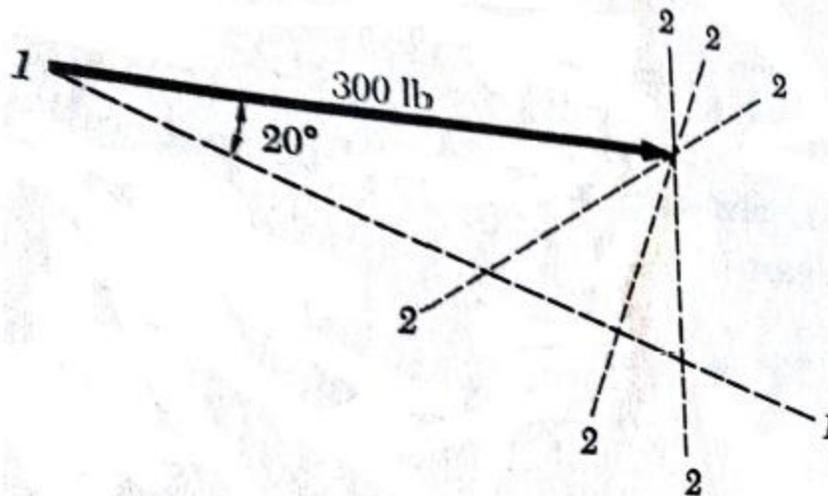
$$T_2 = (300 \text{ lb}) \text{sen } 20^\circ = 102.6 \text{ lb}$$

Los valores correspondientes de  $T_1$  y  $\alpha$  son

$$T_1 = (300 \text{ lb}) \text{cos } 20^\circ = 282 \text{ lb}$$

$$\alpha = 90^\circ - 20^\circ$$

$$\alpha = 70^\circ \quad \blacktriangleleft$$



## PROBLEMAS

2.1 y 2.2 Determinar gráficamente la magnitud y dirección de la resultante de las dos fuerzas dadas, empleando en cada problema: (a) la ley del paralelogramo, (b) la regla del triángulo.

2.3 Dos elementos estructurales  $B$  y  $C$  están remachados al soporte  $A$ . Si la tensión en  $B$  es de 2500 lb y la tensión en  $C$  es de 2000 lb, determinar gráficamente la magnitud y dirección de la fuerza resultante que actúa sobre el soporte.

2.4 Dos elementos estructurales  $B$  y  $C$  están remachados al soporte  $A$ . Si la tensión en el elemento  $B$  es 6 kN y la tensión en  $C$  es 10 kN, determinar gráficamente la magnitud y dirección de la fuerza resultante que actúa sobre el soporte.

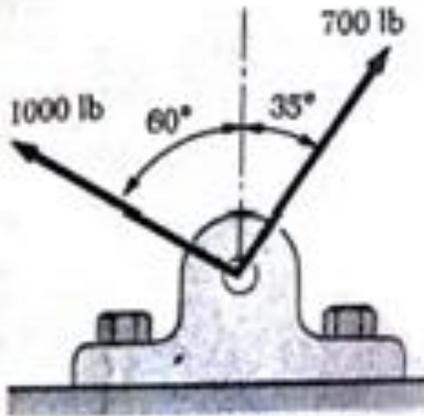


Fig. P2.1

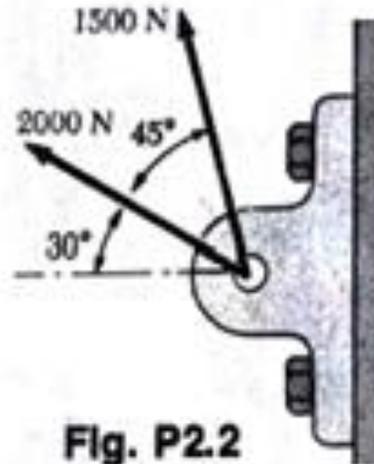


Fig. P2.2

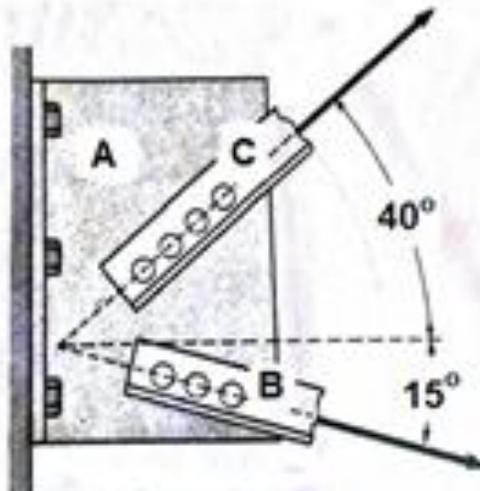


Fig. P2.3 y P2.4

2.5 Descomponer la fuerza  $F$  de 100 lb de magnitud en dos componentes a lo largo de las líneas  $a-a$  y  $b-b$ . Determinar, por trigonometría, el ángulo  $\alpha$  si la componente de  $F$  a lo largo de la línea  $a-a$  es de 70 lb.

2.6 Descomponer la fuerza  $F$  de 800 lb de magnitud en dos componentes a lo largo de las líneas  $a-a$  y  $b-b$ . Encontrar por trigonometría, el ángulo  $\alpha$  si la componente de  $F$  en la dirección  $b-b$  es de 120 N.

2.7 Si  $\alpha = 30^\circ$ , determinar la magnitud de la fuerza  $P$  de suerte que la fuerza resultante ejercida sobre el cilindro sea vertical. ¿Cuál es la magnitud de la resultante?

2.9 Un cilindro se va a levantar por medio de dos cables. Sabiendo que la tensión en un cable es de 600 N, determinar la magnitud y dirección de la fuerza  $P$  de modo que la resultante sea una fuerza vertical de 900 N.

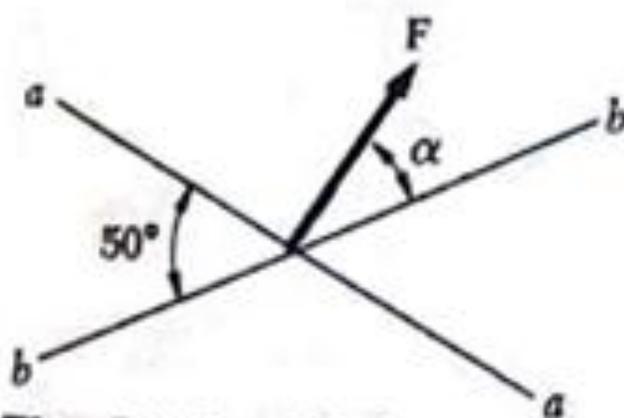


Fig. P2.5 y P2.6

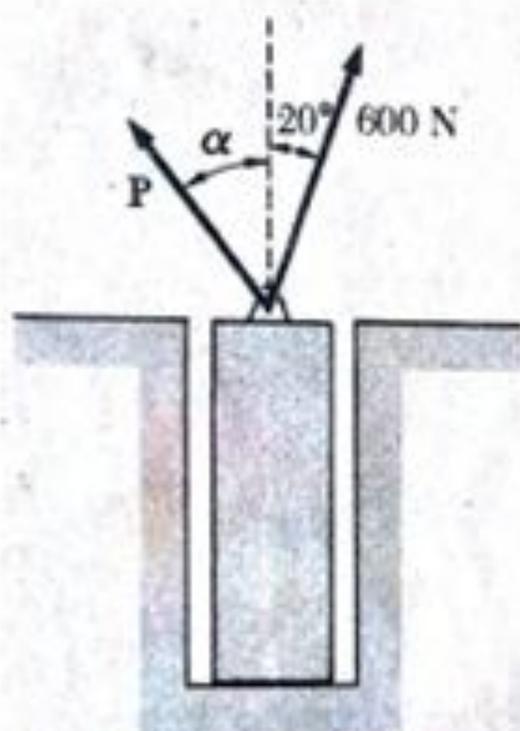


Fig. P2.7 y P2.9

2.8 Dos remolcadores  $A$  y  $C$ , arrastran un barco  $B$ . La tensión en el cable  $AB$  es 4000 lb, y la resultante de las dos fuerzas aplicadas en  $B$  está dirigida a lo largo del eje del barco. Determinar por trigonometría (a) la tensión en el cable  $BC$ , (b) la magnitud de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en  $B$ .

2.10 Dos remolcadores  $A$  y  $C$  arrastran un barco  $B$ . En un instante dado la tensión en el cable  $AB$  es 4500 lb y la tensión en el cable  $BC$  es 2000 lb. Determinar por trigonometría la magnitud y dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en  $B$  en aquel instante.

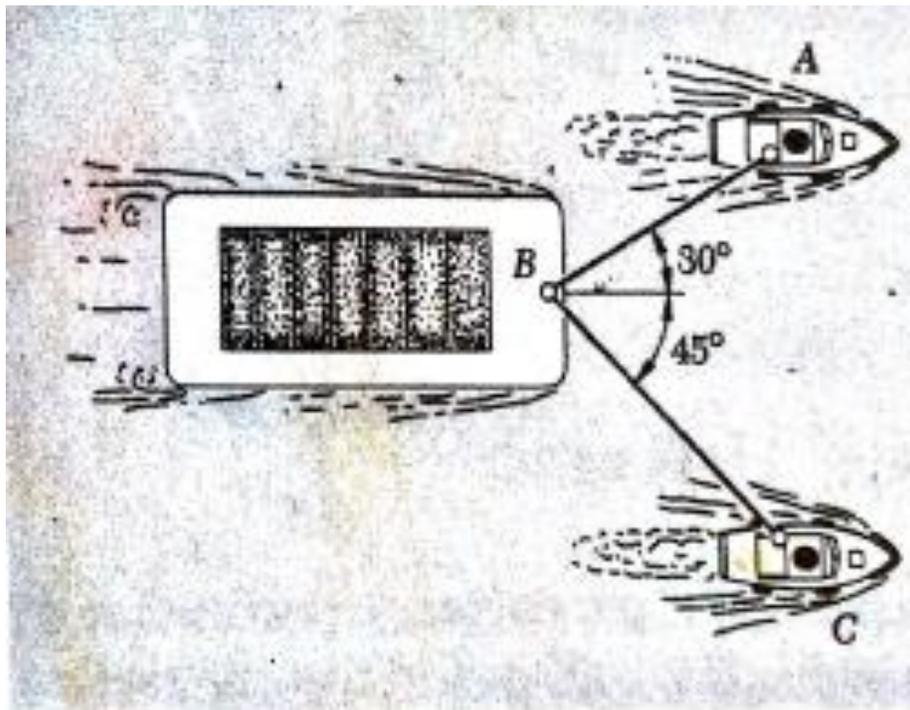


Fig. P2.8 y P2.10

2.11 Resolver el problema 2.3 por trigonometría.

2.12 Determinar trigonómicamente la magnitud y dirección de la fuerza  $P$ , de modo que la resultante de  $P$  y la fuerza de 900 N sea una fuerza vertical de 2700 N dirigida hacia abajo.

2.13 Si la resultante de las dos fuerzas que actúan sobre el cilindro del problema 2.7 debe ser vertical, calcular: (a) el valor de  $\alpha$  de manera que la magnitud de  $P$  sea mínima, (b) la correspondiente magnitud de  $P$ .

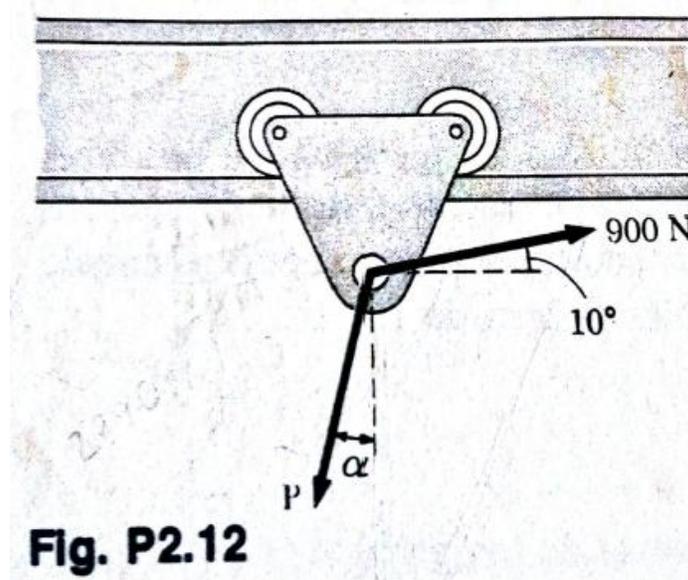


Fig. P2.12

2.2 3240 N  $\searrow$  49.1°.

2.4 14.3 kN  $\nearrow$  19.9°.

2.6 123.4°.

2.8 (a) 2830 lb. (b) 5460 lb.

SI: (a) 12.59 kN. (b) 24.3 kN.

2.10 5380 lb  $\nearrow$  8.9°. SI: 23.9 kN  $\nearrow$  8.9°.

2.12  $P = 2990$  N;  $\alpha = 72.8^\circ$ .

**2.6. Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios.\*** En muchos problemas se encuentra que es conveniente descomponer una fuerza en dos componentes que sean perpendiculares entre sí. En la figura 2.18, se ha descompuesto la fuerza  $F$  en una componente  $F_x$  en la dirección del eje  $x$  y una componente  $F_y$  en la dirección del eje  $y$ . El paralelogramo que se dibuja para obtener las dos componentes es un *rectángulo*, y  $F_x$  y  $F_y$  se llaman *componentes rectangulares*.

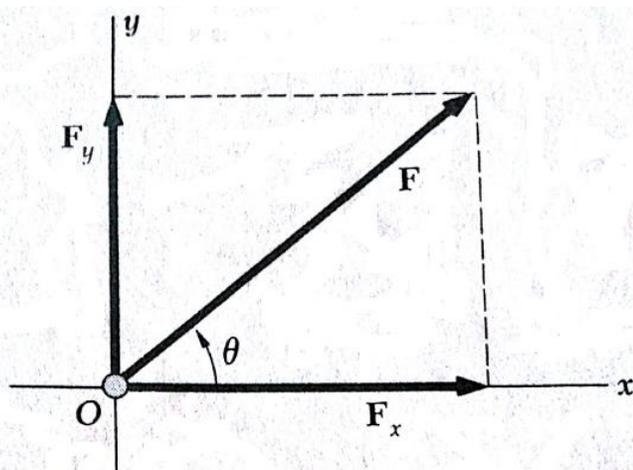


Fig. 2.18

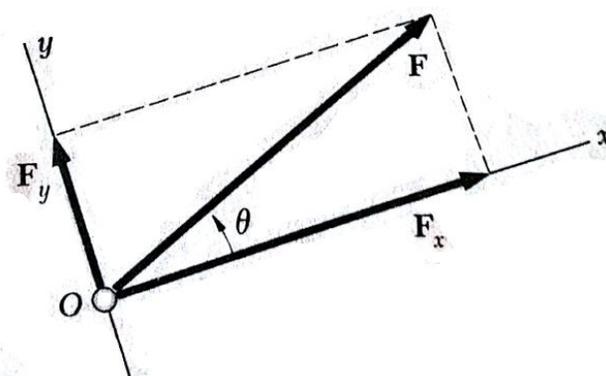


Fig. 2.19

Generalmente se hace que los ejes  $x$  y  $y$  tengan respectivamente la dirección horizontal y vertical, como en la figura 2.18; sin embargo, pueden tomarse en dos direcciones perpendiculares cualesquiera, como se indica en la figura 2.19. Al determinar las componentes rectangulares de una fuerza, se deben considerar las líneas auxiliares dibujadas en las figuras 2.18 y 2.19 como *paralelas* a los ejes  $x$  y  $y$ , más bien que considerarlas como *perpendiculares* a dichos ejes. Esta práctica ayudará a evitar errores al determinar componentes *oblicuas*, como en la sección 2.5.

\* Las propiedades establecidas en las secciones 2.6 y 2.7 pueden extenderse fácilmente a las componentes rectangulares de cualquier vector.

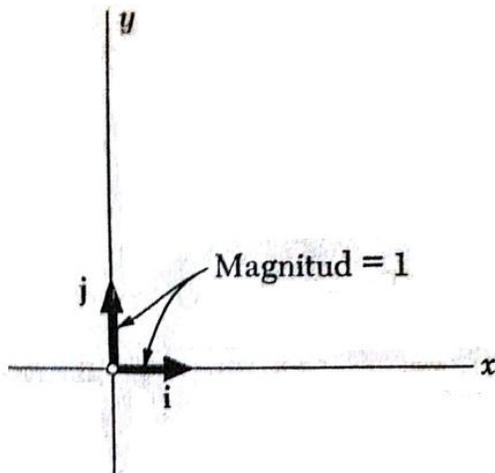


Fig. 2.20

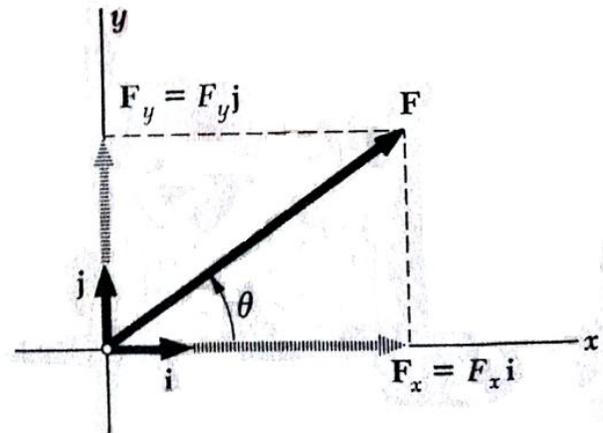


Fig. 2.21

en la sección 2.3 del producto de un escalar por un vector, observamos que las componentes rectangulares  $F_x$  y  $F_y$  de una fuerza  $\mathbf{F}$  pueden obtenerse multiplicando los vectores unitarios  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  respectivamente por escalares apropiados (figura 2.21). Escribimos entonces

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

y

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

Mientras que los escalares  $F_x$  y  $F_y$  pueden ser positivos o negativos, según el sentido de  $F_x$  y de  $F_y$ , sus valores absolutos son iguales, respectivamente, a las magnitudes de las fuerzas componentes  $F_x$  y  $F_y$ . Los escalares  $F_x$  y  $F_y$  se llaman las *componentes escalares* de la fuerza  $F$ , en tanto que los vectores componentes  $F_x$  y  $F_y$  se llaman las *componentes vectoriales* de la fuerza  $F$ . Sin

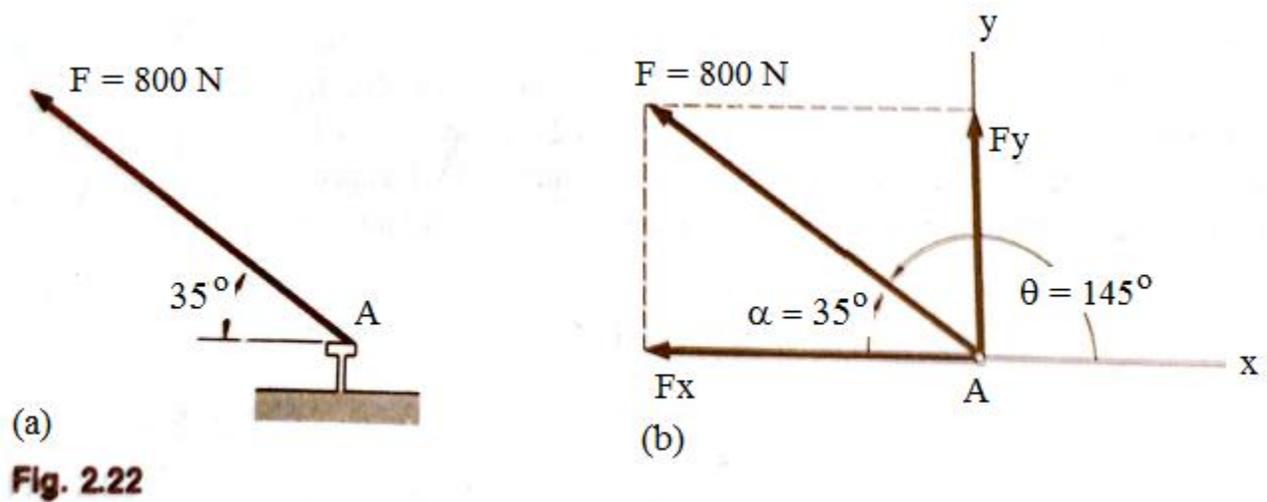
embargo, cuando no haya posibilidad de confusión, tanto las componentes escalares como las vectoriales de  $F$  se pueden llamar simplemente las *componentes* de  $F$ . Observemos que la componente escalar  $F_x$  es positiva cuando el vector componente  $F_x$  tiene la misma dirección del vector unitario  $i$  (es decir, el mismo sentido del eje positivo  $x$ ) y negativa cuando  $F_x$  tiene dirección opuesta. Se puede llegar a una conclusión similar con respecto al signo de la componente escalar  $F_y$ .

Si representamos por  $F$  la magnitud de la fuerza  $F$  y por  $\theta$  el ángulo entre  $F$  y el eje  $x$ , medido a partir del eje  $x$  positivo y en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj (figura 2.21), podemos entonces expresar las componentes escalares de  $F$  así:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Notemos que las relaciones obtenidas son válidas para cualquier valor del ángulo  $\theta$  desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$ ; y que definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares  $F_x$  y  $F_y$ .

*Ejemplo 1.* Sobre el perno  $A$  se aplica una fuerza de 800 N, como se muestra en la figura 2.22a. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza.



**Fig. 2.22**

Para que las componentes escalares  $F_x$  y  $F_y$  tengan el signo correcto,  $\theta$  debe remplazarse por los valores  $\theta = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$ , en las relaciones (2.8). Sin embargo, es más cómodo determinar por inspección los signos de  $F_x$  y de  $F_y$  (figura 2.22b) y usar las funciones trigonométricas del ángulo  $\alpha = 35^\circ$ , que pueden leerse directamente en la regla de cálculo. Por tanto, escribimos

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N}$$

$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

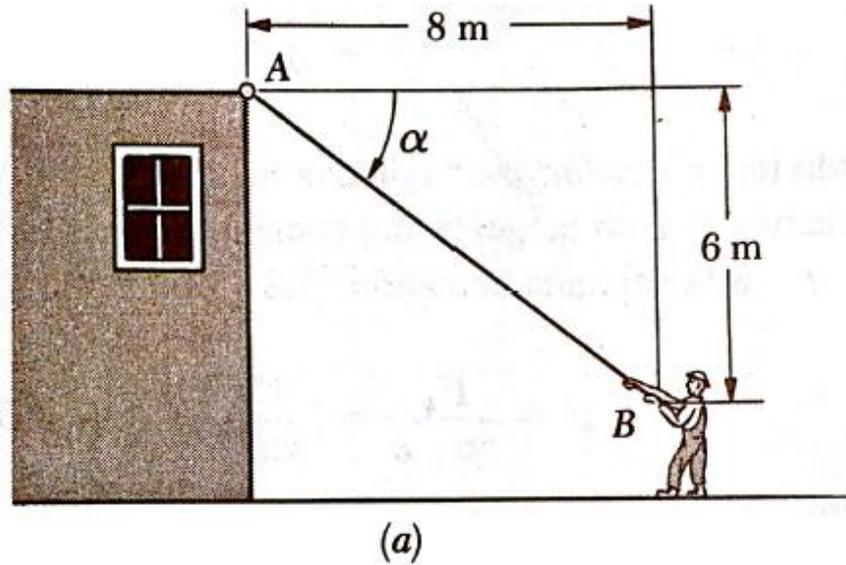
Las componentes vectoriales de  $\mathbf{F}$  son

$$\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}$$

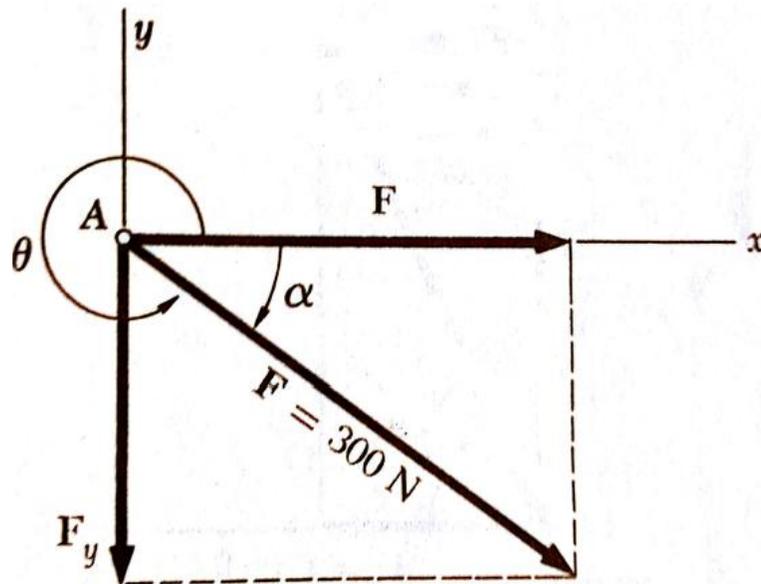
y podemos escribir  $\mathbf{F}$  en la forma.

$$\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j}$$

*Ejemplo 2.* Un hombre tira con una fuerza de 300 N una cuerda sujeta a un edificio, como se muestra en la figura 2.23a. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda sobre el punto *A*?



**Fig. 2.23**



**Fig. 2.23**

(b)

Vemos en la figura 2.23b que

$$F_x = +(300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = -(300 \text{ N}) \operatorname{sen} \alpha$$

Observando que  $AB = 10 \text{ m}$ , encontramos en la figura 2.23a

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{AB} = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5} \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{6 \text{ m}}{AB} = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Así, tenemos

$$F_x = +(300 \text{ N})\frac{4}{5} = +240 \text{ N} \quad F_y = -(300 \text{ N})\frac{3}{5} = -180 \text{ N}$$

y escribimos

$$\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (180 \text{ N})\mathbf{j}$$

Cuando una fuerza  $\mathbf{F}$  se define por sus componentes rectangulares  $F_x$  y  $F_y$  (figura 2.21), el ángulo  $\theta$  que define su dirección puede obtenerse mediante

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

La magnitud  $F$  de la fuerza puede obtenerse aplicando el teorema de Pitágoras y escribiendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Sin embargo, una vez que se ha encontrado  $\theta$ , es más fácil, generalmente, determinar la magnitud de la fuerza, despejando  $F$  en una de las fórmulas (2.8)

**Ejemplo 3.** Una fuerza  $\mathbf{F} = (700 \text{ lb})\mathbf{i} + (1,500 \text{ lb})\mathbf{j}$  se aplica a un perno  $A$ . Determinar la magnitud de la fuerza y el ángulo  $\theta$  que forma con la horizontal.

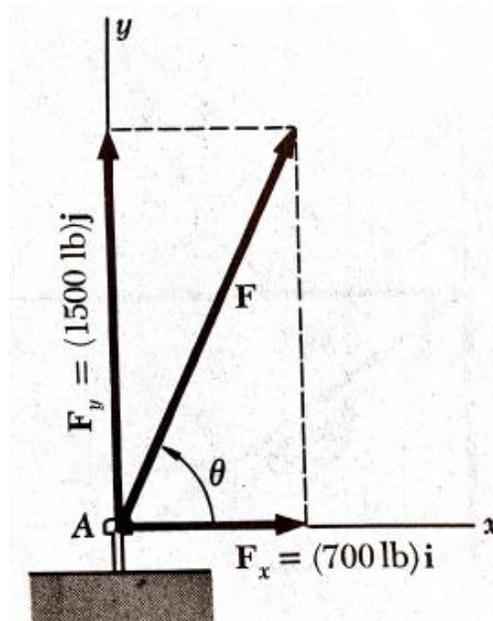
Primero, hacemos un diagrama que muestre las dos componentes rectangulares de la fuerza y el ángulo  $\theta$  (figura 2.24) según la ecuación 2.9 escribimos

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1500 \text{ lb}}{700 \text{ lb}}$$

Usando una *calculadora\** colocamos 1500 lb y dividimos por 700 lb; y calculamos el arco tangente del cociente, obteniendo  $\theta = 65.0^\circ$ . Despejando  $F$  de la segunda ecuación (2.8), obtenemos

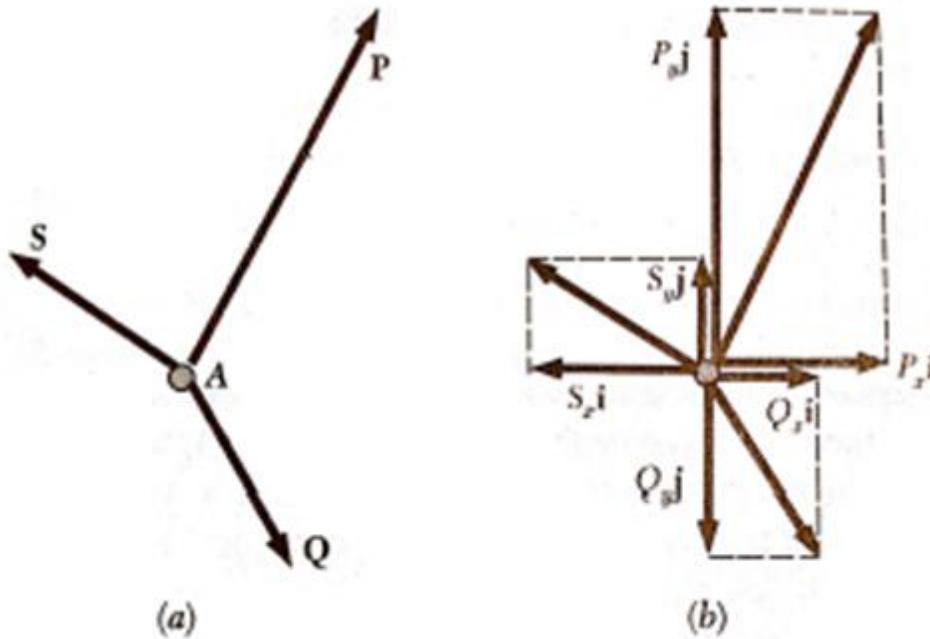
$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{1500 \text{ lb}}{\sin 65.0^\circ} = 1655 \text{ lb}$$

El último cálculo se facilita si se almacena el valor de  $F_y$  cuando se introduce; y luego se divide por  $\sin \theta$ .

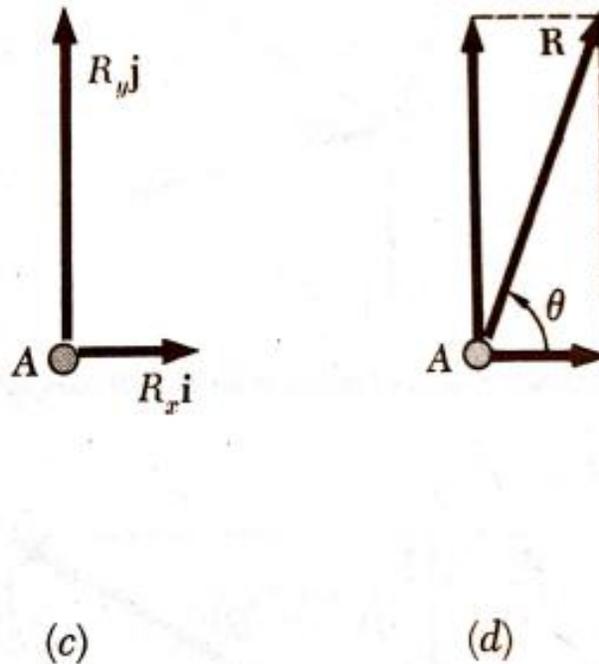


**Fig. 2.24**

\* Se supone que la calculadora utilizada permite el cálculo de funciones trigonométricas y sus inversas. Algunas calculadoras tienen teclas para la conversión directa de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa. Tales calculadoras eliminan los cálculos de las funciones trigonométricas de los ejemplos 1, 2, y 3 en los problemas del mismo tipo.



**Fig. 2.25**



**Fig. 2.25**

**2.7. Suma de fuerzas por adición de componentes  $x$  y  $y$ .** En la sección 2.1 se vio que las fuerzas pueden sumarse aplicando la regla del paralelogramo. Con base en esta regla, se dedujeron en las secciones 2.3 y 2.4 otros dos métodos de más fácil aplicación para la solución *gráfica* de problemas: la regla del triángulo para la suma de dos fuerzas y la regla del polígono para la suma de tres o más fuerzas. También se vio que el triángulo utilizado para definir la resultante de dos fuerzas puede emplearse para obtener una solución *trigonométrica*.

Cuando se suman tres o más fuerzas, no es práctico obtener una solución trigonométrica del polígono de fuerzas que define la resultante de las fuerzas. En este caso, puede obtenerse una solución *analítica* del problema descomponiendo cada fuerza en dos componentes rectangulares. Consideremos por ejemplo, tres fuerzas  $P$ ,  $Q$  y  $S$  que actúan sobre una partícula  $A$  (figura 2.25a). Su resultante  $R$  se define por la relación

$$R = P + Q + S \quad (2.11)$$

Expresando cada fuerza mediante sus dos componentes rectangulares, se puede escribir

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.12)$$

o, de una manera más breve,

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.13)$$

Se concluye que las *componentes escalares*  $R_x$  y  $R_y$  de la *resultante*  $\mathbf{R}$ , de varias fuerzas que actúan sobre una partícula, se obtienen sumando algebraicamente las correspondientes *componentes escalares* de las fuerzas que intervienen.\*

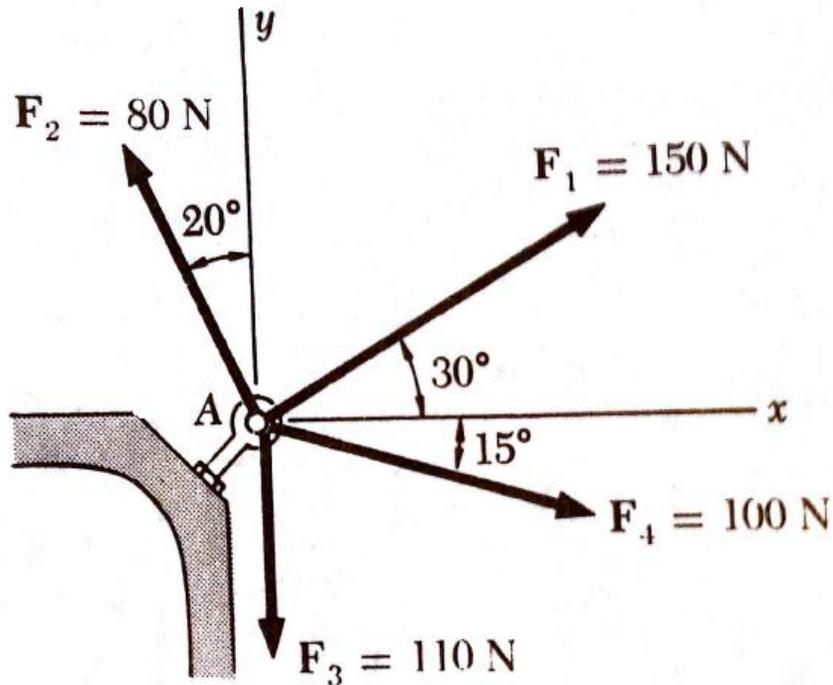
En la práctica, la determinación de la resultante  $\mathbf{R}$  se hace en tres pasos, como se ilustra en la figura 2.25. Primero, descomponemos las fuerzas dadas representadas en la figura 2.25a en sus componentes  $x$  y  $y$  (figura 2.25b). Sumamos estas componentes para obtener las componentes  $x$  y  $y$  de  $\mathbf{R}$  (figura 2.25c). Finalmente, se determina la resultante  $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$  aplicando la ley del paralelogramo (figura 2.25d). Este procedimiento será mucho más eficiente si los cálculos se ordenan en una tabla. Este es el único método analítico práctico para sumar tres o más fuerzas, y con frecuencia se prefiere a la solución trigonométrica, en el caso de la suma de dos fuerzas.

---

\* Claro está, este resultado también se aplica a la suma de otras cantidades vectoriales, como son velocidades, aceleraciones o cantidades de movimiento.

### PROBLEMA MODELO 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno  $A$ , como se muestra en la figura. Determinar la resultante de las fuerzas sobre el perno.



---

**Solución.** Las componentes  $x$  y  $y$  de cada fuerza las determinamos trigonométricamente, como se indica, y sus valores los anotamos en la tabla. De acuerdo con la convención adoptada en la sección 2.6, los números escalares que representan la componente de una fuerza serán positivos si la componente tiene el mismo sentido del eje coordenado correspondiente. De esta forma, las componentes  $x$  que actúan hacia la derecha y las componentes  $y$  que actúan hacia arriba, se representan por números positivos.

Fuerza	Magnitud N	Componente x, N	Componente y, N
F <sub>1</sub>	150	+129.9	+75.0
F <sub>2</sub>	80	-27.4	+75.2
F <sub>3</sub>	110	0	-110.0
F <sub>4</sub>	100	+96.6	-25.9
		R <sub>x</sub> = +199.1	R <sub>y</sub> = +14.3

Por tanto, la resultante **R** de las cuatro fuerzas es

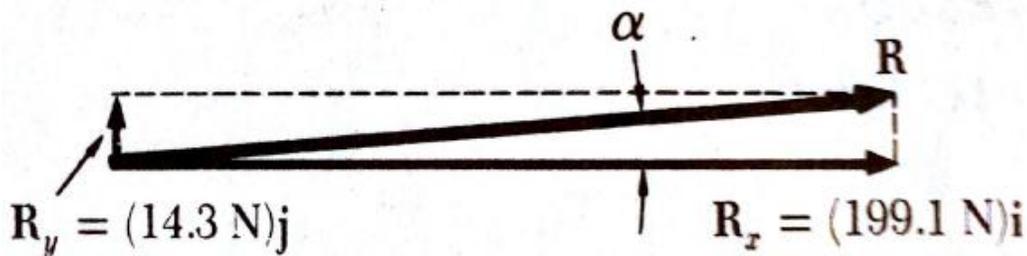
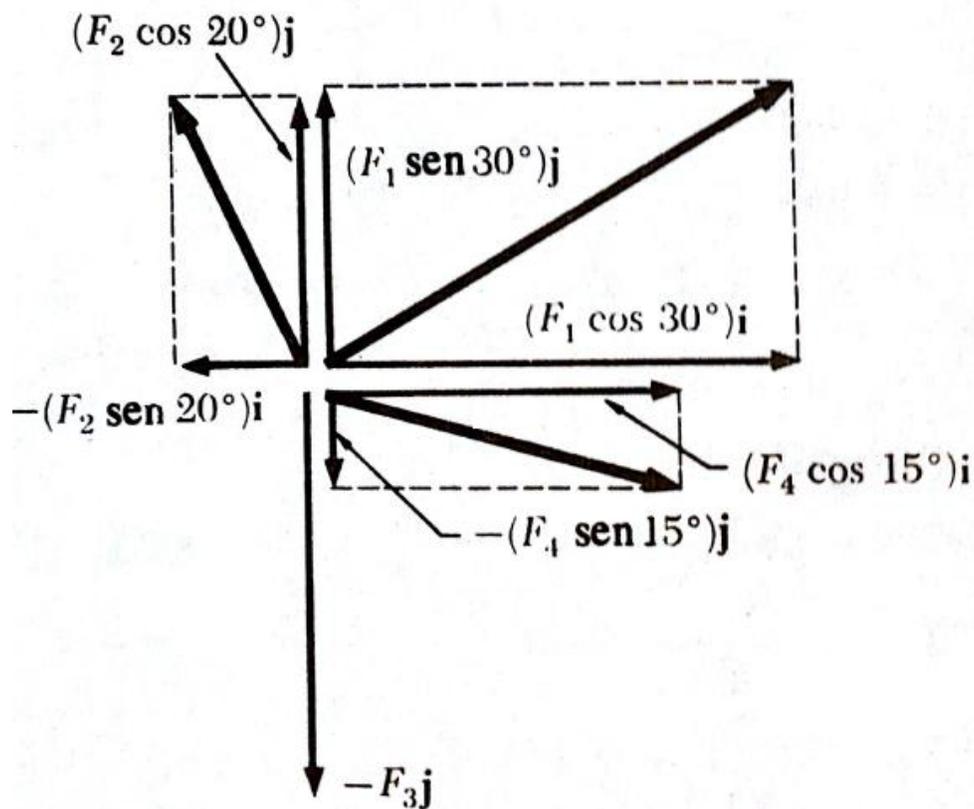
$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad \mathbf{R} = (199.1 \text{ N})\mathbf{i} + (14.3 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

La magnitud y dirección de la resultante pueden ahora determinarse. En el triángulo mostrado,

$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}} \quad \alpha = 4.1^\circ$$

$$R = \frac{14.3 \text{ N}}{\sin \alpha} = 199.6 \text{ N} \quad \mathbf{R} = 199.6 \text{ N} \angle 4.1^\circ \quad \blacktriangleleft$$

Con una *calculadora*, se puede facilitar el último cálculo si el valor de  $R_r$  se almacena cuando se introduce inicialmente; para luego recordarlo y dividirse por  $\sin \alpha$ . (Ver también la llamada de pie de página en la número 30.)



## PROBLEMAS

**2.14** Una fuerza de 2.5 kN se aplica por medio de un cable al soporte como se indica en la figura. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de esta fuerza?

**2.15** El cilindro hidráulico  $GE$  ejerce sobre el miembro  $DF$  una fuerza  $P$  dirigida a lo largo de la línea  $GE$ . Sabiendo que  $P$  debe tener una componente perpendicular al elemento  $DF$  de 600 N, determinar la magnitud de  $P$  y de su componente paralela a  $DF$ .

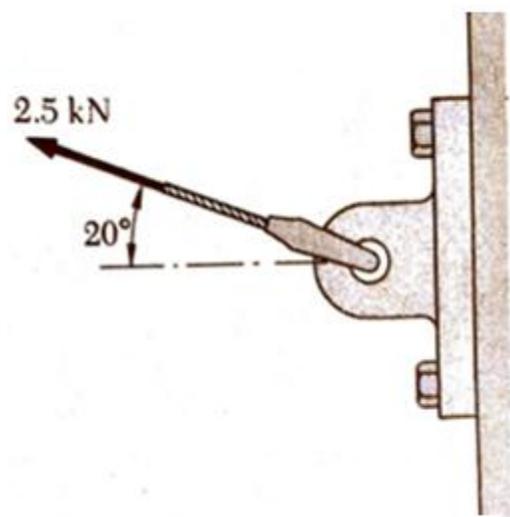


Fig. P2.14

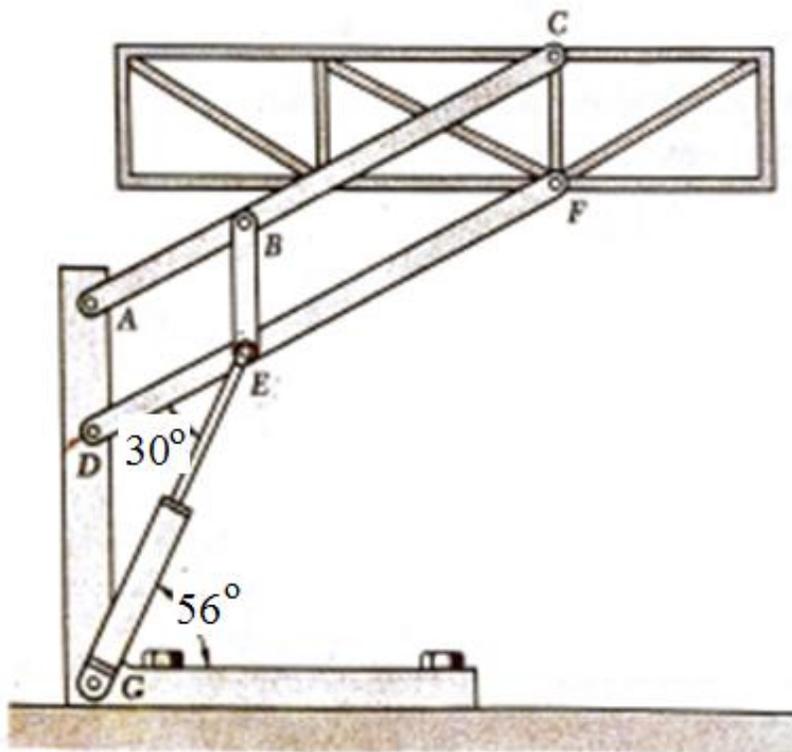
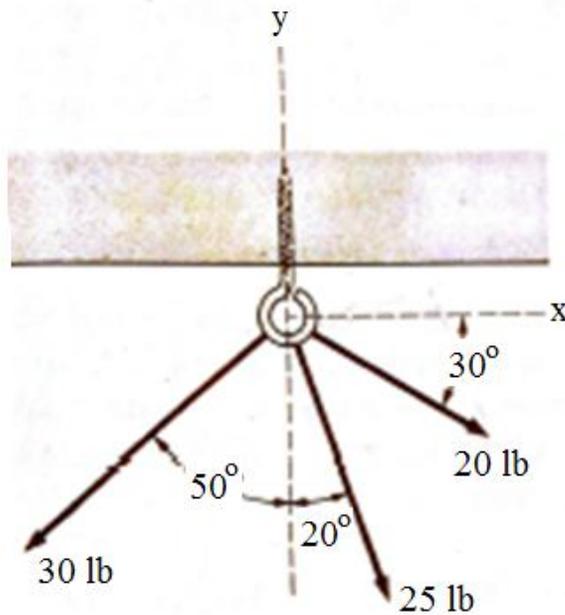


Fig. P2.15

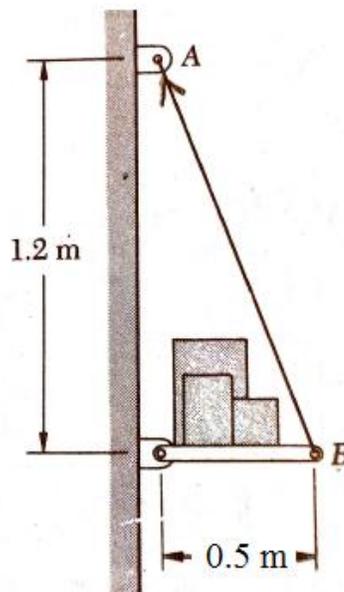
**2.16** Determinar las componentes  $x$  y  $y$  de cada una de las fuerzas mostradas.



**Fig. P2.16 y P2.17**

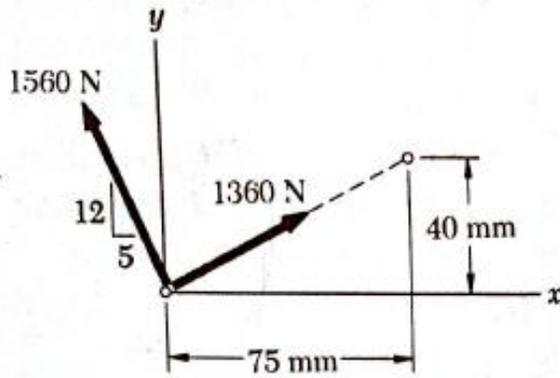
**2.17** Determinar por separado las componentes de las fuerzas de 20 lb y de 30 lb, en las direcciones paralela y perpendicular a la línea de acción de la fuerza de 25 lb.

**2.18** La tensión en el cable del soporte  $AB$  es 650 N. Determinar las componentes horizontal y vertical de la fuerza que actúa sobre el pasador en  $A$ .



**Fig. P2.18**

**2.19** Determinar las componentes  $x$  y  $y$  de cada una de las fuerzas mostradas en la figura.



**Fig. P2.19**

**2.20 y 2.21** Las componentes de la fuerza  $F$  se indican en la figura. Determinar la magnitud y dirección de la fuerza  $F$ .



**Fig. P2.20**



**Fig. P2.21**

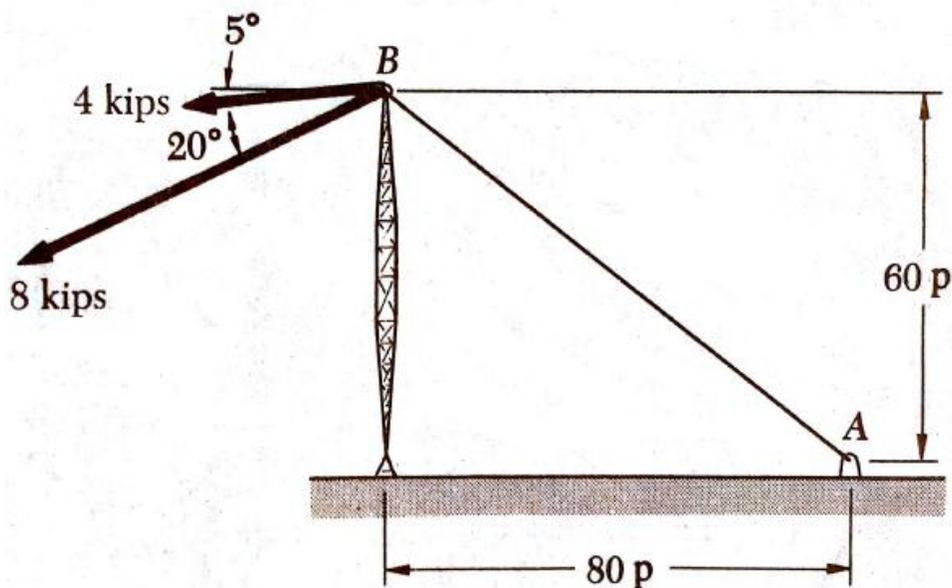
**2.22** Determinar la resultante de las tres fuerzas del problema 2.16.

**2.23** Determinar la resultante de las dos fuerzas del problema 2.19.

**2.24** Resolver el problema 2.2, empleando las componentes  $x$  y  $y$ .

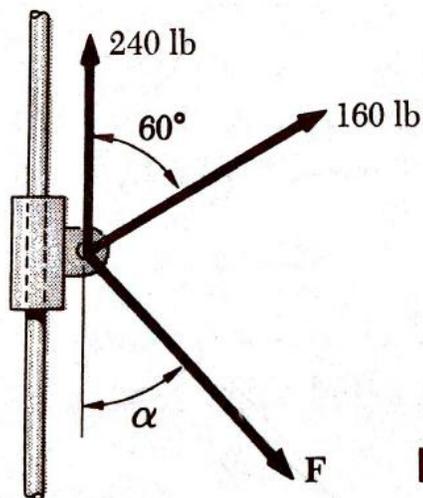
**2.25** Resolver el problema 2.3, utilizando las componentes  $x$  y  $y$ .

**2.26** Dos cables que ejercen tensiones conocidas se sujetan al punto  $B$ . Un tercer cable  $AB$ , que se usa como tirante, se sujeta también en  $B$ . Determinar la tensión requerida en  $AB$  para que la resultante de las fuerzas ejercidas por los tres cables sea vertical.



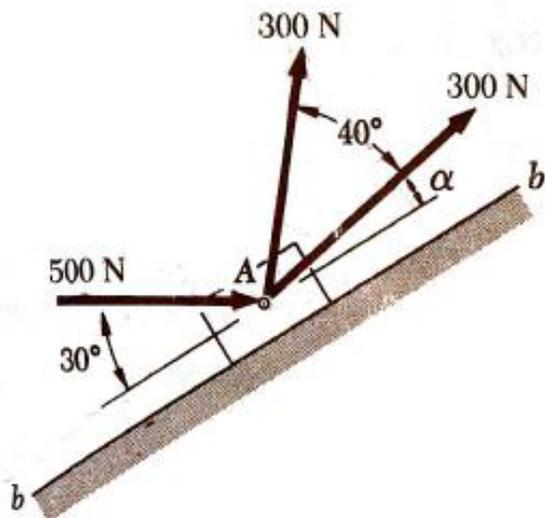
**Fig. P2.26**

**2.27** Un collar que puede deslizarse sobre una varilla vertical está sometido a la acción de las tres fuerzas mostradas. La dirección de la fuerza  $F$  puede variar. Si es posible, determinar la dirección de la fuerza  $F$  para que la resultante de las tres fuerzas sea horizontal, si se sabe que la magnitud de  $F$  es: (a) 480 lb, (b) 280 lb.



**Fig. P2.27**

**2.28** Las direcciones de las fuerzas de 300 N pueden variar, pero el ángulo entre ellas es siempre de  $40^\circ$ . Determinar el valor de  $\alpha$  para el cual la resultante de las fuerzas que actúan en  $A$  sea paralela al plano  $b-b$ .



**Fig. P2.28**

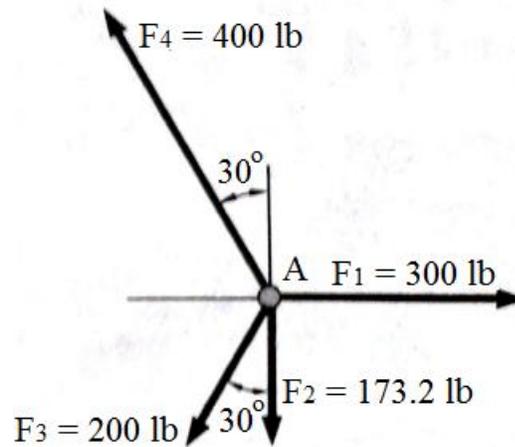
- 2.14**  $-2.35\text{ kN}, +0.855\text{ kN}.$
- 2.16** (20 lb)  $+17.32\text{ lb}, -10\text{ lb};$   
 (25 lb)  $+8.55\text{ lb}, -23.5\text{ lb};$   
 (30 lb)  $-23.0\text{ lb}, -19.28\text{ lb}.$   
 SI: (20 lb)  $+77.0\text{ N}, -44.5\text{ N};$   
 (25 lb)  $+38.0\text{ N}, -104.5\text{ N};$   
 (30 lb)  $-102.3\text{ N}, -85.8\text{ N}.$
- 2.18**  $+250\text{ N}, -600\text{ N}.$
- 2.20**  $200\text{ lb} \nearrow 4.3^\circ.$  SI:  $890\text{ N} \nearrow 4.3^\circ.$
- 2.22**  $52.9\text{ lb} \searrow 86.9^\circ$  SI:  $235\text{ N} \searrow 86.9^\circ.$
- 2.26**  $14.04\text{ kips}.$  SI:  $62.5\text{ kN}.$
- 2.28**  $6.3^\circ$  y  $133.7^\circ.$

**2.8. Equilibrio de una partícula.** En las secciones anteriores se discutieron los métodos para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque esto no ha ocurrido en ninguno de los problemas considerados hasta ahora, es muy posible que la resultante sea cero. En tal caso, el efecto de las fuerzas dadas es cero y se dice que la partícula está en equilibrio. Tenemos entonces la siguiente definición: *Cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero. la partícula está en equilibrio.*

Una partícula sobre la cual actúan dos fuerzas estará en equilibrio si las dos fuerzas tienen la misma longitud, la misma línea de acción, y sentido opuesto. La resultante de las dos fuerzas es entonces cero. Tal caso se ilustra en la figura 2.26.

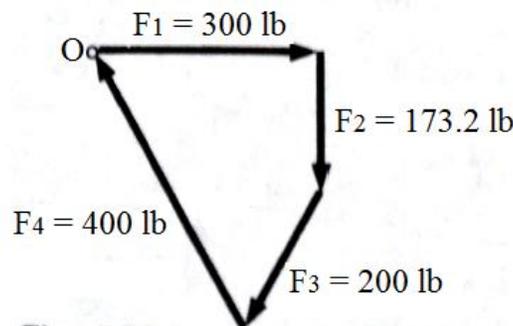


**Fig. 2.26**



**Fig. 2.27**

Otro caso de equilibrio de una partícula se representa en la figura 2.27, donde actúan cuatro fuerzas sobre *A*. En la figura 2.28 se determina mediante el método del polígono la resultante de varias fuerzas. Comenzando en el punto *O* con  $F_1$ , se disponen las fuerzas una a continuación de otra y se encuentra que el extremo de



**Fig. 2.28**

$F_4$  coincide con el punto inicial  $O$ . Así, la resultante  $R$  del sistema de fuerzas considerado es cero y la partícula se encuentra en equilibrio.

El dibujo del polígono cerrado en la figura 2.28 es una representación *gráfica* del equilibrio de  $A$ . Para expresar *algebraicamente* las condiciones de equilibrio de una partícula, escribimos

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0$$

Descomponiendo la fuerza  $\mathbf{F}$  en sus componentes rectangulares, tenemos

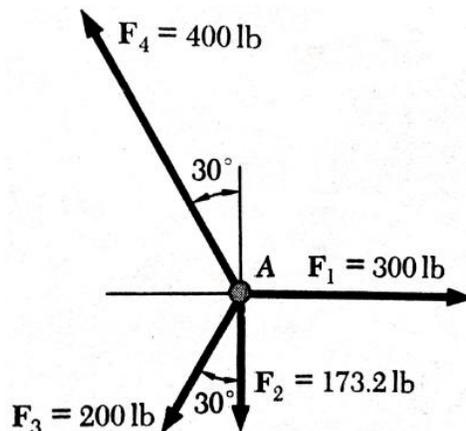
$$\Sigma(F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = 0 \quad \text{o} \quad (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} = 0$$

Concluimos que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Volviendo a la partícula mostrada en la figura 2.28 verificamos que se satisfacen las condiciones de equilibrio. Escribimos

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \text{ sen } 30^\circ - (400 \text{ lb}) \text{ sen } 30^\circ \\ &= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0 \\ \Sigma F_y &= -173.2 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \text{ cos } 30^\circ + (400 \text{ lb}) \text{ cos } 30^\circ \\ &= -173.2 \text{ lb} - 173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$



**Fig. 2.27 (repetida)**

**2.9. Primera ley de Newton del movimiento.** A fines del siglo XVII, Sir Isaac Newton formuló tres leyes sobre las cuales se fundamenta la mecánica. La primera de estas leyes se puede establecer como sigue:

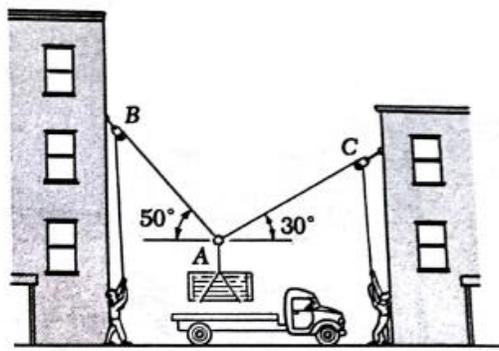
*Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).*

De esta ley y de la definición de equilibrio dada en la sección 2.8, puede verse que una partícula en equilibrio, o está en reposo o está moviéndose en línea recta con velocidad constante. En la sección siguiente consideraremos varios problemas relativos al equilibrio de una partícula.

**2.10 Problemas que involucran el equilibrio de una partícula. Diagrama de cuerpo libre.** En la práctica, un problema de mecánica en ingeniería proviene de una situación física real. Un esquema que muestre las condiciones físicas del problema se conoce como *diagrama espacial*.

Los métodos de análisis discutidos en las secciones anteriores se aplican a sistemas de fuerzas que actúan sobre una partícula. Sin embargo, un gran número de problemas sobre estructuras reales pueden reducirse a problemas que conciernen al equilibrio de una partícula. Esto se hace seleccionando una partícula significativa en una estructura y haciendo un diagrama separado que muestre la partícula y todas las fuerzas que actúan sobre ella. Tal diagrama se denomina *diagrama de cuerpo libre*.

Como un ejemplo, consideramos la caja de 25 kg mostrada en el diagrama espacial de la figura 2.29a. La caja está entre dos edificios y se está elevando para colocarla sobre un camión que la transportará. La caja es sostenida por un cable vertical unido en *A* a dos cuerdas que pasan por poleas colocadas en *B* y *C*. Se desea determinar la tensión en cada una de las cuerdas *AB* y *AC*.



(a) Diagrama espacial

Para resolver este problema, hacemos un diagrama de cuerpo

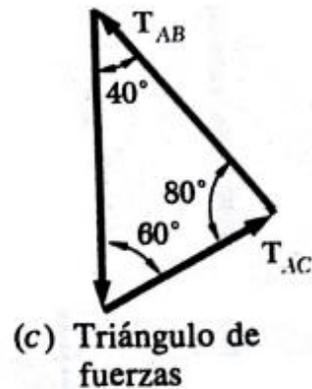
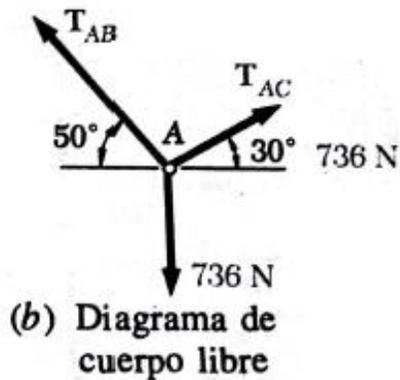


Fig. 2.29

libre que muestre una partícula en equilibrio. Como existe interés en calcular las tensiones de las cuerdas, el diagrama de cuerpo libre debe incluir al menos una de las tensiones y, si es posible, ambas. El punto  $A$  parece ser en este problema una buena referencia para el diagrama de cuerpo libre. En la figura 2.29b se hace el diagrama de cuerpo libre para el punto  $A$ . En este diagrama se representan tanto el punto  $A$  como las fuerzas ejercidas sobre  $A$  por el cable vertical y las dos cuerdas. La fuerza ejercida por el cable se dirige hacia abajo y es igual al peso  $W$  de la caja. Recordando la ecuación (1.4) escribimos

$$W = mg = (75 \text{ kg}) (9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

y colocamos tal valor en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen. Llamando  $T_{AB}$  y  $T_{AC}$  las tensiones en las cuerdas  $AB$  y  $AC$  respectivamente, las dibujamos luego desde  $A$  en las direcciones mostradas en el diagrama espacial. No se incluyen más detalles en el diagrama de cuerpo libre.

Puesto que el punto  $A$  está en equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre él deben formar un triángulo cerrado cuando se dibujan una a continuación de la otra. Este *triángulo de fuerzas* se ha dibujado en la figura 2.29c. Los valores  $T_{AB}$  y  $T_{AC}$  de la tensión en las cuerdas pueden encontrarse gráficamente si el triángulo se dibuja a escala o pueden determinarse por trigonometría. Si, se escoge el segundo método de solución, y se usa la ley de los senos, podemos escribir

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ} \quad T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Cuando una partícula está en *equilibrio bajo la acción de tres fuerzas*, el problema siempre puede resolverse usando un triángulo de fuerzas. Cuando una partícula está en *equilibrio bajo la acción de más de tres fuerzas*, el problema puede resolverse gráficamente dibujando un polígono de fuerzas. Si se desea una solución analítica, se deberán resolver las *ecuaciones de equilibrio*, dadas en la sección 2.8:

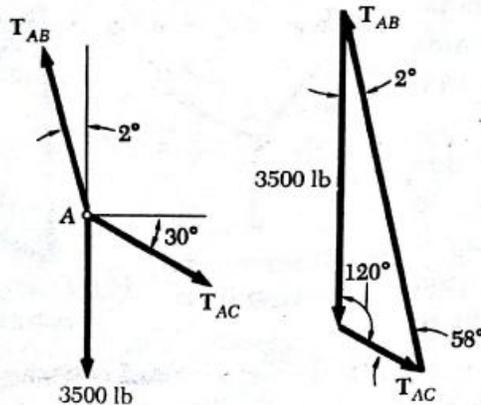
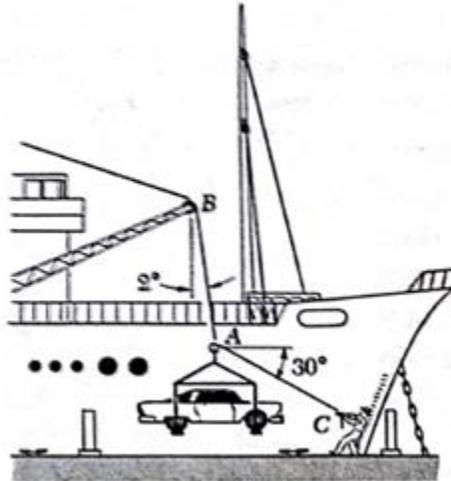
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones tendrán solución si no existen *más de dos incógnitas*; similarmente, el triángulo de fuerzas usado en el caso de equilibrio bajo la acción de tres fuerzas puede resolverse para dos incógnitas.

Los tipos más comunes de problemas son aquellos en los cuales las dos incógnitas representan: (1) las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza, (2) la magnitud de dos fuerzas cuyas direcciones son conocidas. También se encuentran problemas que comprenden la determinación del valor máximo o mínimo de la magnitud de una fuerza (véanse los problemas 2.34, 2.35 y 2.36).

## PROBLEMA MODELO 2.4

En una operación de descargue de un barco se sostiene un automóvil de 3500 lb por un cable. Una cuerda es atada al cable en  $A$  y halada por un hombre con el fin de colocar el automóvil sobre la posición deseada. El ángulo entre el cable y la vertical es de  $2^\circ$ , y el ángulo entre la cuerda y la horizontal es de  $30^\circ$ . ¿Cuál es la tensión en la cuerda?



**Solución.** Escogemos el punto  $A$  como cuerpo libre, y dibujamos el diagrama completo de cuerpo libre.  $T_{AB}$  es la tensión en el cable  $AB$ , y  $T_{AC}$  es la tensión en la cuerda.

**Condición de equilibrio.** Como sólo tres fuerzas actúan sobre el cuerpo, dibujamos un triángulo de fuerzas para expresar que está en equilibrio. Podemos escribir, usando la ley de los senos,

$$\frac{T_{AB}}{\text{sen } 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\text{sen } 2^\circ} = \frac{3500 \text{ lb}}{\text{sen } 58^\circ}$$

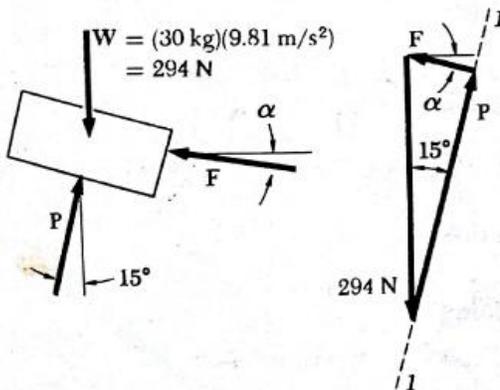
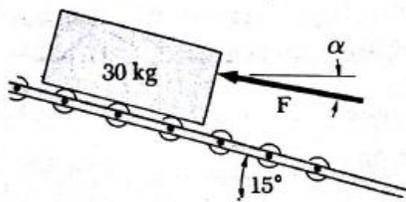
Con una *calculadora*, primero computamos y almacenamos el valor del último cociente. Multiplicando estos valores sucesivamente por  $\text{sen } 120^\circ$  y  $\text{sen } 2^\circ$ , obtenemos

$$T_{AB} = 3570 \text{ lb}$$

$$T_{AC} = 144 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

### PROBLEMA MODELO 2.5

Determinar la magnitud y dirección de la menor fuerza  $F$  que mantendrá en equilibrio a la caja mostrada en la figura. Observar que la fuerza ejercida por los rodillos sobre la caja es perpendicular al plano inclinado.



**Solución.** Escogemos la caja como cuerpo libre, considerando que puede ser tratada como una partícula. Dibujamos los diagramas respectivos de cuerpo libre.

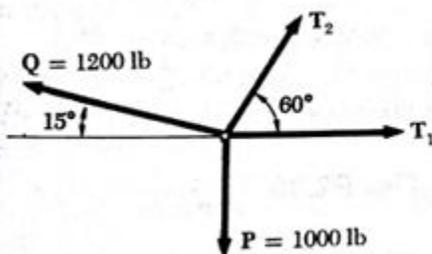
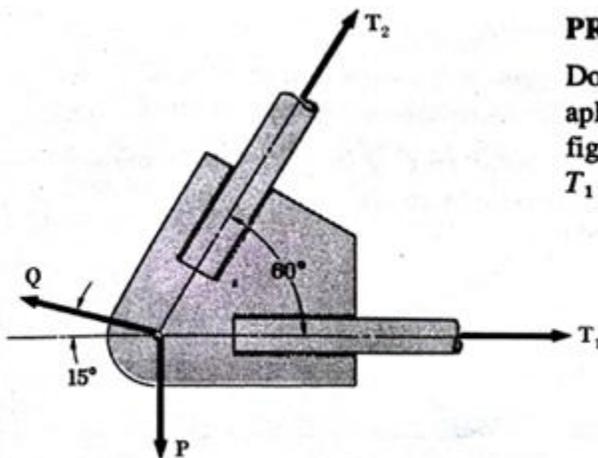
**Condición de equilibrio.** Como solamente tres fuerzas actúan sobre el cuerpo libre, dibujamos un triángulo de fuerzas para expresar que está en equilibrio. La línea  $l-l$  representa la dirección conocida de  $P$ . Con el fin de obtener el mínimo valor de la fuerza  $F$ , escogemos la dirección de  $F$  perpendicular a la de  $P$ . A partir de la geometría del triángulo obtenido, encontramos

$$F = (294 \text{ N}) \operatorname{sen} 15^\circ = 76.1 \text{ N} \quad \alpha = 15^\circ$$

$$F = 76.1 \text{ N} \searrow 15^\circ \quad \blacktriangleleft$$

### PROBLEMA MODELO 2.6

Dos fuerzas  $P$  y  $Q$  de magnitudes  $P = 1000 \text{ lb}$  y  $Q = 1200 \text{ lb}$  se aplican a la conexión (utilizada en aviones) y que se muestra en la figura. Si la conexión está en equilibrio, determinar las tensiones  $T_1$  y  $T_2$ .



**Solución.** Consideremos la conexión como una partícula y tomémosla como un cuerpo libre. Sobre ella actúan las cuatro fuerzas mostradas. Descompongamos cada una de ellas en sus componentes  $x$  y  $y$ .

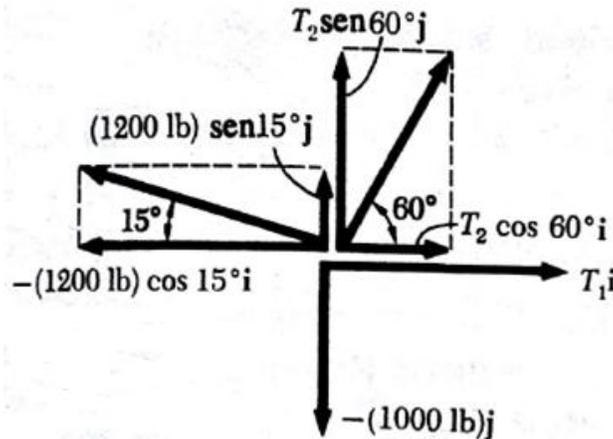
$$\begin{aligned} P &= -(1000 \text{ lb})\mathbf{j} \\ Q &= -(1200 \text{ lb}) \cos 15^\circ \mathbf{i} + (1200 \text{ lb}) \operatorname{sen} 15^\circ \mathbf{j} \\ &= -(1159 \text{ lb})\mathbf{i} + (311 \text{ lb})\mathbf{j} \\ T_1 &= T_1 \mathbf{i} \\ T_2 &= T_2 \cos 60^\circ \mathbf{i} + T_2 \operatorname{sen} 60^\circ \mathbf{j} \\ &= 0.500 T_2 \mathbf{i} + 0.866 T_2 \mathbf{j} \end{aligned}$$

**Condiciones de equilibrio.** Como la conexión está en equilibrio la resultante de las fuerzas debe ser cero. Entonces

$$R = P + Q + T_1 + T_2 = 0$$

Al sustituir  $P$ ,  $Q$ ,  $T_1$  y  $T_2$  por las expresiones obtenidas anteriormente y factorizando los vectores unitarios  $i$  y  $j$ , tenemos

$$(-1159 \text{ lb} + T_1 + 0.500 T_2)i + (-1000 \text{ lb} + 311 \text{ lb} + 0.866 T_2)j = 0$$



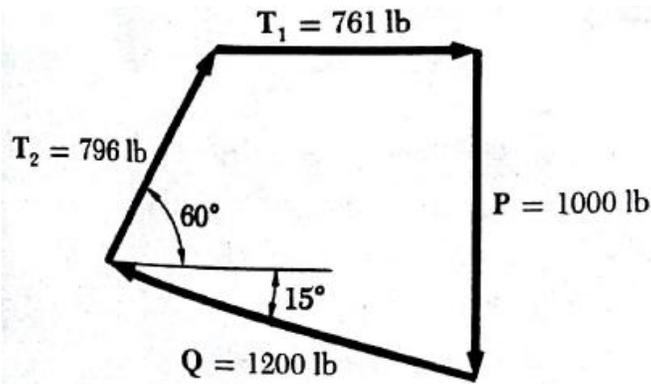
Esta ecuación se satisface, si y sólo si, los coeficientes de  $i$  y  $j$  son iguales a cero. Obtenemos entonces las dos ecuaciones siguientes que expresan, respectivamente, que la suma de las componentes de  $x$  y la suma de las componentes de  $y$  de las fuerzas dadas deben ser cero.

$$\begin{aligned} (\Sigma F_x = 0:) & \quad -1159 \text{ lb} + T_1 + 0.500 T_2 = 0 \\ (\Sigma F_y = 0:) & \quad -1000 \text{ lb} + 311 \text{ lb} + 0.866 T_2 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones, hallamos

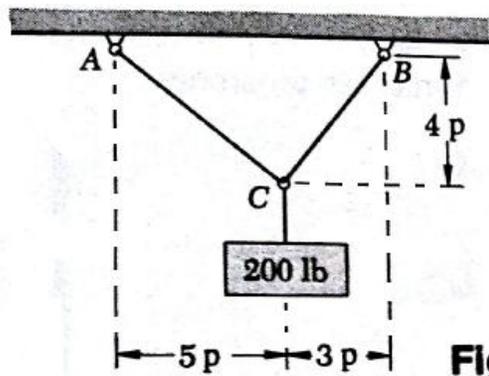
$$T_1 = 761 \text{ lb} \quad T_2 = 796 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre, suponemos una dirección para cada fuerza desconocida. El signo positivo en la respuesta indica que el sentido supuesto es correcto. El polígono de fuerzas completo puede dibujarse para comprobar los resultados.

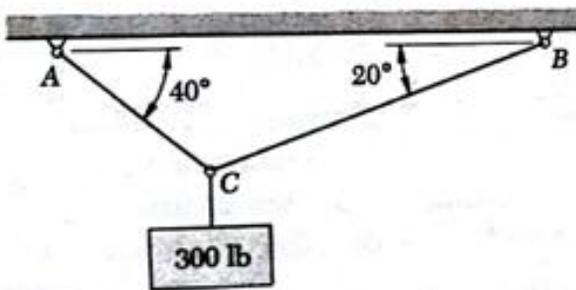


**PROBLEMAS**

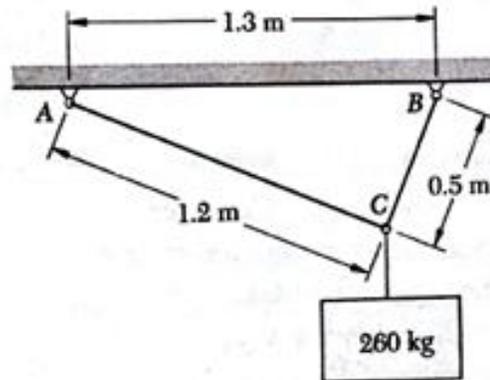
2.30 a 2.33 Dos cables están unidos en *C* y cargados tal como se indica en las figuras. Determinar la tensión en *AC* y *BC*.



**Fig. P2.30**



**Fig. P2.31**



**Fig. P2.32**

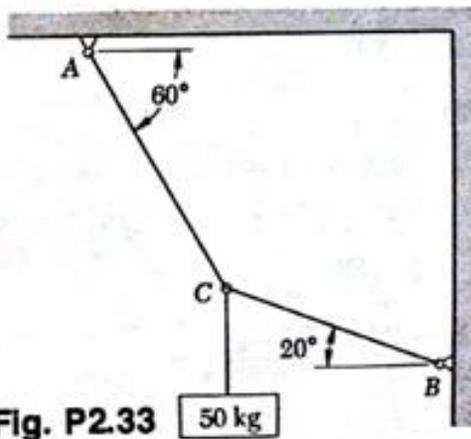


Fig. P2.33

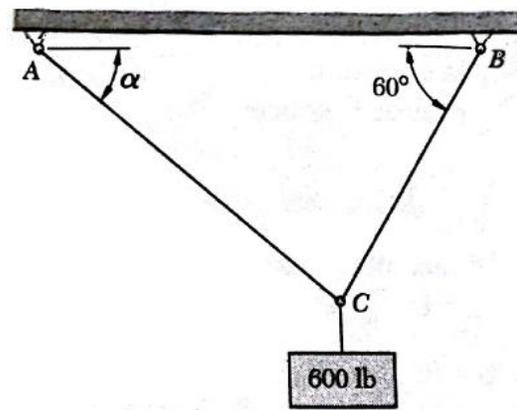


Fig. P2.34 y P2.35

2.34 Se suspende un bloque de 600 lb mediante dos cables  $AB$  y  $BC$ . (a) Determinar el valor de  $\alpha$  para que la tensión en el cable  $AC$  sea mínima. (b) ¿Cuáles son los valores correspondientes de las tensiones en los cables  $AC$  y  $BC$ ?

2.35 Se suspende un bloque de 600 lb mediante dos cables  $AB$  y  $BC$ . Determinar (a) el valor de  $\alpha$  para que en el cable de mayor longitud la tensión sea mínima, (b) los correspondientes valores de tensión en los cables  $AB$  y  $BC$ .

2.36 Dos cuerdas están unidas en  $C$ . Si la máxima tensión admisible en cada cuerda es 25 kN, ¿cuál es la máxima fuerza  $F$  que puede aplicarse? ¿En qué dirección debe actuar esta fuerza máxima?

2.37 La fuerza  $P$  se aplica a una pequeña polea que se desliza sobre el cable  $ACB$ . Conociendo que la tensión en ambos lados del cable es 750 N, determinar la magnitud y dirección de  $P$ .

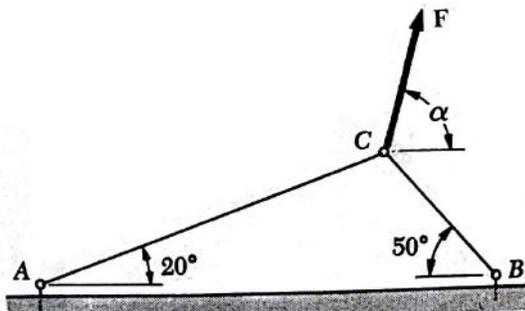


Fig. P2.36

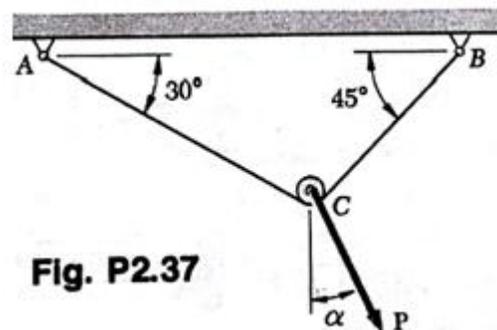
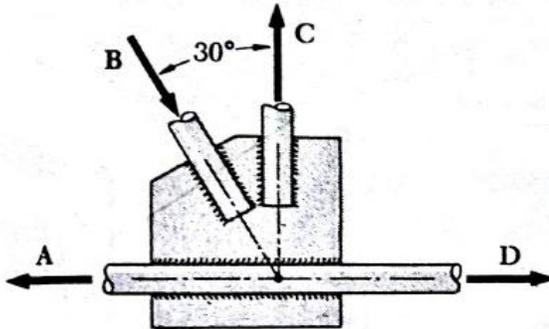


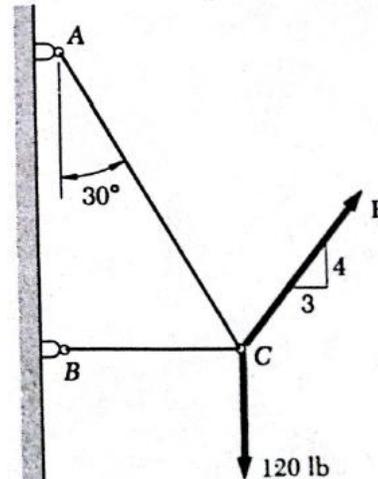
Fig. P2.37

2.38 Dos fuerzas  $A$  y  $B$  de magnitudes  $A = 5000$  N y  $B = 2500$  N se aplican a la conexión mostrada en la figura. Sabiendo que la conexión está en equilibrio, determinar las magnitudes de las fuerzas  $C$  y  $D$ .

**2.39** Dos fuerzas  $C$  y  $D$  de magnitudes  $C = 800$  lb y  $D = 1500$  lb son aplicadas a la conexión mostrada. Sabiendo que la conexión está en equilibrio, determinar las magnitudes de las fuerzas  $A$  y  $B$ .



**Fig. P2.38 y P2.39**

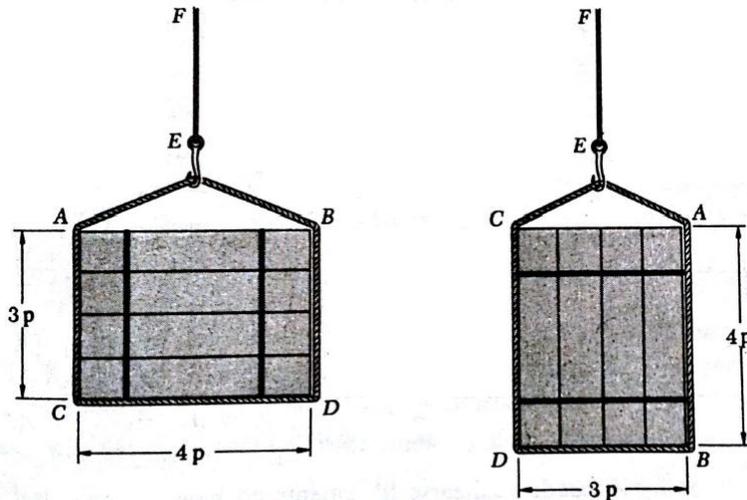


**Fig. P2.40 y P2.41**

**2.40** Conociendo que  $P = 100$  lb, determinar la tensión en los cables  $AC$  y  $BC$ .

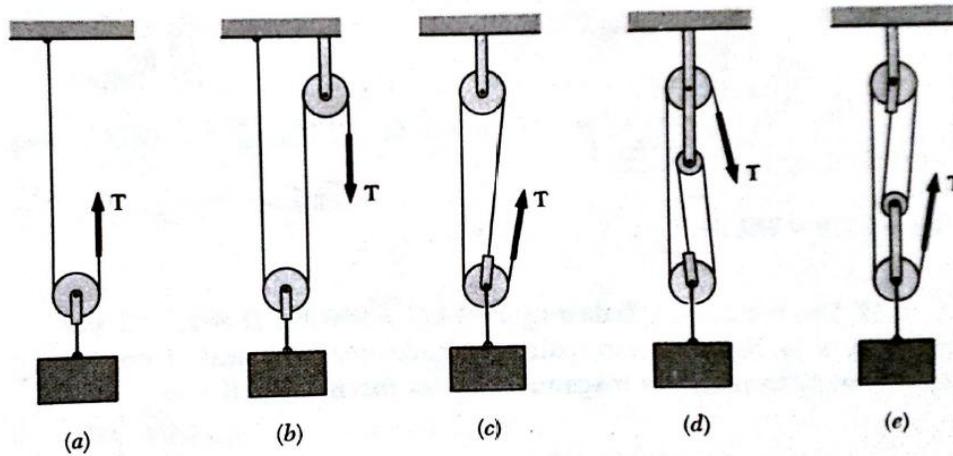
**2.41** Determinar el intervalo de valores de  $P$  para que ambos cables permanezcan tensionados.

**2.42** Con el fin de elevar una caja de 1200 lb, se arrolla alrededor de la caja un cable eslinga de 15 pies de longitud y se cuelga del cable  $EF$ . Determinar la tensión en el cable eslinga en cada uno de los casos mostrados.



**Fig. P2.42**

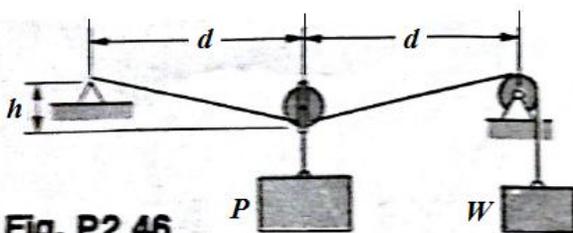
**2.43** Una carga de 200 kg es sostenida de diferentes maneras por cuerdas y poleas, como se muestra en la figura. Determinar en cada caso la tensión en la cuerda. (La tensión en la cuerda es la misma en ambos lados de una polea simple. Esto puede demostrarse mediante los métodos del capítulo 4.)



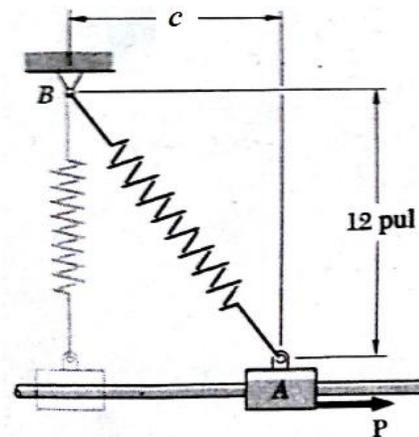
**Fig. P2.43**

**2.44** Resolver las partes *b* y *d* del problema 2.43 suponiendo que el extremo libre de la cuerda está atado a la carga.

**2.46** Si en el esquema mostrado  $W = 80$  lb,  $P = 10$  lb y  $d = 20$  pul, determinar el valor de  $h$  para que haya equilibrio.



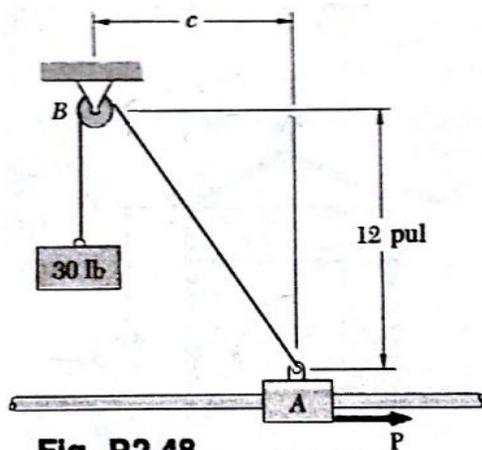
**Fig. P2.46**



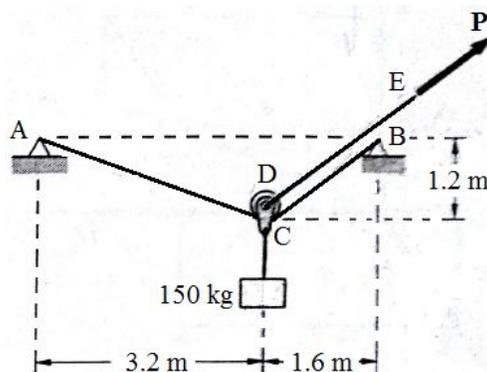
**Fig. P2.47**

**2.47** El collar *A* puede deslizarse libremente en la barra horizontal lisa. El resorte atado al collar tiene una constante de 10 lb/pul y no está deformado cuando el collar se encuentra directamente debajo del soporte *B*. Determinar la magnitud de la fuerza *P* necesaria para mantener el equilibrio cuando: (a)  $c = 9$  pul, (b)  $c = 16$  pul.

**2.48** El collar  $A$  puede deslizarse libremente en la barra horizontal lisa. Determinar la magnitud de la fuerza  $P$  necesaria para mantener el equilibrio cuando: (a)  $c = 9$  pul, (b)  $c = 16$  pul.



**Fig. P2.48**



**Fig. P2.49**

**2.49** Una carga de 150 kg se suspende de una pequeña polea que puede rodar sobre el cable  $ACB$ . La polea y la carga están sostenidas en la posición indicada por un segundo cable  $DE$  que es paralelo a la parte  $CB$  del primer cable. Determinar: (a) la tensión en el cable  $ACB$ , (b) la tensión en el cable  $DE$ . Despreciar el radio de la polea y el peso de los cables.

### RESPUESTA DE LOS PROBLEMAS PARES

**2.30**  $T_{AC} = 120.1$  lb;  $T_{BC} = 156.3$  lb.

SI:  $T_{AC} = 534$  N;  $T_{BC} = 695$  N.

**2.32**  $T_{AC} = 981$  N;  $T_{BC} = 2350$  N.

**2.34** (a)  $30^\circ$ . (b)  $T_{AC} = 300$  lb;  $T_{BC} = 520$  lb.

SI: (b)  $T_{AC} = 1334$  N;  $T_{BC} = 2310$  N.

**2.36**  $F = 2.87$  kN;  $\alpha = 75^\circ$ .

**2.38**  $C = 2170$  N;  $D = 3750$  N.

**2.40**  $T_{AC} = 46.2$  lb;  $T_{BC} = 36.9$  lb.

SI:  $T_{AC} = 206$  N;  $T_{BC} = 164.1$  N.

**2.42** (a) 1000 lb. (b) 907.12 lb.

SI: (a) 6.94 kN. (b) 6.13 kN.

**2.44** (b) 654 N. (d) 491 N.

**2.46** 1.252 pul SI: 31.8 mm.

**2.48** (a) 18 lb. (b) 24 lb.

SI: (a) 80.1 N. (b) 106.8 N.

## FUERZAS EN EL ESPACIO

### 2.12. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO

Los problemas considerados en la primera parte de este capítulo involucraron únicamente dos dimensiones y pudieron formularse y resolverse en un solo plano. En esta sección y en las secciones siguientes del capítulo se analizarán problemas que comprenden las tres dimensiones del espacio.

Considere una fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa en el origen  $O$  del sistema de coordenadas rectangulares  $x, y, z$ . Para definir la dirección de  $\mathbf{F}$ , se traza el plano vertical  $OBAC$  que contiene a  $\mathbf{F}$  y que se muestra en la figura 2.30a. Este plano pasa a través del eje vertical  $y$ ; su orientación

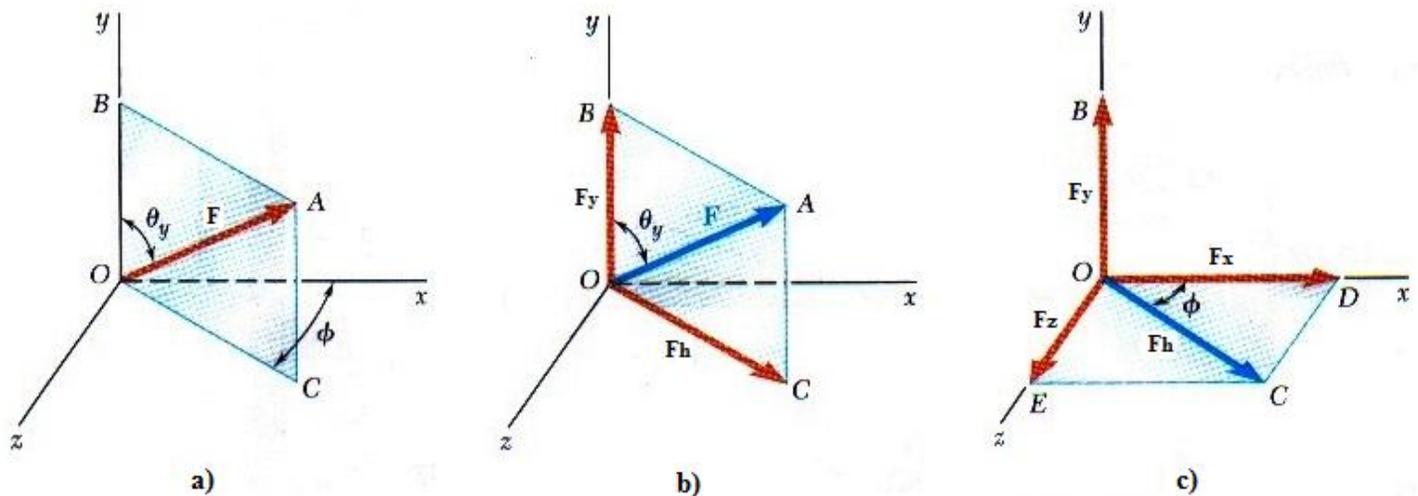


Figura 2.30

está definida por el ángulo  $\phi$  que forma con el plano  $xy$ , mientras que la dirección de  $\mathbf{F}$  dentro del plano está definida por el ángulo  $\theta_y$  que forma  $\mathbf{F}$  con el eje  $y$ . La fuerza  $\mathbf{F}$  puede descomponerse en una componente vertical  $F_y$  y una componente horizontal  $F_h$ ; esta operación, mostrada en la figura 2.30b, se realiza en el plano  $OBAC$  de acuerdo con las reglas desarrolladas en la primera parte del capítulo. Las componentes escalares correspondientes son

$$F_y = F \cos \theta_y \quad F_h = F \sin \theta_y \quad (2.16)$$

La  $\mathbf{F}_h$  puede separarse en sus dos componentes rectangulares  $\mathbf{F}_x$  y  $\mathbf{F}_z$  a lo largo de los ejes  $x$  y  $z$ , respectivamente. Esta operación, mostrada en la figura 2.30c, se realiza en el plano  $xz$ . De esta manera se obtienen las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \\ F_z &= F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

La fuerza  $\mathbf{F}$  se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  y  $\mathbf{F}_z$ , dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos  $OAB$  y  $OCD$  de la figura 2.30, se escribe

$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

Si se eliminan  $F_h^2$  de estas dos ecuaciones y se resuelve para  $F$  se obtiene la siguiente relación entre la magnitud de  $\mathbf{F}$  y sus componentes rectangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

La relación que existe entre la fuerza  $\mathbf{F}$  y sus tres componentes  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  y  $\mathbf{F}_z$  se presenta más fácil si se traza “una caja” que tiene por aristas  $\mathbf{F}_x$ ,  $\mathbf{F}_y$  y  $\mathbf{F}_z$ , como se muestra en la figura 2.31. La fuerza  $\mathbf{F}$  está representada por la diagonal  $OA$  de esta caja. La figura 2.31b muestra el triángulo rectángulo  $OAB$  empleado para deducir la primera de las fórmulas (2.16):  $F_y = F \cos \theta_y$ . En las figuras 2.31a y c se han trazado otros dos triángulos rectángulos: el  $OAD$  y  $OAE$ . Éstos ocupan posiciones semejantes a la del triángulo  $OAB$ . Si representamos por  $\theta_x$  y  $\theta_z$  los ángulos que forma  $\mathbf{F}$  con los ejes  $x$  y  $z$ , respectivamente, se pueden escribir dos fórmulas semejantes a  $F_y = F \cos \theta_y$ . Entonces se escribe

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Los tres ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  definen la dirección de la fuerza  $\mathbf{F}$ ; y son más usados que los ángulos  $\theta_y$  y  $\phi$  introducidos al comienzo de esta sección. Los cosenos de  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  se conocen como los *cosenos directores* de la fuerza  $\mathbf{F}$ .

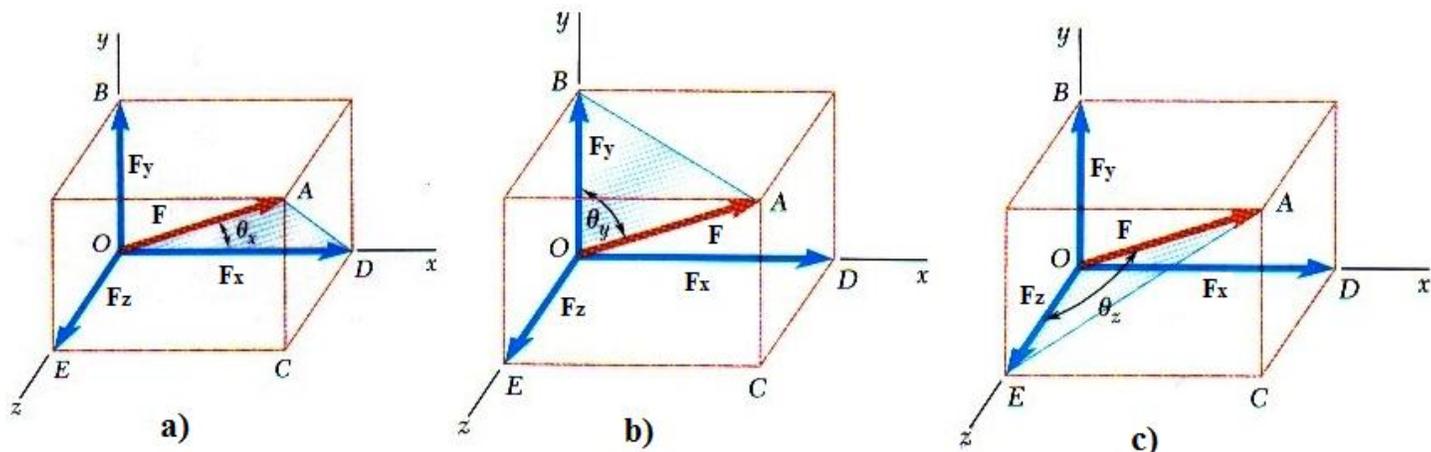


Figura 2.31

Con el uso de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , dirigidos a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente (figura 2.32), se puede expresar  $\mathbf{F}$  en la forma

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

donde las componentes escalares  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  están definidas por las relaciones (2.19).

**Ejemplo 1.** Una fuerza de 500 N forma ángulos de  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $120^\circ$  con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Encuentre las componentes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  de la fuerza.

Sustituyendo  $F = 500$  N,  $\theta_x = 60^\circ$ ,  $\theta_y = 45^\circ$  y  $\theta_z = 120^\circ$  en las fórmulas (2.19), se escribe

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N}$$

$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N}$$

Usando en la ecuación (2.20) los valores obtenidos para las componentes escalares de  $\mathbf{F}$ , se tiene

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

Como en el caso de los problemas en dos dimensiones, el signo positivo indica que la componente tiene el mismo sentido que el eje correspondiente y el signo negativo tiene el sentido opuesto.

El ángulo que una fuerza  $\mathbf{F}$  forma con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje  $y$  estará siempre comprendido entre  $0$  y  $180^\circ$ . Un ángulo  $\theta_x$  menor que  $90^\circ$  (agudo) indica que  $\mathbf{F}$  (que se supone unida al origen) está del mismo lado del plano  $yz$  que el eje  $x$  positivo, y  $\cos \theta_x$  y  $F_x$  serán positivos. Un ángulo  $\theta_x$  mayor que  $90^\circ$  (obtuso) indicará que  $\mathbf{F}$  está al otro lado del plano  $yz$ ; entonces,  $\cos \theta_x$  y  $F_x$  serán negativos. En el ejemplo 1 los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_y$  son agudos, mientras que  $\theta_z$  es obtuso; en consecuencia,  $F_x$  y  $F_y$  son positivos, mientras que  $F_z$  es negativo.

Si se sustituye en la ecuación (2.20) las expresiones obtenidas para  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  en (2.19), se escribe

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

que muestra que la fuerza  $\mathbf{F}$  puede expresarse como el producto del escalar  $F$  y del vector

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

El vector  $\boldsymbol{\lambda}$  es evidentemente un vector de magnitud 1 y de la misma dirección que  $\mathbf{F}$  (figura 2.33). El *vector unitario*  $\boldsymbol{\lambda}$  se refiere al largo de la línea de acción de  $\mathbf{F}$ . De (2.22) se deduce que las componentes del vector unitario  $\boldsymbol{\lambda}$  son, respectivamente, iguales a los cosenos directores de la línea de acción de  $\mathbf{F}$ :

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (2.23)$$

Se debe observar que los valores de los tres ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  no son independientes. Expresando que la suma de los cuadrados de las componentes de  $\boldsymbol{\lambda}$  es igual al cuadrado de su magnitud, se escribe

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

o sustituyendo para  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  y  $\lambda_z$  de (2.23),

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

En el ejemplo 1 se muestra que una vez que se han seleccionado los valores  $\theta_x = 60^\circ$  y  $\theta_y = 45^\circ$  el valor de  $\theta_z$  *debe* ser igual a  $60$  o  $120^\circ$  para satisfacer la identidad (2.24).

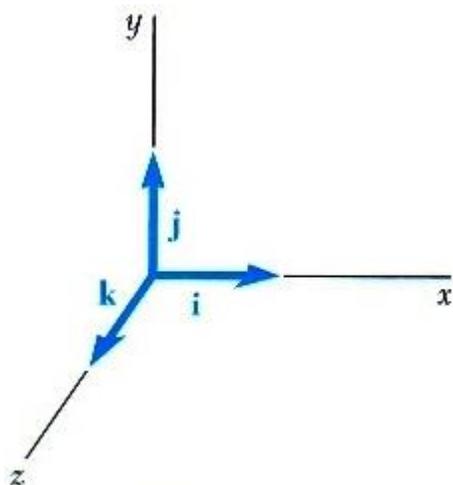


Figura 2.32

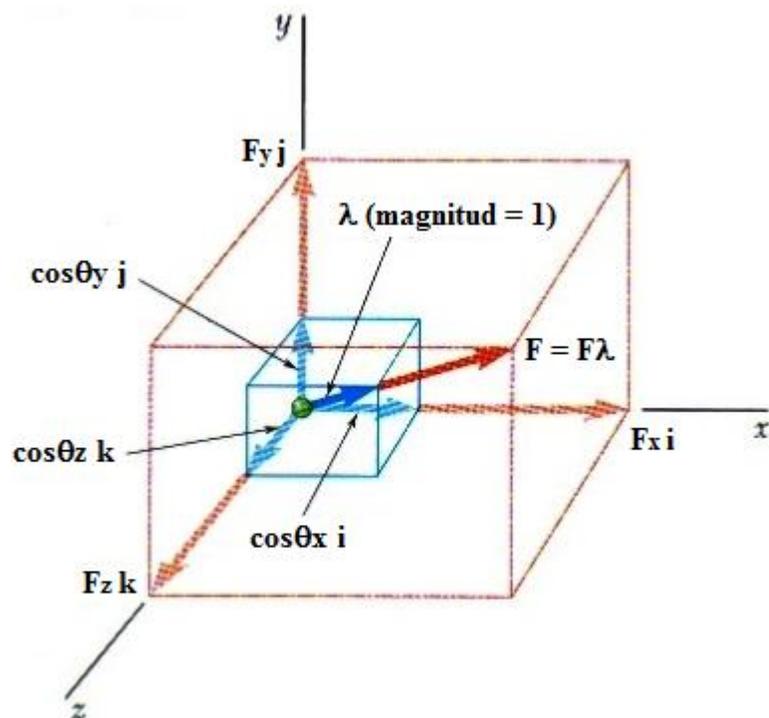


Figura 2.33

Cuando las componentes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  de una fuerza  $\mathbf{F}$  están dadas, la magnitud  $F$  de la fuerza se obtiene de (2.18). Entonces las relaciones (2.19) pueden resolverse para los cosenos directores,

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

y obtener los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que caracterizan a la dirección de  $\mathbf{F}$ .

**Ejemplo 2.** Una fuerza  $\mathbf{F}$  tiene las componentes  $F_x = 20$  lb,  $F_y = -30$  lb y  $F_z = 60$  lb. Determine la magnitud de  $F$  y los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma con los ejes coordenados.

A partir de la fórmula (2.18) se obtiene<sup>†</sup>

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20 \text{ lb})^2 + (-30 \text{ lb})^2 + (60 \text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4900} \text{ lb} = 70 \text{ lb} \end{aligned}$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de  $\mathbf{F}$  en las ecuaciones (2.25), se escribe

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}}$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 73.4^\circ \quad \theta_y = 115.4^\circ \quad \theta_z = 31.0^\circ$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora.

### 2.13. FUERZA DEFINIDA EN TÉRMINOS DE SU MAGNITUD Y DOS PUNTOS SOBRE SU LÍNEA DE ACCIÓN

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza  $\mathbf{F}$  está definida por las coordenadas de dos puntos  $M(x_1, y_1, z_1)$  y  $N(x_2, y_2, z_2)$ , localizadas sobre su línea de acción (figura 2.34). Considere el vector  $\overrightarrow{MN}$  que une

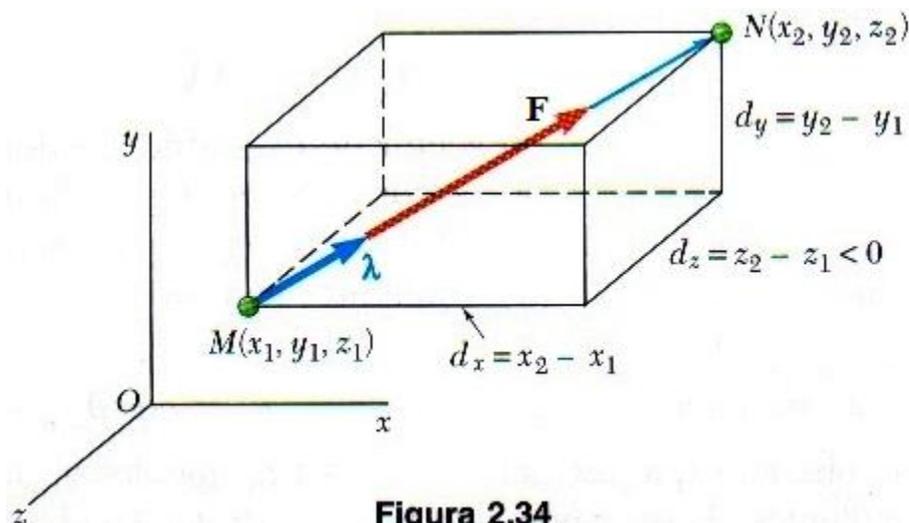


Figura 2.34

a  $M$  y  $N$  y tiene el mismo sentido que  $\mathbf{F}$ . Si se representan sus componentes escalares por  $d_x$ ,  $d_y$  y  $d_z$ , respectivamente, se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

El vector unitario  $\boldsymbol{\lambda}$  a lo largo de la línea de acción de  $\mathbf{F}$  (es decir a lo largo de la línea  $MN$ ) puede obtenerse al dividir el vector  $\overrightarrow{MN}$  entre su magnitud  $MN$ . Se sustituye para  $\overrightarrow{MN}$  de (2.26) y se observa que  $MN$  es igual a la distancia  $d$  de  $M$  a  $N$ , se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \quad (2.27)$$

†Con una calculadora programada para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares, se verá que el siguiente procedimiento resulta más expedito para calcular  $F$ : primero se determina  $F_h$  a partir de sus componentes rectangulares  $F_x$  y  $F_z$  (figura 2.30c), después se determina  $F$  a partir de sus componentes rectangulares  $F_h$  y  $F_y$  (figura 2.30b). El orden en que se introduzcan las tres componentes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  resulta intrascendente.

Es importante recordar que  $\mathbf{F}$  es igual al producto de  $F$  y  $\boldsymbol{\lambda}$ , por lo que se tiene

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de la cual se sigue que las componentes de  $\mathbf{F}$  son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Las relaciones (2.29) simplifican en forma considerable la determinación de las componentes de las fuerzas  $\mathbf{F}$  de magnitud  $F$  cuando la línea de acción de  $\mathbf{F}$  está definida por dos puntos  $M$  y  $N$ . Restando las coordenadas de  $\overline{M}$  de las de  $N$  se determinan primero las componentes del vector  $\overline{MN}$  y la distancia  $d$  de  $M$  a  $N$ :

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Sustituyendo los valores para  $F$  y para  $d_x$ ,  $d_y$ ,  $d_z$  y  $d$  en las relaciones (2.29), se obtienen las componentes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  de la fuerza.

Los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forman  $\mathbf{F}$  con los ejes coordenados pueden obtenerse de las ecuaciones (2.25). Comparando las ecuaciones (2.22) y (2.27) también se puede escribir

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (2.30)$$

y determinar los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  directamente de las componentes y la magnitud del vector  $\overline{MN}$ .

## 2.14. ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

La resultante  $\mathbf{R}$  de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.8 con fuerzas coplanares. Se establece que

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + R_z \mathbf{k} &= \Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}) \\ &= (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} + (\Sigma F_z) \mathbf{k} \end{aligned}$$

de la cual se desprende que

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

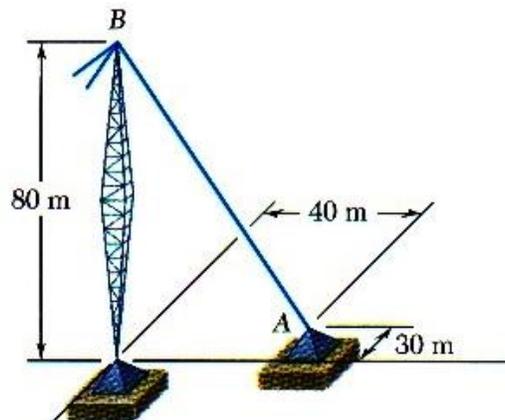
La magnitud de la resultante y los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que ésta forma con el eje de coordenadas se obtienen por el método de la sección 2.12. Se escribe

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.32)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.33)$$

### PROBLEMA RESUELTO 2.7

El alambre de una torre está anclado en  $A$  por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine  $a$ ) las componentes  $F_x$ ,  $F_y$  y  $F_z$  de la fuerza que actúa sobre el perno y  $b$ ) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que definen la dirección de la fuerza.



## SOLUCIÓN

**a) Componentes de la fuerza.** La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por  $A$  y  $B$  y la fuerza está dirigida de  $A$  hacia  $B$ . Las componentes del vector  $\overrightarrow{AB}$ , que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \quad d_y = +80 \text{ m} \quad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de  $A$  a  $B$  es

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overrightarrow{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario  $\boldsymbol{\lambda} = \overrightarrow{AB}/AB$ , se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} \overrightarrow{AB}$$

Si se sustituye la expresión encontrada para  $\overrightarrow{AB}$ , se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1\,060 \text{ N})\mathbf{i} + (2\,120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de  $\mathbf{F}$  son

$$F_x = -1\,060 \text{ N} \quad F_y = +2\,120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

**b) Dirección de la fuerza.** Con las ecuaciones (2.25), se escribe

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

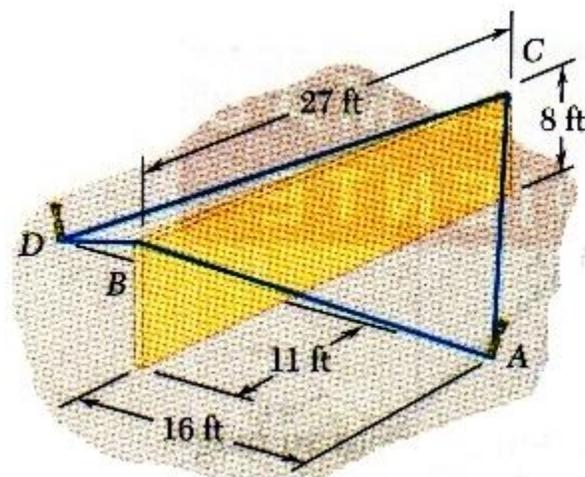
Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1^\circ \quad \theta_y = 32.0^\circ \quad \theta_z = 71.5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

(Nota: El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector  $\overrightarrow{AB}$  en lugar de la fuerza  $\mathbf{F}$ .)

## PROBLEMA RESUELTO 2.8

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable  $AB$  y 1 200 lb en el cable  $AC$ , determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables  $AB$  y  $AC$  sobre la estaca  $A$ .



## SOLUCIÓN

**Componentes de las fuerzas.** La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca  $A$  se descompondrá en sus componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , midiéndolos desde  $A$  hacia la sección de la pared. Si se representa por  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} & AB &= 21 \text{ ft} \\ \overrightarrow{AC} &= -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} & AC &= 24 \text{ ft}\end{aligned}$$

Al representar por  $\lambda_{AB}$  al vector unitario a lo largo de la línea  $AB$ , se tiene

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

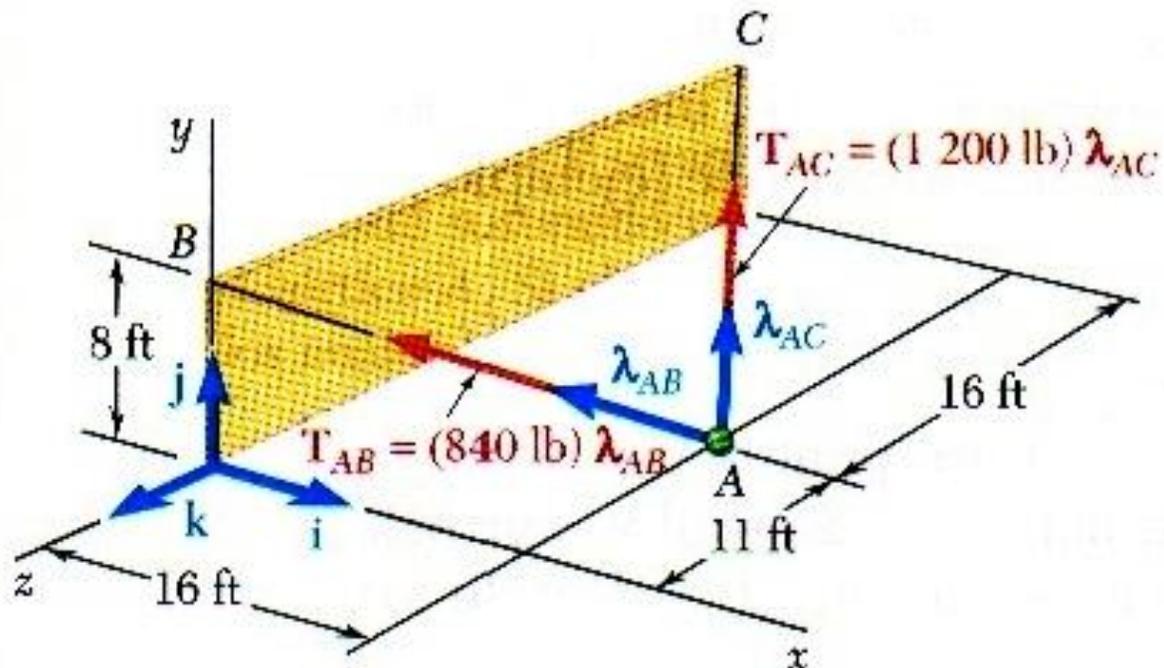
Al sustituir la expresión encontrada para  $\overrightarrow{AB}$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{AB} &= \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}[-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}] \\ \mathbf{T}_{AB} &= -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Si se representa con  $\lambda_{AC}$  al vector unitario a lo largo de  $AC$ , se obtiene en forma semejante

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = T_{AC} \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\,200 \text{ lb}}{24 \text{ ft}} \overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = -(800 \text{ lb})\mathbf{i} + (400 \text{ lb})\mathbf{j} - (800 \text{ lb})\mathbf{k}$$



**Resultante de las fuerzas.** La resultante  $\mathbf{R}$  de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\,440 \text{ lb})\mathbf{i} + (720 \text{ lb})\mathbf{j} - (360 \text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\,440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1\,650 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

De las ecuaciones (2.33) se obtiene

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\,440 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8^\circ \quad \theta_y = 64.1^\circ \quad \theta_z = 102.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$

# Problemas

**2.73** Para estabilizar un árbol arrancado parcialmente durante una tormenta, se le amarran los cables  $AB$  y  $AC$  a la parte alta del tronco y después se fijan a barras de acero clavadas en el suelo. Si la tensión en el cable  $AB$  es de 950 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este cable sobre el árbol, *b*) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza en  $A$  con los ejes paralelos a los ejes coordenados.

**2.74** Para estabilizar un árbol arrancado parcialmente durante una tormenta, se le amarran los cables  $AB$  y  $AC$  a la parte alta del tronco y después se fijan a barras de acero clavadas en el suelo. Si la tensión en el cable  $AC$  es de 810 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este cable sobre el árbol, *b*) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza en  $A$  con los ejes paralelos a los ejes coordenados.

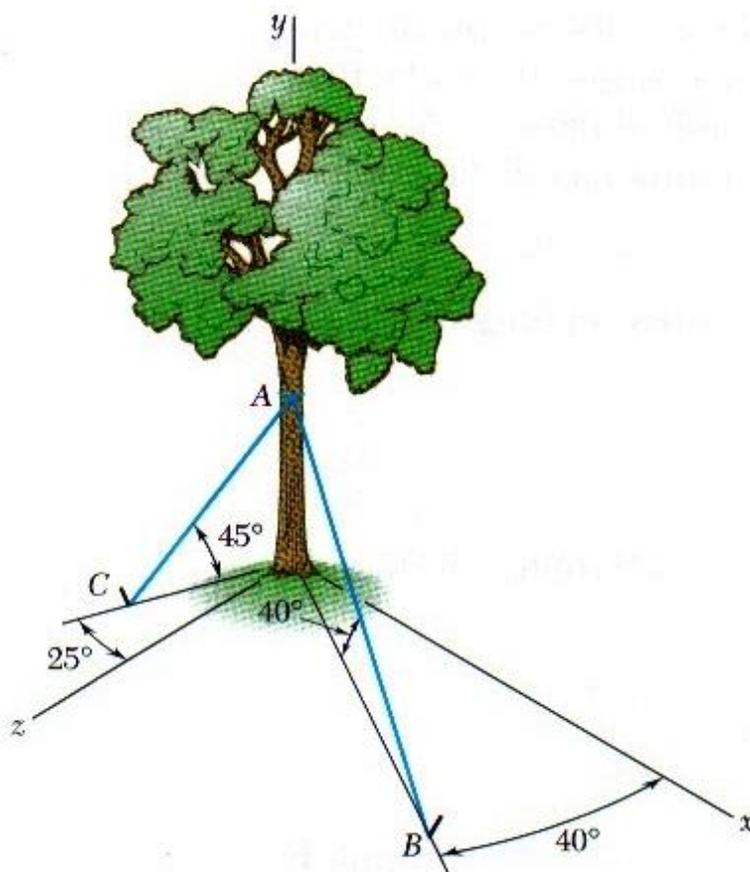
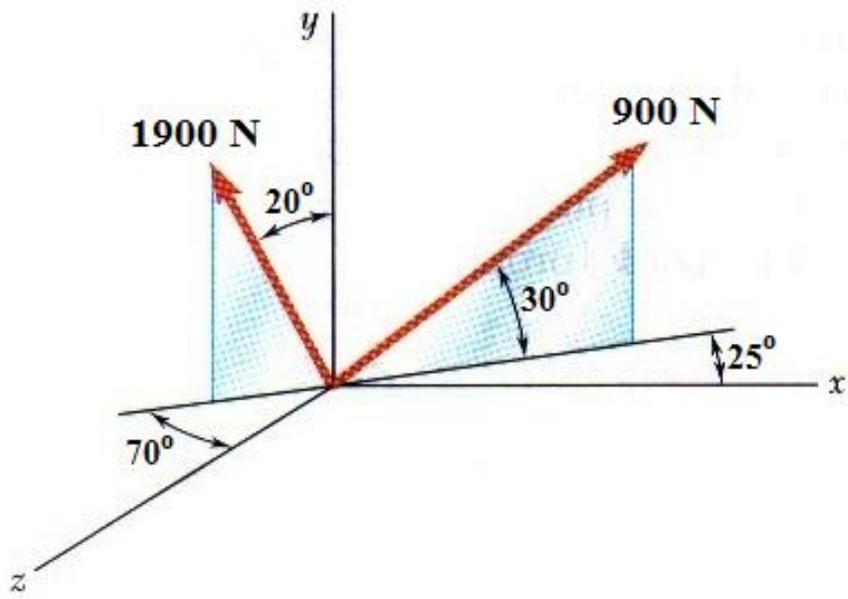
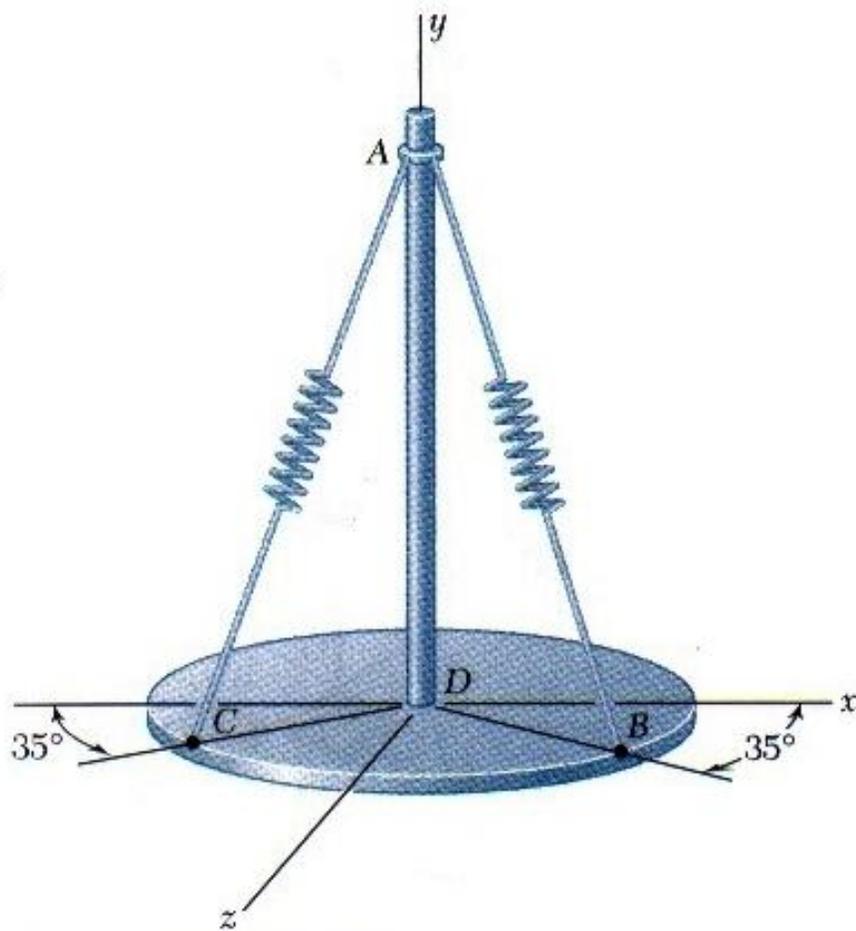


Figura P2.73 y P2.74



**Figura P2.75 y P2.76**



**Figura P2.79 y P2.80**

**2.75** Determine *a*) las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la fuerza de 900 N, *b*) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza con los ejes coordenados.

**2.76** Determine *a*) las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la fuerza de 1 900 N, *b*) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza con los ejes coordenados.

**2.77** Una pistola se apunta hacia un punto  $A$  ubicado  $20^\circ$  al oeste del norte. Si el cañón de la pistola forma un ángulo de  $35^\circ$  con la horizontal y la máxima fuerza del culatazo al disparar es de 180 lb, determine *a*) las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de dicha fuerza, *b*) los valores de los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que definen la dirección de la fuerza del culatazo. (Suponga que  $x$ ,  $y$  y  $z$  se dirigen respectivamente al este, hacia arriba y hacia el sur.)

**2.78** Resuelva el problema 2.77 suponiendo que el punto  $A$  se localiza  $25^\circ$  al norte del oeste y que el cañón de la pistola forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal.

**2.79** El ángulo entre el resorte  $AB$  y el poste  $DA$  es de  $30^\circ$ . Si la tensión en el resorte es de 220 N, determine *a*) las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de la fuerza ejercida por este resorte sobre la placa, *b*) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza con los ejes coordenados.

**2.80** El ángulo entre el resorte  $AC$  y el poste  $DA$  es de  $30^\circ$ . Si la componente  $x$  de la fuerza ejercida por el resorte  $AC$  sobre la placa es de 180 N, determine *a*) la tensión en el resorte  $AC$ , *b*) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza ejercida en  $C$  con los ejes coordenados.

**2.81** Determine la magnitud y la dirección de la fuerza  $\mathbf{F} = (65 \text{ N})\mathbf{i} - (80 \text{ N})\mathbf{j} - (200 \text{ N})\mathbf{k}$ .

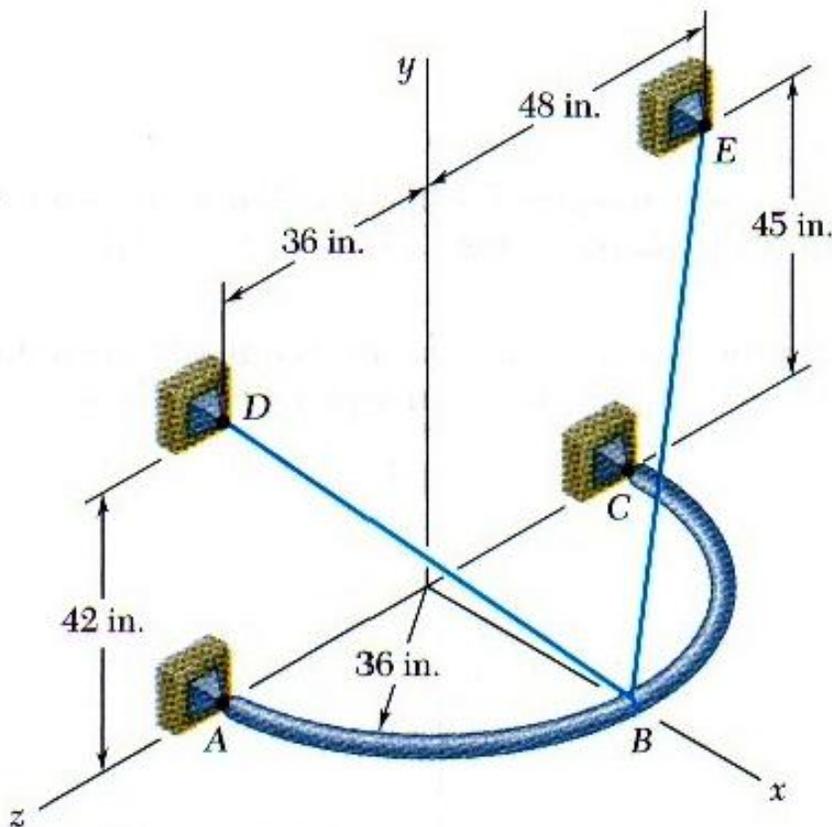
**2.82** Determine la magnitud y la dirección de la fuerza  $\mathbf{F} = (450 \text{ N})\mathbf{i} + (600 \text{ N})\mathbf{j} - (1\,800 \text{ N})\mathbf{k}$ .

**2.83** Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos  $\theta_x = 43.2^\circ$  y  $\theta_z = 83.8^\circ$ . Si la componente  $y$  de la fuerza es de  $-50$  lb, determine *a*) el ángulo  $\theta_y$ , *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

**2.84** Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos  $\theta_x = 113.2^\circ$  y  $\theta_y = 78.4^\circ$ . Si la componente  $z$  de la fuerza es de  $-35$  lb, determine *a*) el ángulo  $\theta_z$ , *b*) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

**2.85** Una fuerza  $\mathbf{F}$  con magnitud de  $250$  N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si  $F_x = 80$  N,  $\theta_y = 72.4^\circ$  y  $F_z > 0$ , determine *a*) las componentes  $F_y$  y  $F_z$ , *b*) los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_z$ .

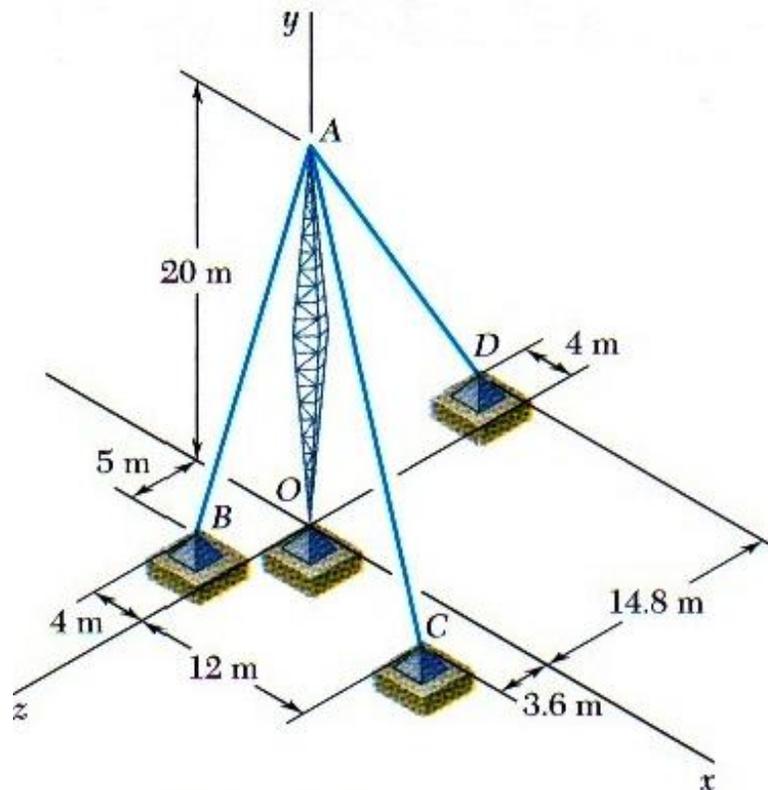
**2.86** Una fuerza  $\mathbf{F}$  con magnitud de  $320$  N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si  $\theta_x = 104.5^\circ$ ,  $F_z = -120$  N y  $F_y < 0$ , determine *a*) las componentes  $F_x$  y  $F_y$ , *b*) los ángulos  $\theta_y$  y  $\theta_z$ .



**Figura P2.87 y P2.88**

**2.87** Una barra de acero se dobla para formar un anillo semicircular con 36 in. de radio que está sostenido parcialmente por los cables  $BD$  y  $BE$ , los cuales se unen al anillo en el punto  $B$ . Si la tensión en el cable  $BD$  es de 55 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte colocado en  $D$ .

**2.88** Una barra de acero se dobla para formar un anillo semicircular con 36 in. de radio que está sostenido parcialmente por los cables  $BD$  y  $BE$ , los cuales se unen al anillo en el punto  $B$ . Si la tensión en el cable  $BE$  es de 60 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte colocado en  $E$ .



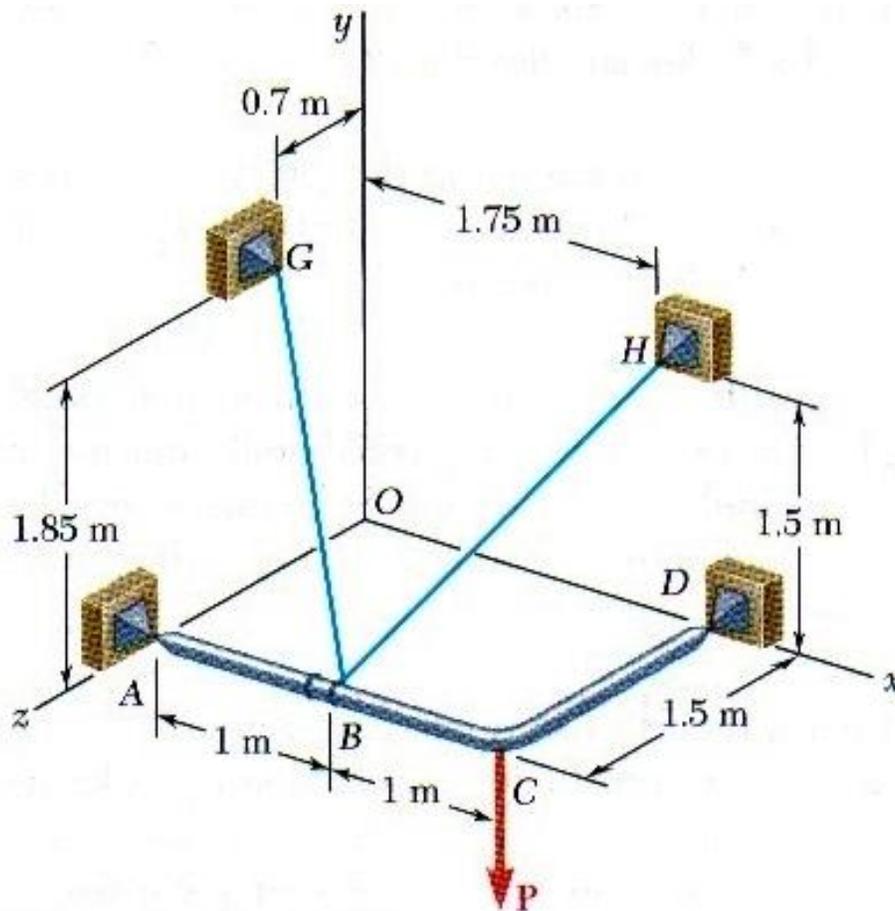
**Figura P2.89 y P2.90**

**2.89** Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres anclados con pernos en  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Si la tensión en el alambre  $AB$  es de 2 100 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno colocado en  $B$ .

**2.90** Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres que están anclados con pernos en  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Si la tensión en el alambre  $AD$  es de 1 260 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el perno colocado en  $D$ .

**2.91** Dos cables  $BG$  y  $BH$  están unidos al marco  $ACD$  como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable  $BG$  es de 450 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable  $BG$  sobre el marco en el punto  $B$ .

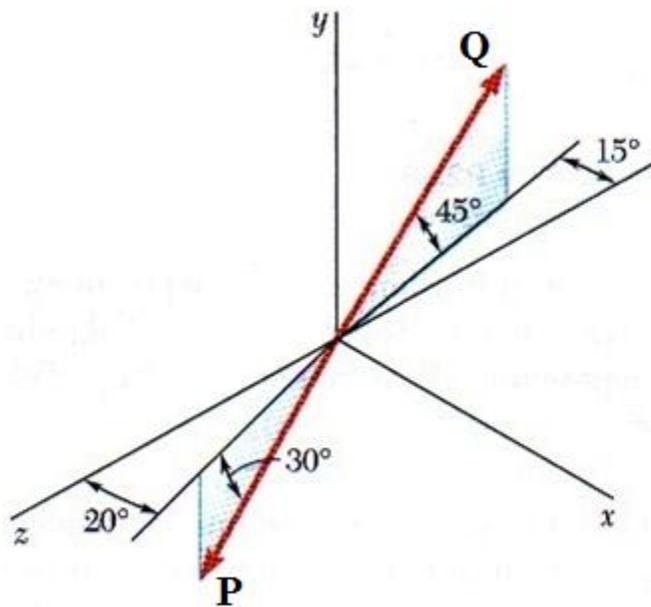
**2.92** Dos cables  $BG$  y  $BH$  están unidos al marco  $ACD$  como indica la figura. Si la tensión en el cable  $BH$  es de 600 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable  $BH$  sobre el marco en el punto  $B$ .



**Figura P2.91 y P2.92**

**2.93** Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si  $P = 4$  kips y  $Q = 8$  kips.

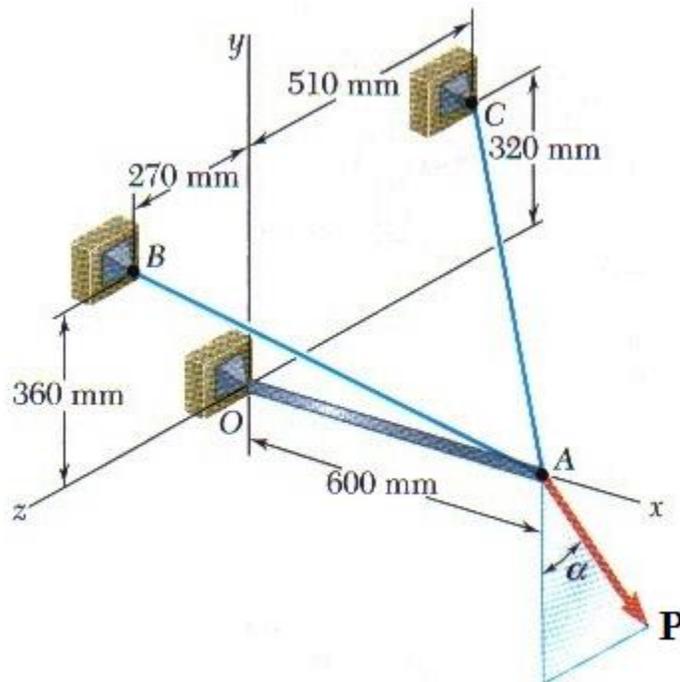
**2.94** Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si  $P = 6$  kips y  $Q = 7$  kips.



**Figura P2.93 y P2.94**

**2.95** El aguilón  $OA$  soporta una carga  $\mathbf{P}$  y está sostenido por dos cables, según muestra la figura. Si en el cable  $AB$  la tensión es de  $510\text{ N}$  y en el cable  $AC$  es de  $765\text{ N}$ , determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en  $A$  por los dos cables.

**2.96** Suponga que en el problema 2.95 la tensión es de  $765\text{ N}$  en el cable  $AB$  y de  $510\text{ N}$  en el cable  $AC$ , y determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en  $A$  por los dos cables.



**Figura P2.95**

**2.97** Para el árbol del problema 2.73, si la tensión en el cable  $AB$  es de 760 lb y la resultante de las fuerzas ejercidas en  $A$  por los cables  $AB$  y  $AC$  yace en el plano  $yz$ , determine *a*) la tensión en el cable  $AC$ , *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

**2.98** Para el árbol del problema 2.73, si la tensión en el cable  $AC$  es de 980 lb y la resultante de las fuerzas ejercidas en  $A$  por los cables  $AB$  y  $AC$  yace en el plano  $yz$ , determine *a*) la tensión en el cable  $AB$ , *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

**2.99** Para el aguilón del problema 2.95, si  $\alpha = 0^\circ$ , la tensión en el cable  $AB$  es de 600 N, y la resultante de la carga  $\mathbf{P}$  y las fuerzas ejercidas en  $A$  por los dos cables se dirige a lo largo de  $OA$ , determine *a*) la tensión en el cable  $AC$ , *b*) la magnitud de la carga  $\mathbf{P}$ .

**2.100** Para la torre de transmisión del problema 2.89, determine las tensiones en los cables  $AB$  y  $AD$  si la tensión en el cable  $AC$  es de 1 770 N y la resultante de las fuerzas ejercidas por los tres cables en  $A$  debe ser vertical.

---

## 2.15. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO

De acuerdo con la definición dada en la sección 2.9, una partícula  $A$  está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre  $A$  es cero. Las componentes  $R_x$ ,  $R_y$  y  $R_z$  de la resultante están dadas por las relaciones (2.31); al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escribe

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

Las ecuaciones (2.34) representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula y en los que intervienen no más de tres incógnitas.

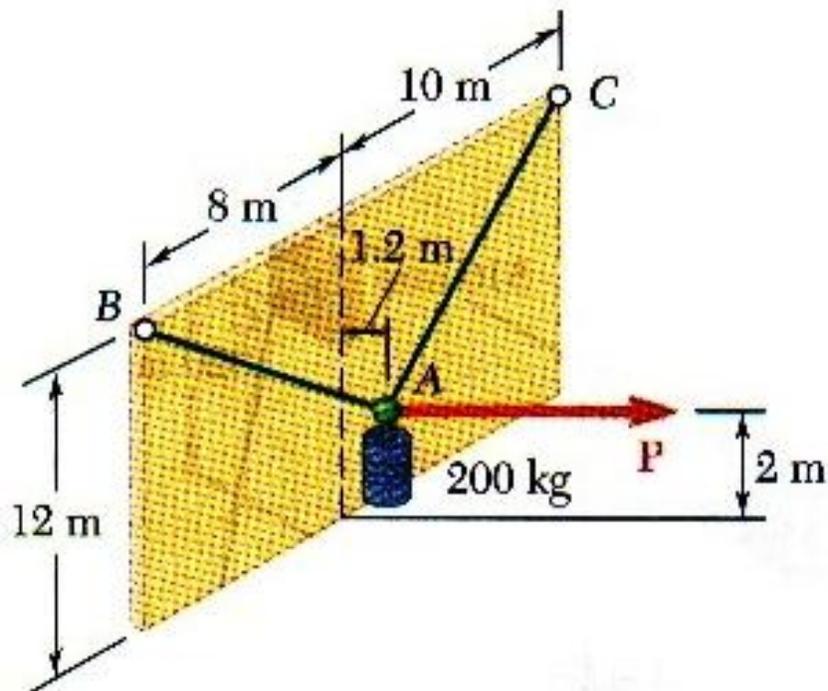
Para resolver tales problemas, se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio (2.34) y despejar las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, esas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.



**Fotografía 2.3** Como la tensión presente en los *cuatro* cables que sostienen al contenedor de carga no se puede encontrar mediante las *tres* ecuaciones (2.34), es posible obtener una relación entre las tensiones considerando el equilibrio del gancho.

## PROBLEMA RESUELTO 2.9

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables  $AB$  y  $AC$  que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal  $\mathbf{P}$  perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de  $\mathbf{P}$  y la tensión en cada cable.

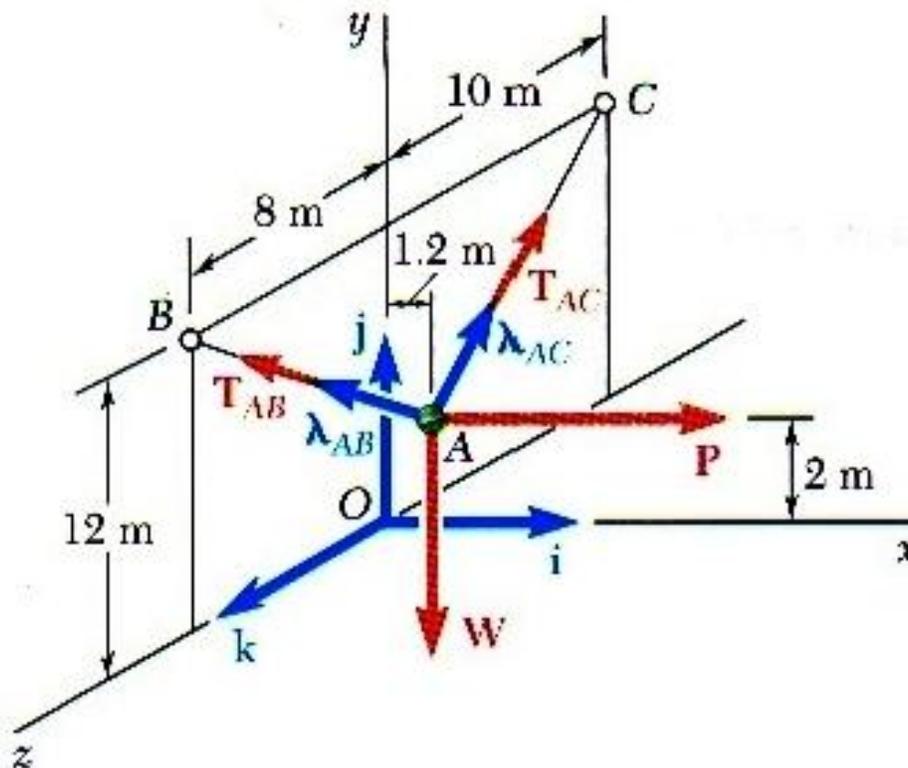


## SOLUCIÓN

**Diagrama de cuerpo libre.** Se escoge el punto A como cuerpo libre, este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Con la introducción de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ , se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P\mathbf{i} \\ \mathbf{W} &= -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1\,962 \text{ N})\mathbf{j} \end{aligned} \quad (1)$$



En el caso de  $\mathbf{T}_{AB}$  y  $\mathbf{T}_{AC}$ , es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ . Representando con  $\lambda_{AB}$  el vector unitario a lo largo de  $AB$ , se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \quad AB = 12.862 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \quad (2)$$

Al representar con  $\lambda_{AC}$  el vector unitario a lo largo de AC, se escribe en forma semejante

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \quad AC = 14.193 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{14.193 \text{ m}} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \quad (3)$$

**Condición de equilibrio.** Puesto que A está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$ ,

$$\begin{aligned} &(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} \\ &+ (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N})\mathbf{j} \\ &+ (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

Al hacer los coeficientes de  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \quad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1\,962 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0: \quad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1\,402 \text{ N} \quad T_{AC} = 1\,238 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

## Problemas

**2.101** Un contenedor se sostiene por medio de tres cables que están unidos al techo como se muestra en la figura. Determine el peso  $W$  del contenedor si la tensión en el cable  $AB$  es de 6 kN.

**2.102** Un contenedor se sostiene por medio de tres cables que están unidos al techo como se muestra en la figura. Determine el peso  $W$  del contenedor si la tensión en el cable  $AD$  es de 4.3 kN.

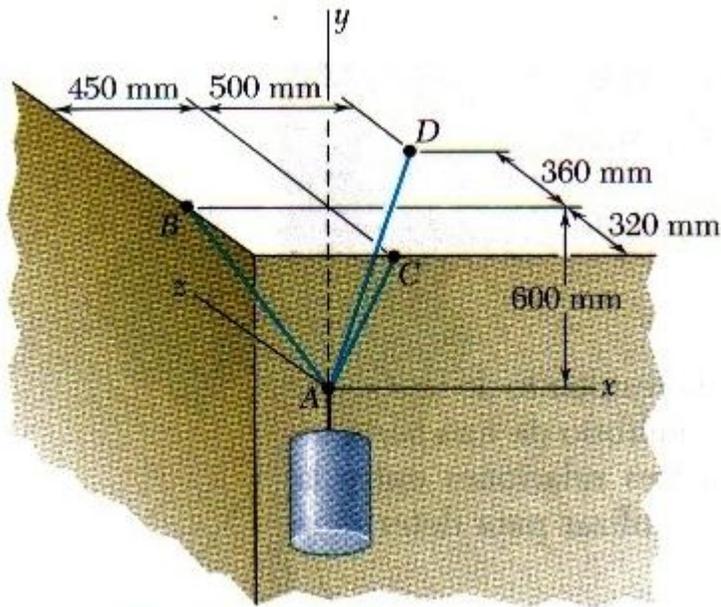


Figura P2.101 y P2.102

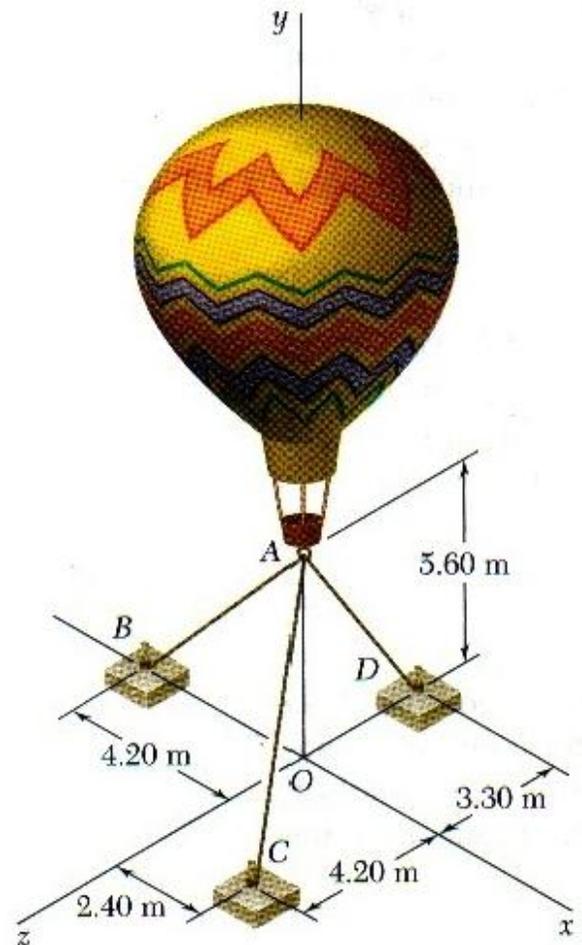


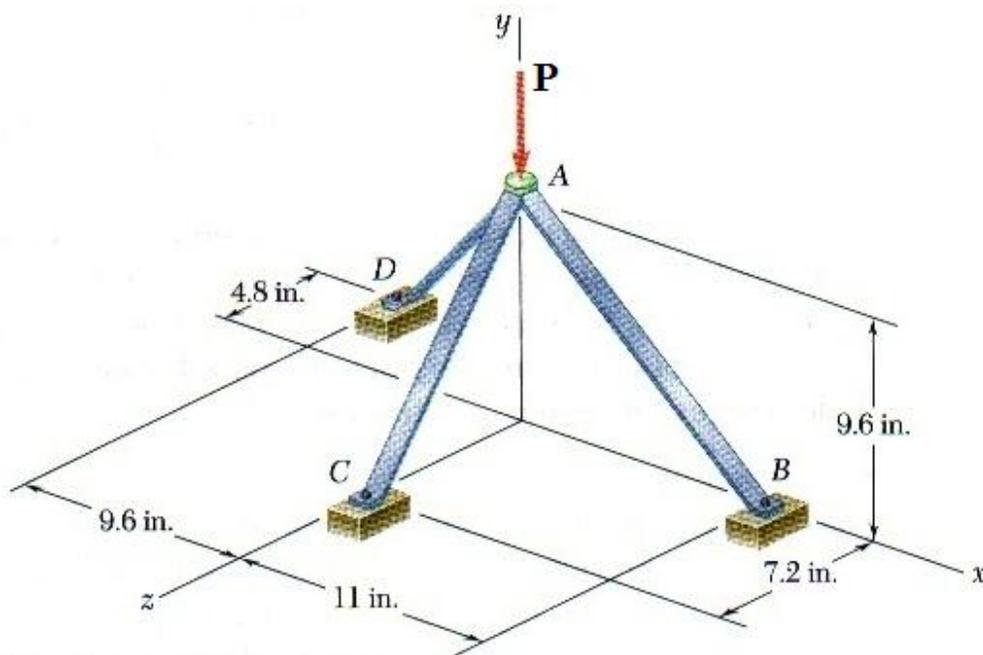
Figura P2.103 y P2.104

**2.103** Tres cables son usados para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si la tensión en el cable  $AB$  es de 259 N, determine la fuerza vertical  $\mathbf{P}$  que ejerce el globo en  $A$ .

**2.104** Tres cables son usados para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si la tensión en el cable  $AC$  es de 444 N, determine la fuerza vertical  $\mathbf{P}$  que ejerce el globo en  $A$ .

**2.105** El montaje de apoyo que se muestra en la figura está atornillado al sitio en  $B$ ,  $C$  y  $D$  y soporta en  $A$  una fuerza  $\mathbf{P}$  dirigida hacia abajo. Si las fuerzas presentes en los elementos  $AB$ ,  $AC$  y  $AD$  están dirigidas a lo largo de los elementos respectivos, y la fuerza en el elemento  $AB$  es de 29.2 lb, determine la magnitud de  $\mathbf{P}$ .

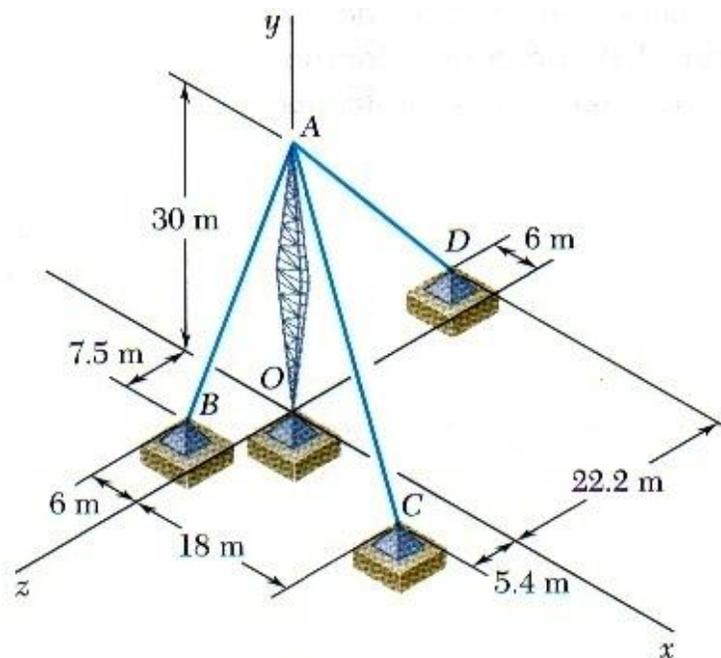
**2.106** El montaje de apoyo que se muestra en la figura está atornillado al sitio en  $B$ ,  $C$  y  $D$  y soporta en  $A$  una fuerza  $\mathbf{P}$  dirigida hacia abajo. Si las fuerzas presentes en los elementos  $AB$ ,  $AC$  y  $AD$  están dirigidas a lo largo de los elementos respectivos y  $P = 45$  lb, determine las fuerzas presentes en los elementos.



**Figura P2.105 y P2.106**

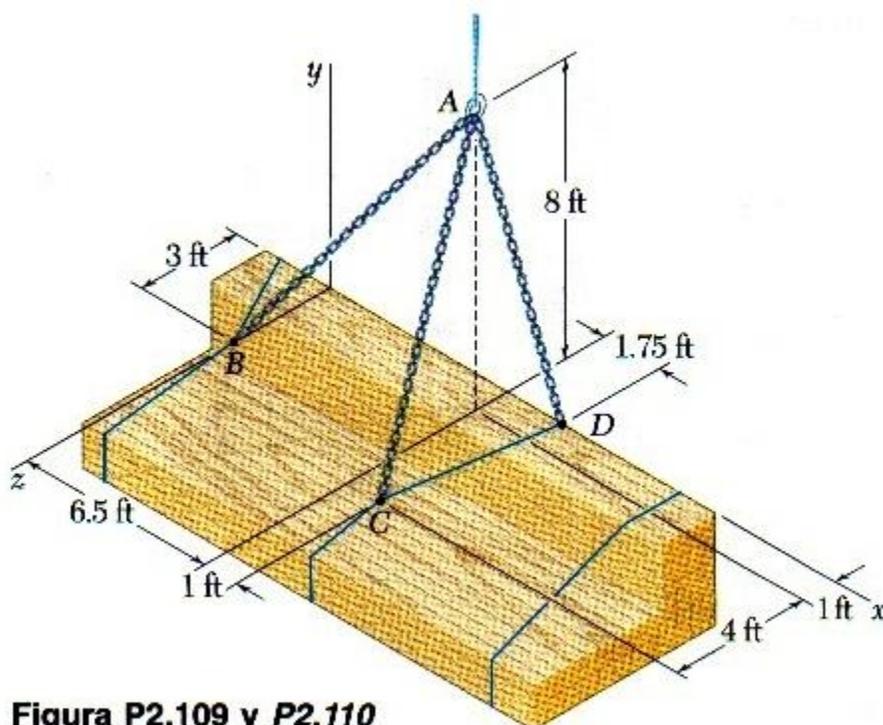
**2.107** Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en  $A$  y se anclan mediante pernos en  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Si la tensión en el alambre  $AB$  es de  $3.6 \text{ kN}$ , determine la fuerza vertical  $\mathbf{P}$  ejercida por la torre sobre la punta puesta en  $A$ .

**2.108** Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en  $A$  y se anclan mediante pernos en  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Si la tensión en el alambre  $AC$  es de  $2.6 \text{ kN}$ , determine la fuerza vertical  $\mathbf{P}$  ejercida por la torre sobre la punta puesta en  $A$ .



**Figura P2.107 y P2.108**

**2.109** Una carga de madera de 320 lb se levanta usando un cabestro de tres ramas. Si en el instante mostrado la madera se encuentra en reposo, determine la tensión en cada rama del cabestro.



**Figura P2.109 y P2.110**

**2.110** Una carga de madera se levanta usando un cabestro de tres ramas. Si en el instante mostrado la madera se encuentra en reposo y la tensión en la rama  $AD$  es de 220 lb, determine el peso de la madera.

**2.111** Una fuerza  $P$  se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice  $A$ . Si  $P = 0$  y la tensión en la cuerda  $BE$  es de 0.2 lb, determine el peso  $W$  del cono.

**2.112** Una fuerza  $P$  se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice  $A$ . Si el cono pesa 1.6 lb, determine el rango de valores de  $P$  para los cuales la cuerda  $CF$  está tensa.

**2.113** Una placa triangular de 16 kg se sostiene mediante tres cables como indica la figura. Si  $a = 150$  mm, determine la tensión presente en cada cable.

**2.114** Una placa triangular de 16 kg se sostiene mediante tres cables como indica la figura. Si  $a = 200$  mm, determine la tensión en cada cable.

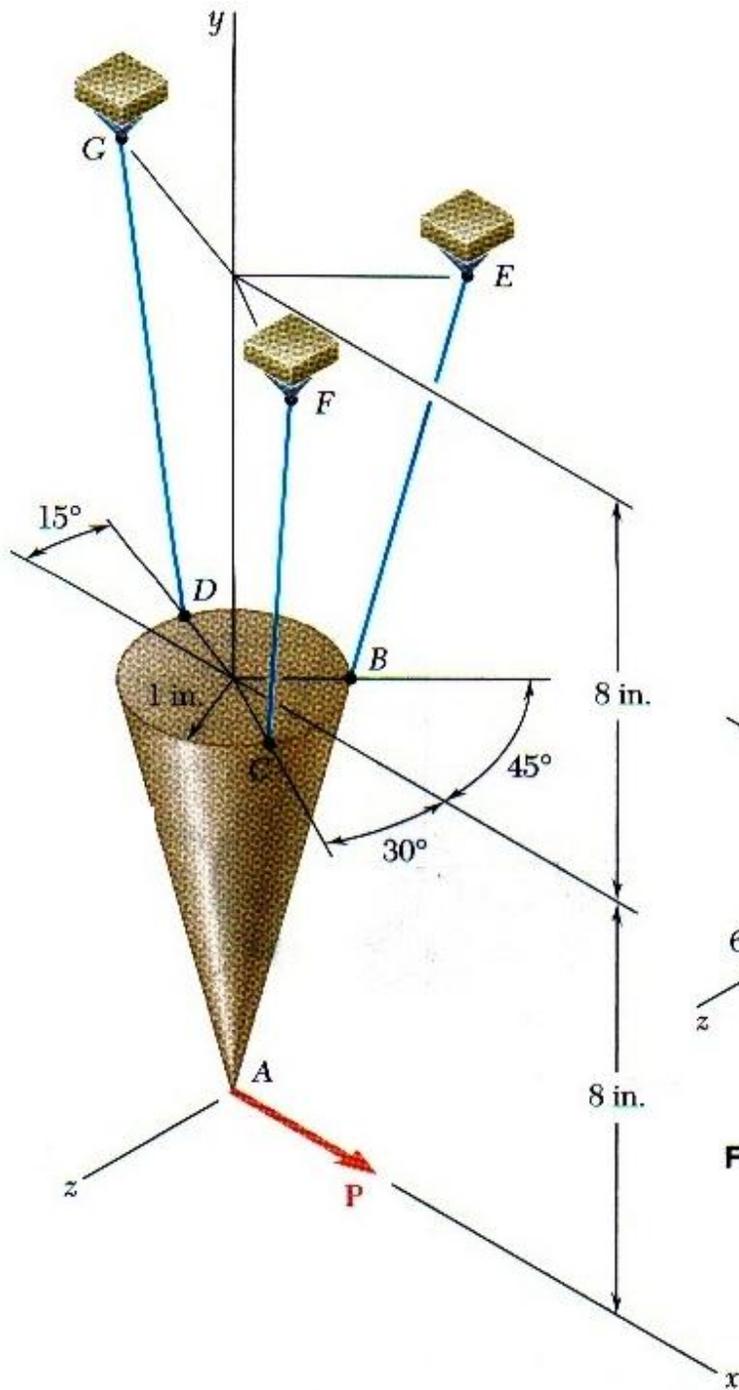


Figura P2.111 y P2.112

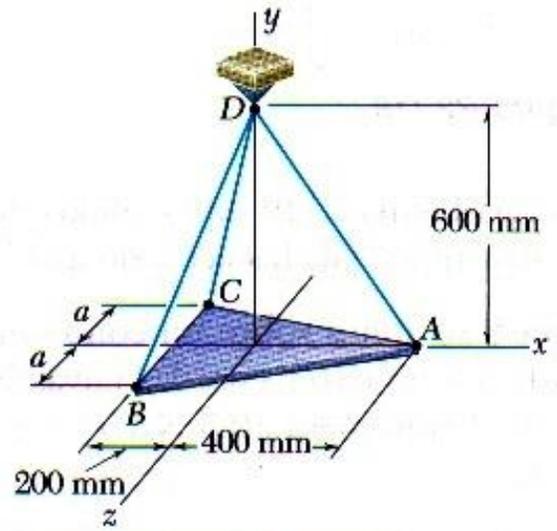


Figura P2.113 y P2.114

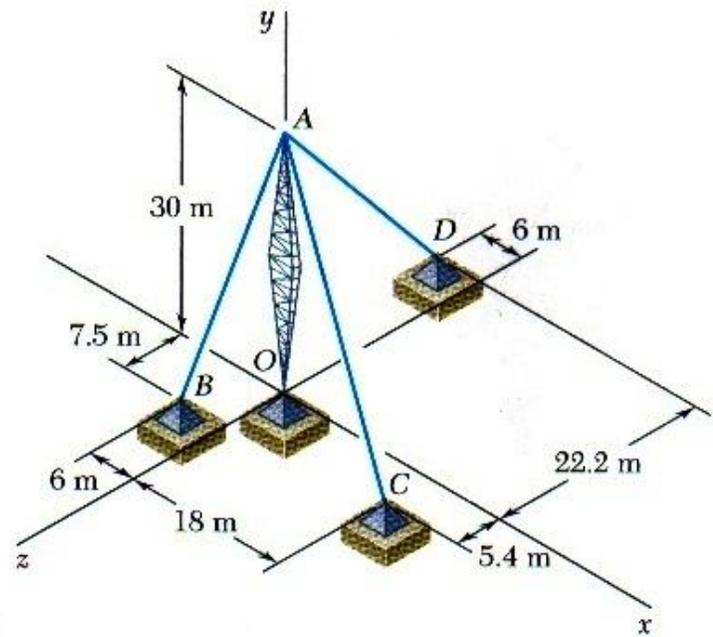
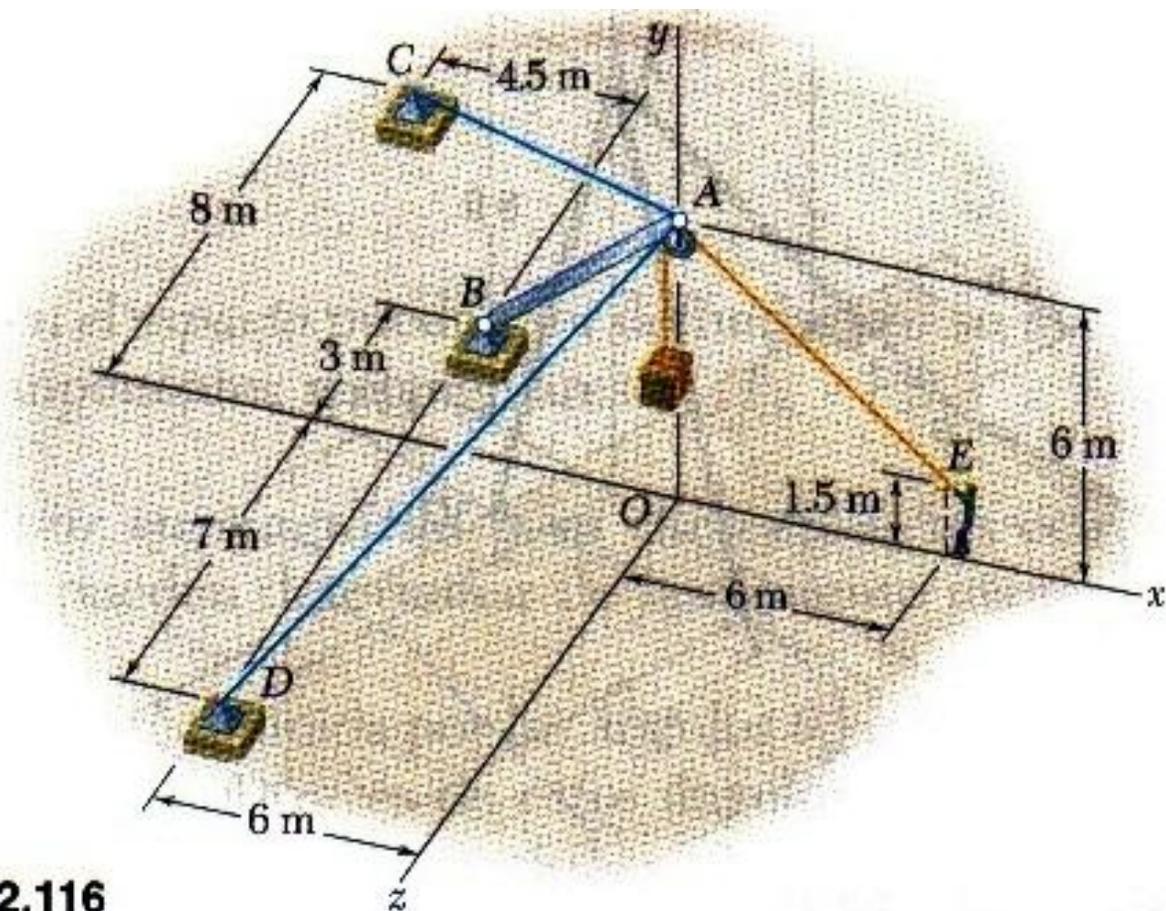


Figura P2.115

**2.115** Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en  $A$  y se anclan mediante pernos en  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Si la torre ejerce sobre la punta una fuerza vertical hacia arriba de  $8\text{ kN}$ , determine la tensión presente en cada alambre.

**2.116** Un aguilón de grúa se sostiene mediante los cables  $AC$  y  $AD$ . Un trabajador levanta un bloque de  $20\text{ kg}$  jalando una cuerda que pasa por la polea colocada en  $A$ . Si el aguilón  $AB$  ejerce una fuerza en  $A$  que está dirigida de  $B$  hacia  $A$ , determine dicha fuerza y la fuerza ejercida en cada uno de los dos cables.

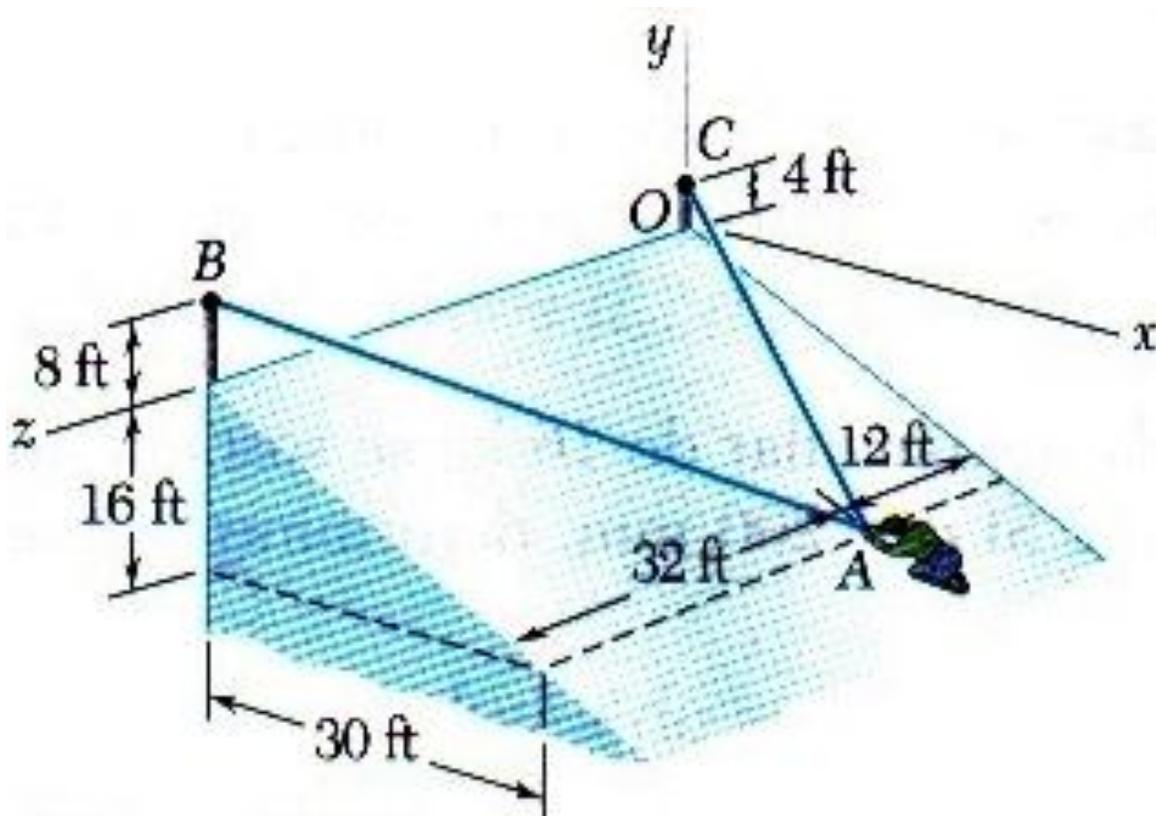


**Figura P2.116**

**2.117** Una placa circular horizontal con peso de  $62\text{ lb}$  está suspendida por tres alambres que forman ángulos de  $30^\circ$  con respecto a la vertical y se encuentran unidos a un soporte en  $D$ . Determine la tensión presente en cada alambre.

**2.118** Para el cono del problema 2.112, determine el rango de valores de  $P$  en los cuales la cuerda  $DG$  queda tensa cuando  $P$  se orienta en la dirección  $-x$ .

**2.119** Un hombre de 175 lb utiliza dos cuerdas  $AB$  y  $AC$  para tratar de moverse sobre una superficie congelada y resbaladiza. Si la fuerza ejercida sobre el hombre por la superficie congelada es perpendicular a dicha superficie, determine la tensión presente en cada cuerda.



**Figura P2.119**

**2.120** Resuelva el problema 2.119 suponiendo que el hombre situado en  $A$  es ayudado por un amigo, quien jala hacia él con una fuerza  $\mathbf{P} = -(45 \text{ lb})\mathbf{k}$ .

**2.121** Una fuerza  $\mathbf{P}$  se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice  $A$ . Si el cono pesa 10.5 N y  $P = 0$ , determine la tensión presente en cada cuerda.

**2.122** Una fuerza  $\mathbf{P}$  se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice  $A$ . Si el cono pesa 10.5 N y  $P = 0.5 \text{ N}$ , determine la tensión en cada cuerda.



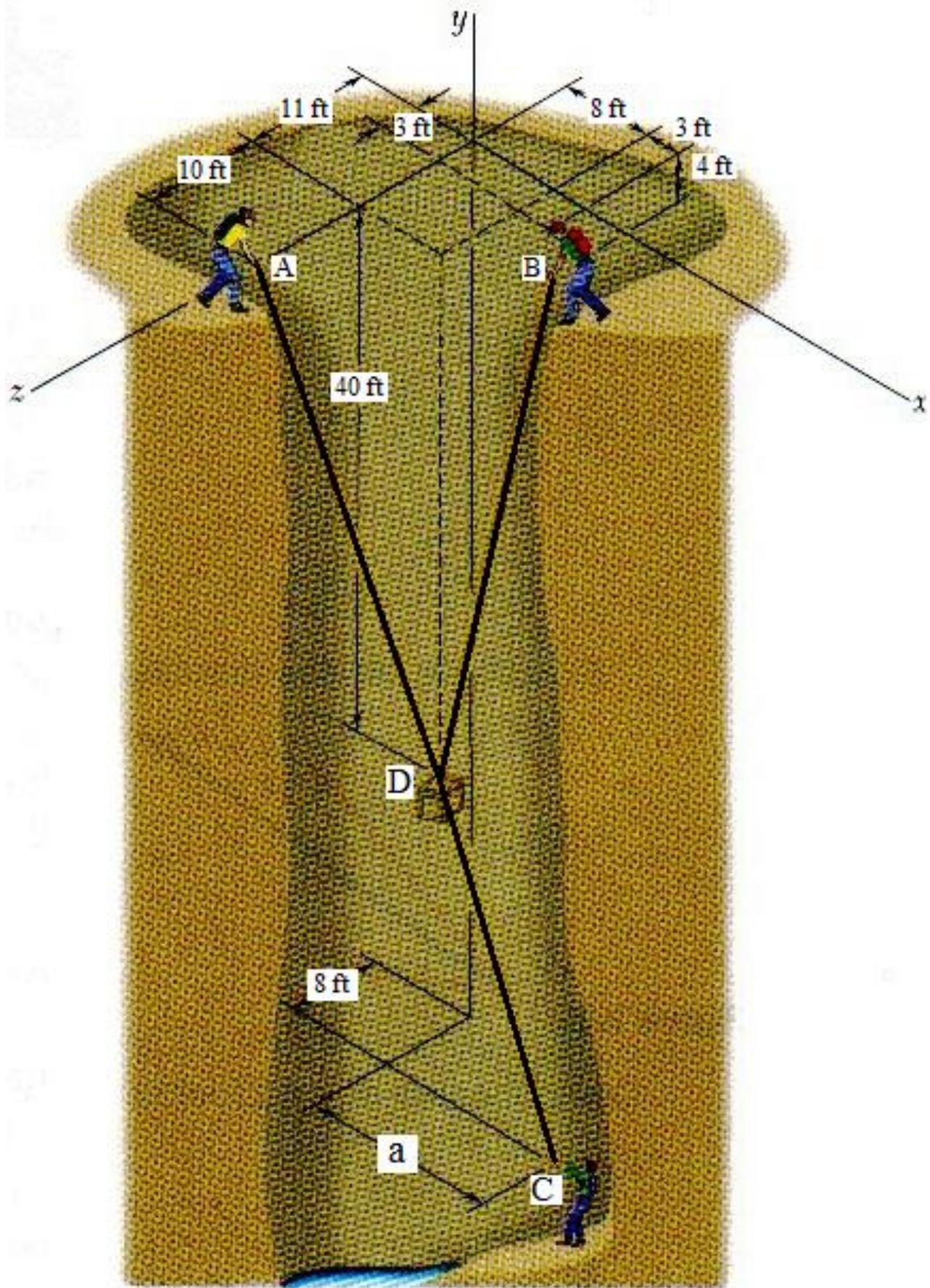


Figura P2.123 y P2.124

**2.124** Los escaladores situados en  $A$  y  $B$  han pasado una cuerda  $ADB$  a través de un anillo unido al paquete en  $D$ , pretenden bajar el paquete, con peso  $W$ , al escalador que se encuentra en  $C$ . El escalador en  $C$  está 64 ft por debajo de  $A$  y guía el paquete usando la cuerda  $CD$ . Si  $W = 120$  lb y en el instante mostrado en la figura el paquete está en reposo, determine la tensión en cada cuerda. (*Sugerencia:* Considere que la tensión es la misma en ambas porciones de la cuerda  $ADB$ .)

**2.125** Una pieza de maquinaria de peso  $W$  está sostenida temporalmente por los cables  $AB$ ,  $AC$  y  $ADE$ . El cable  $ADE$  está unido al anillo en  $A$ , pasa por la polea en  $D$ , y regresa al anillo para unirse después al soporte en  $E$ . Si  $W = 1\,400$  N, determine la tensión en cada cable. (*Sugerencia:* La tensión es la misma en todas las porciones del cable  $ADE$ .)

**2.126** Una pieza de maquinaria de peso  $W$  está sostenida temporalmente por los cables  $AB$ ,  $AC$  y  $ADE$ . El cable  $ADE$  está unido al anillo en  $A$ , pasa por la polea en  $D$ , y regresa al anillo para unirse después al soporte en  $E$ . Si la tensión en el cable  $AB$  es de 300 N, determine  $a$ ) la tensión en  $AC$ ,  $b$ ) la tensión en  $ADE$  y  $c$ ) el peso  $W$ . (*Sugerencia:* La tensión es la misma en todos los tramos del cable  $ADE$ .)

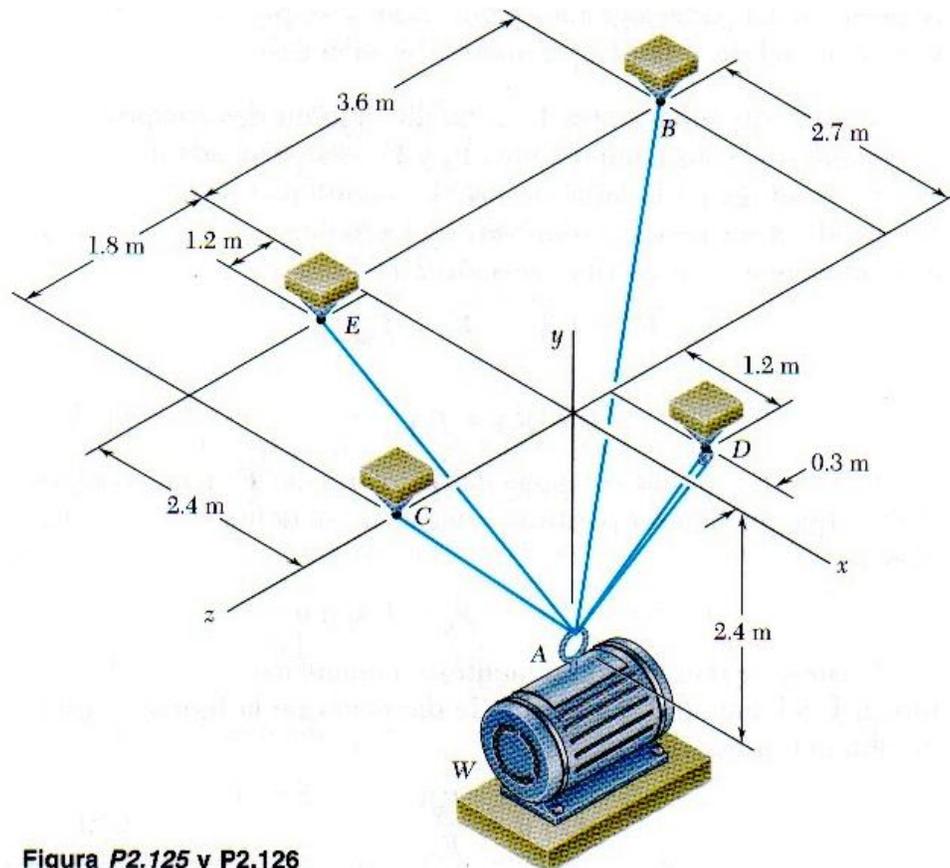


Figura P2.125 y P2.126

**2.127** Los collarines  $A$  y  $B$  unidos por medio de un alambre de 1 m de largo pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las barras. Si una fuerza  $\mathbf{P} = (680 \text{ N})\mathbf{j}$  se aplica en  $A$ , determine  $a$ ) la tensión en el alambre cuando  $y = 300 \text{ mm}$ ,  $b$ ) la magnitud de la fuerza  $\mathbf{Q}$  requerida para mantener el equilibrio del sistema.

**2.128** Resuelva el problema 2.127 suponiendo que  $y = 550 \text{ mm}$ .

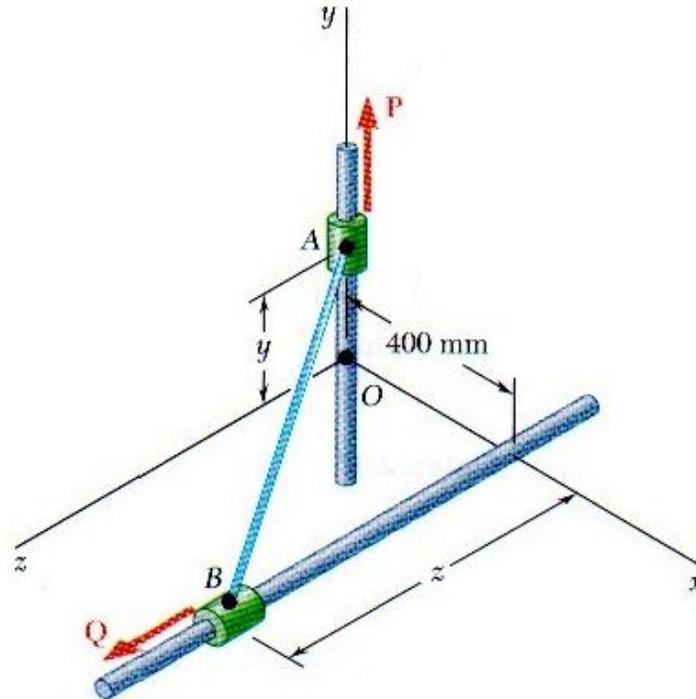


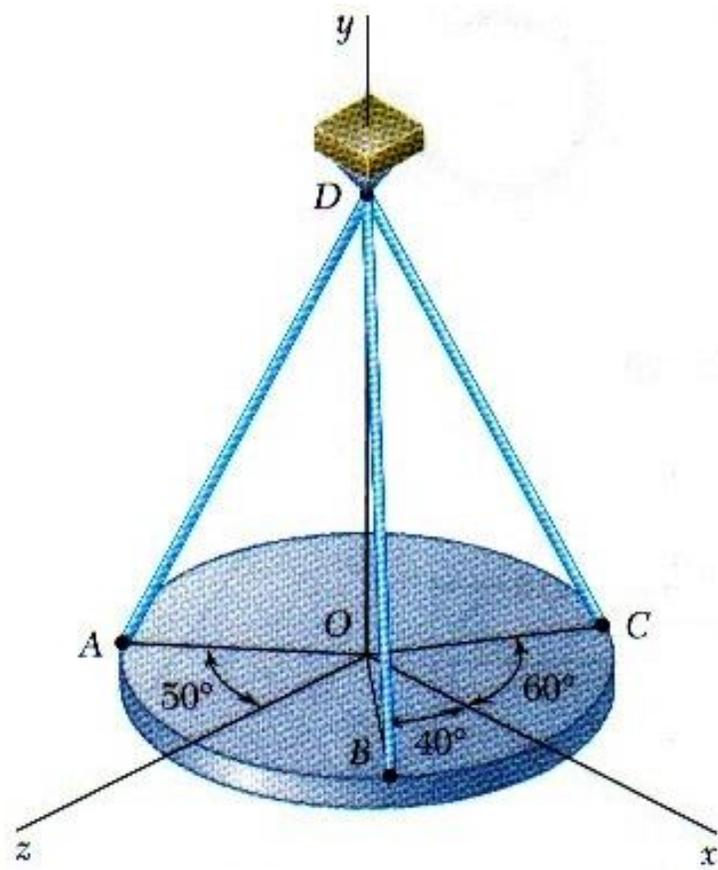
Figura P2.127

## Problemas de repaso

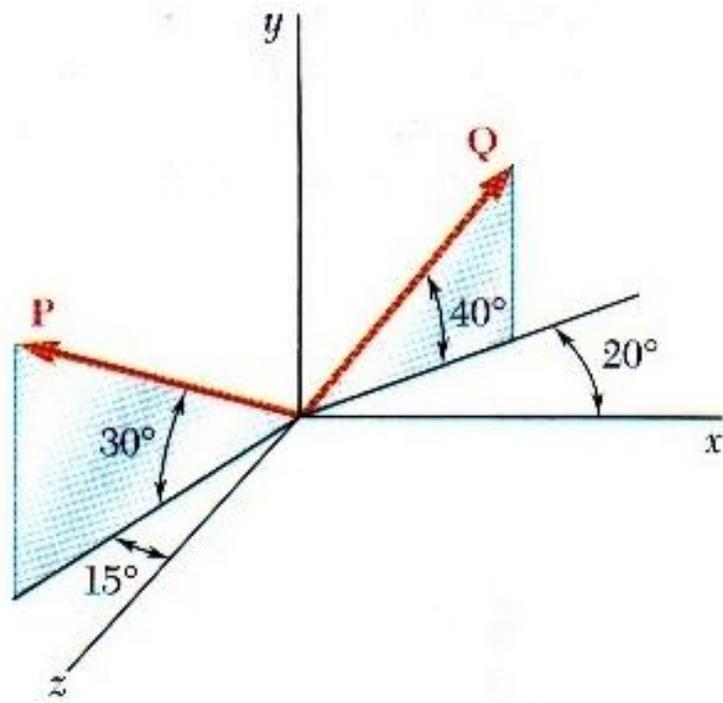
**2.135** Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de  $30^\circ$  con respecto a la vertical y se encuentran unidos a un soporte ubicado en el punto  $D$ . Si la componente  $x$  de la fuerza ejercida por el alambre  $AD$  sobre la placa es de  $220.6 \text{ N}$ , determine  $a$ ) la tensión en el alambre  $AD$ ,  $b$ ) los ángulos  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  que forma la fuerza ejercida en  $A$  con los ejes coordenados.

**2.136** Una fuerza  $\mathbf{F}$  con magnitud de  $600 \text{ lb}$  actúa en el origen de un sistema coordenado. Si  $F_x = 200 \text{ lb}$ ,  $\theta_z = 136.8^\circ$  y  $F_y < 0$ , determine  $a$ ) las componentes  $F_y$  y  $F_z$ ,  $b$ ) los ángulos  $\theta_x$  y  $\theta_y$ .

**2.137** Encuentre la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas que se muestran en la figura, sabiendo que  $P = 500 \text{ lb}$  y  $Q = 600 \text{ lb}$ .

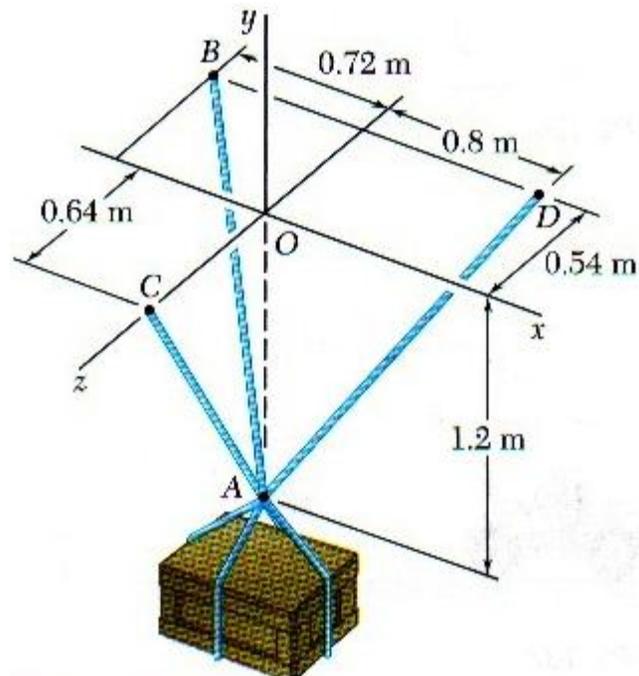


**Figura P2.135**



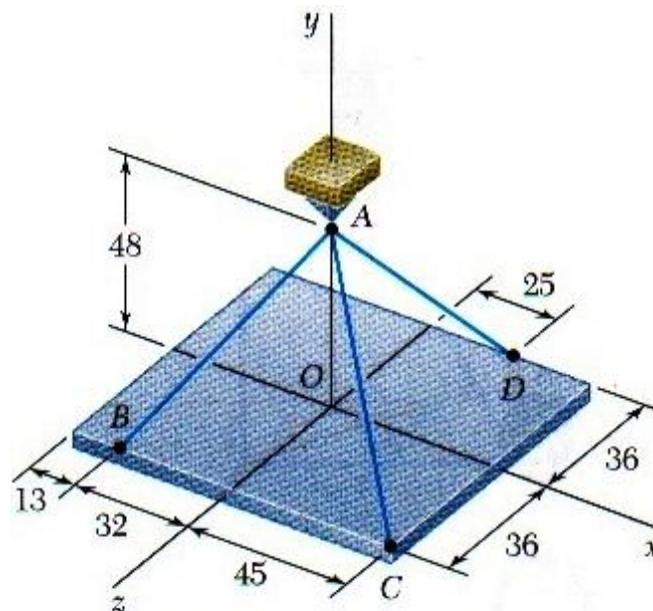
**Figura P2.137**

**2.138** La caja de madera que se muestra en la figura se sostiene por medio de tres cables. Si la tensión en el cable  $AB$  es de 3 kN, determine el peso de la caja.



**Figura P2.138**

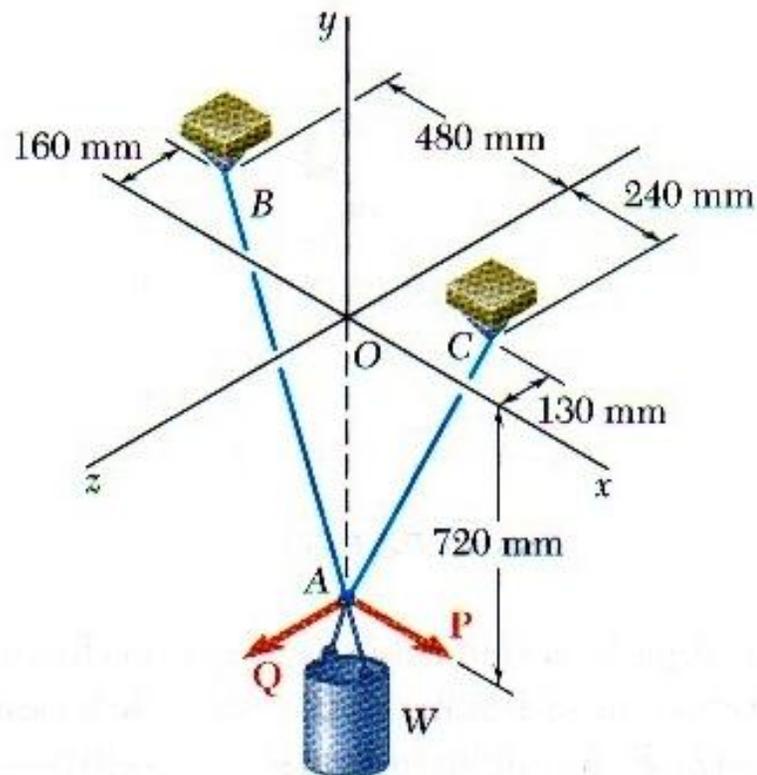
**2.139** Una placa rectangular está sostenida por tres cables como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable  $AD$  es de 120 lb, determine el peso de la placa.



Dimensiones en pulgadas

**Figura P2.139**

**2.140** Un contenedor de peso  $W$  está suspendido del aro  $A$ . El cable  $BAC$  pasa por el aro y se une a los soportes fijos en  $B$  y  $C$ . Dos fuerzas  $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$  y  $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$  se aplican en el aro para mantener al recipiente en la posición mostrada. Si  $W = 1\,200\text{ N}$ , determine  $P$  y  $Q$ . (Sugerencia: Considere que la tensión es la misma en ambos tramos del cable  $BAC$ .)



**Figura P2.140**

- 2.73 a) +557 lb, -611 lb, +468 lb.  
b)  $54.1^\circ$ ,  $130.0^\circ$ ,  $60.5^\circ$ .
- 2.75 a) +706 N, +450 N, -329 N.  
b)  $38.3^\circ$ ,  $60.0^\circ$ ,  $111.5^\circ$ .
- 2.76 a) -611 N, +1 785 N, +222 N.  
b)  $108.7^\circ$ ,  $20.0^\circ$ ,  $83.3^\circ$ .
- 2.78 a) +141.3 lb, -90.0 lb, +65.9 lb.  
b)  $38.3^\circ$ ,  $120.0^\circ$ ,  $68.5^\circ$ .
- 2.79 a) -90.1 N, +190.5 N, -63.1 N.  
b)  $114.2^\circ$ ,  $30.0^\circ$ ,  $106.7^\circ$ .
- 2.80 a) 439 N, b)  $65.8^\circ$ ,  $30.0^\circ$ ,  $106.7^\circ$ .
- 2.81  $F = 225$  N;  $\theta_x = 73.2^\circ$ ,  $\theta_y = 110.8^\circ$ ,  $\theta_z = 152.7^\circ$ .
- 2.83 a)  $132.5^\circ$ , b)  $F_x = 53.9$  lb,  $F_z = 7.99$  lb;  $F = 74.0$  lb.
- 2.84 a)  $153.7^\circ$ , b)  $F_x = -15.37$  lb,  $F_y = 7.85$  lb;  $F = 39.0$  lb.
- 2.85 a)  $F_y = 75.6$  N,  $F_z = 224$  N, b)  $\theta_x = 71.3^\circ$ ,  $\theta_z = 26.1^\circ$ ,  
+30.0 lb, -35.0 lb, -30.0 lb.
- 2.87 +28.8 lb, -36.0 lb, +38.4 lb.
- 2.90 +200 N, +1000 N, +740 N.
- 2.91 -200 N, +370 N, -160.0 N.
- 2.93 4.28 kips;  $\theta_x = 93.7^\circ$ ,  $\theta_y = 31.3^\circ$ ,  $\theta_z = 121.1^\circ$ .
- 2.95 1 122 N;  $\theta_x = 147.7^\circ$ ,  $\theta_y = 61.6^\circ$ ,  $\theta_z = 104.2^\circ$ .
- 2.96 1 122 N;  $\theta_x = 150.1^\circ$ ,  $\theta_y = 60.1^\circ$ ,  $\theta_z = 91.6^\circ$ .
- 2.97 a) 1492 lb, b) 2 040 lb;  $\theta_x = 90.0^\circ$ ,  $\theta_y = 139.2^\circ$ ,  
 $\theta_z = 49.2^\circ$ .
- 2.99 a) 360 N, b) 424 N.
- 2.100  $T_{AB} = 3.25$  kN;  $T_{AD} = 1.775$  kN.
- 2.102 9.71 kN.
- 2.103 1 031 N  $\uparrow$ .
- 2.105 55.9 lb.
- 2.106  $F_{BA} = 23.5$  lb;  $F_{CA} = 14.77$  lb;  $F_{DA} = 26.6$  lb.
- 2.107 6.66 kN  $\uparrow$ .
- 2.108 8.81 kN  $\uparrow$ .
- 2.109  $T_{AB} = 86.2$  lb;  $T_{AC} = 27.7$  lb;  $T_{AD} = 237$  lb.
- 2.112  $0 \leq P \leq 0.386$  lb.
- 2.113  $T_{DA} = 62.9$  N;  $T_{DB} = T_{DC} = 56.7$  N.
- 2.114  $T_{DA} = 62.9$  N;  $T_{DB} = T_{DC} = 57.8$  N.
- 2.115  $T_{AB} = 4.33$  kN;  $T_{AC} = 2.36$  kN;  $T_{AD} = 2.37$  kN.
- 2.116  $F_{AB} = 1 742$  N;  $T_{AC} = 1 517$  N;  $T_{AD} = 403$  N.
- 2.118  $0 \leq P \leq 0.1600$  lb.
- 2.120  $T_{AB} = 81.3$  lb;  $T_{AC} = 22.2$  lb.
- 2.121  $T_{BE} = 1.310$  N;  $T_{CF} = 4.38$  N;  $T_{DC} = 4.89$  N.
- 2.122  $T_{BE} = 4.84$  N;  $T_{CF} = 1.157$  N;  $T_{DC} = 4.58$  N.
- 2.123  $T_{ADB} = 81.9$  lb;  $W = 143.4$  lb.
- 2.124  $T_{ADB} = 68.6$  lb;  $T_{DC} = 14.23$  lb.
- 2.126 a) 221 N, b) 715 N, c) 2 060 N.
- 2.127 a) 2.27 kN, b) 1.963 kN.
- 2.129 a)  $45.6^\circ$ , b) 27.1 lb.
- 2.131 a) 549 N, b) 315 N.
- 2.132 a) 5.23 kN, b) 0.503 kN.
- 2.134 149.1 lb  $\searrow$   $32.3^\circ$  o  $274$  lb  $\nearrow$   $32.3^\circ$ .
- 2.135 a) 576 N, b)  $67.5^\circ$ ,  $30.0^\circ$ ,  $108.7^\circ$ .
- 2.136 a)  $F_y = -359$  lb,  $F_z = -437$  lb, b)  $\theta_x = 70.5^\circ$ ,  $\theta_y = 126.7^\circ$ .
- 2.137 758 lb;  $\theta_x = 65.0^\circ$ ,  $\theta_y = 33.0^\circ$ ,  $\theta_z = 69.9^\circ$ .
- 2.139 177.2 lb.

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas *externas* e *internas* [sección 3.2] y se vio que, de acuerdo con el *principio de transmisibilidad*, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción [sección 3.3]. En otras palabras, dos fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$ , que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.48). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

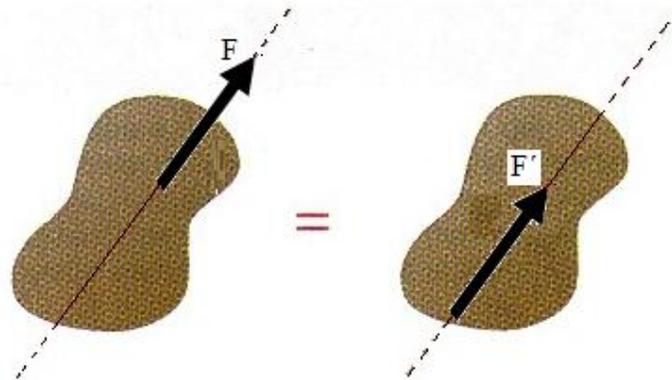


Figura 3.48

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* [sección 3.4]. El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dos vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a  $\mathbf{P}$  y a  $\mathbf{Q}$  (figura 3.49), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \text{ sen } \theta \quad (3.1)$$

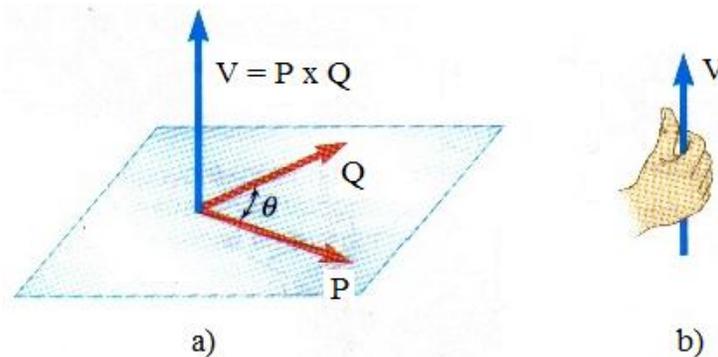


Figura 3.49

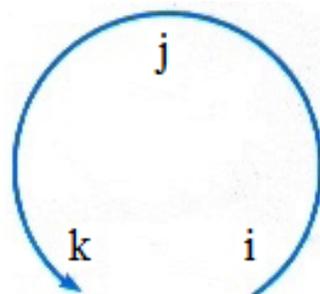
y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la parte terminal de  $\mathbf{V}$  verá la rotación a través de un ángulo  $\theta$  que hace al vector  $\mathbf{P}$  colineal con el vector  $\mathbf{Q}$  como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{V}$  —considerados en ese orden— forman una *tríada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales  $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$  y  $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$  están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  y  $\mathbf{k}$  están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.



**Figura 3.50**

Las *componentes rectangulares del producto vectorial V* de dos vectores **P** y **Q** fueron expresadas como sigue [sección 3.5]:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

El *momento de una fuerza F con respecto a un punto O* se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde **r** es el *vector de posición* trazado desde *O* hasta el punto de aplicación *A* de la fuerza **F** (figura 3.51). Si se representa con  $\theta$  el ángulo entre las líneas de acción de **r** y **F**, se encontró que la magnitud del momento de **F** con respecto a *O* podía expresarse como

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde *d* representa la distancia perpendicular desde *O* hasta la línea de acción de **F**.

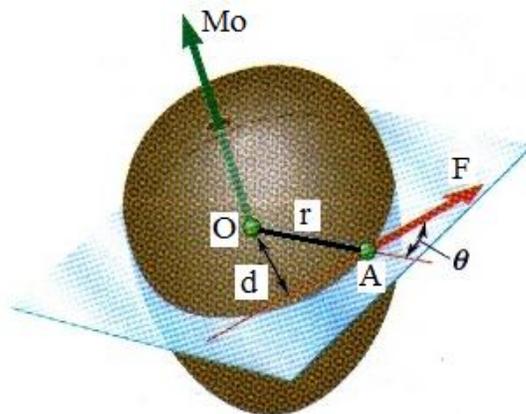


Figura 3.51

Las componentes rectangulares del momento  $\mathbf{M}_O$  de una fuerza  $\mathbf{F}$  se expresaron [sección 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde  $x$ ,  $y$  y  $z$  son las componentes del vector de posición  $\mathbf{r}$  (figura 3.52). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

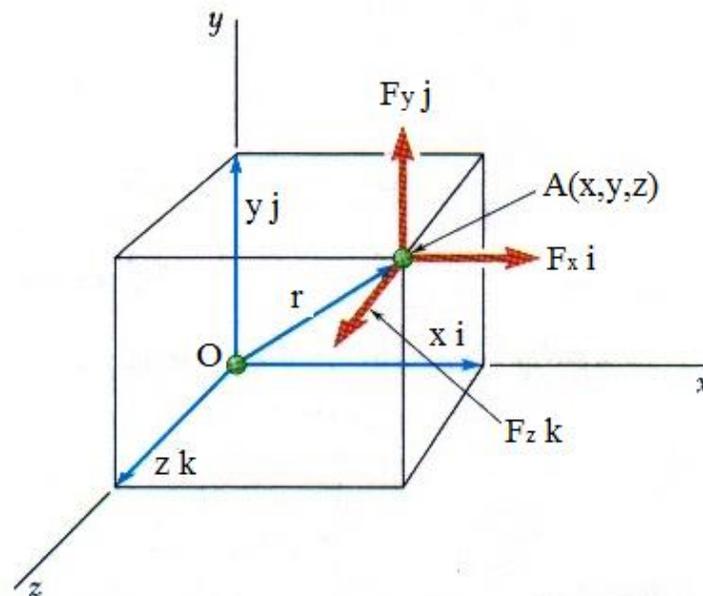


Figura 3.52

En el caso más general del momento de una fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B, se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde  $x_{A/B}$ ,  $y_{A/B}$  y  $z_{A/B}$  son las componentes del vector  $\mathbf{r}_{A/B}$ :

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de *problemas que involucran únicamente a dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza  $\mathbf{F}$  se encuentra en el plano  $xy$ . Su momento  $\mathbf{M}_B$  con respecto a un punto  $B$  que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

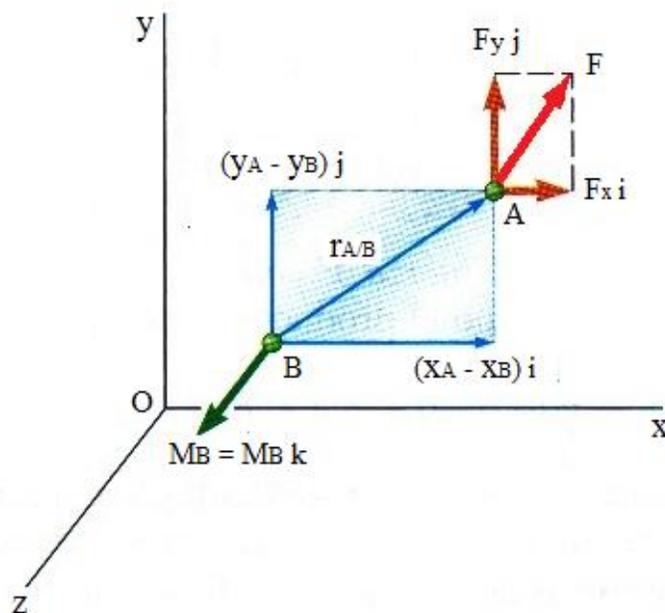


Figura 3.53

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

El *producto escalar* de dos vectores  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  [sección 3.9] se denotó por  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$  y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  (figura 3.54). Se expresó el producto escalar de  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

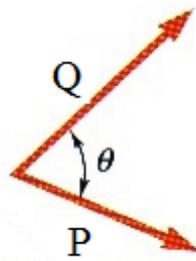


Figura 3.54

La *proyección de un vector P sobre un eje OL* (figura 3.55) se puede obtener formando el producto escalar de **P** y el vector unitario  $\lambda$  a lo largo de *OL*. Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.36)$$

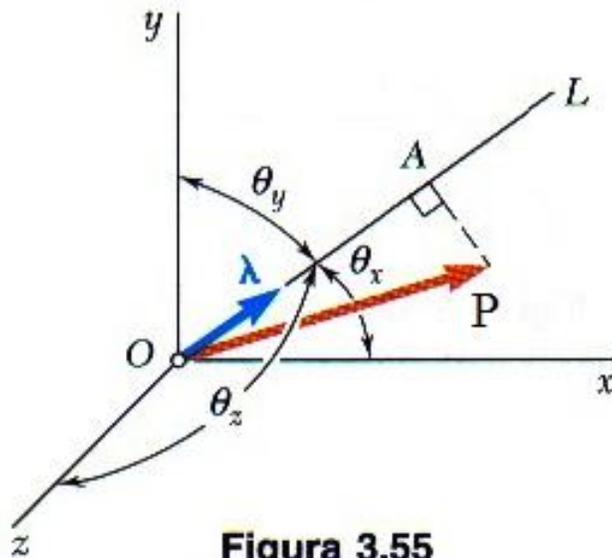


Figura 3.55

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

donde  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  y  $\theta_z$  representan los ángulos que forma el eje *OL* con los ejes coordenados.

El *producto triple escalar* de los tres vectores **S**, **P** y **Q** se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de **S** con el producto vectorial de **P** y **Q** {sección 3.10}. Se mostró que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

El *momento de una fuerza  $\mathbf{F}$  con respecto a un eje  $OL$*  [sección 3.11] se definió como la proyección  $OC$  sobre  $OL$  del momento  $\mathbf{M}_O$  de la fuerza  $\mathbf{F}$  (figura 3.56), esto es, se definió como el producto triple escalar del vector unitario  $\boldsymbol{\lambda}$ , el vector de posición  $\mathbf{r}$  y la fuerza  $\mathbf{F}$ :

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

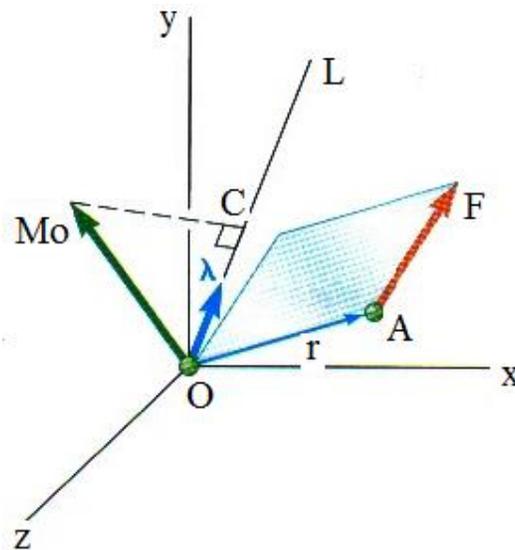


Figura 3.56

Con el uso de la forma de determinante para el producto triple escalar, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$  cosenos directores del eje  $OL$

$x, y, z =$  componentes de  $\mathbf{r}$

$F_x, F_y, F_z =$  componentes de  $\mathbf{F}$

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Se dice que *dos fuerzas  $\mathbf{F}$  y  $-\mathbf{F}$  que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* [sección 3.12]. Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector  $\mathbf{M}$  perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas  $F$  y la distancia perpendicular  $d$  entre sus líneas de acción (figura 3.57).

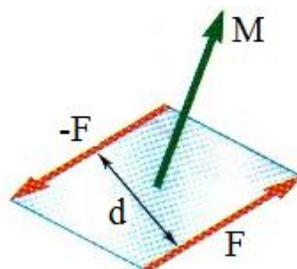


Figura 3.57

Dos pares que tienen el mismo momento  $\mathbf{M}$  son *equivalentes*, esto es, dichos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado [sección 3.13]. La suma de dos pares también es un par [sección 3.14] y el momento  $\mathbf{M}$  del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  de los pares originales [problema resuelto 3.6]. Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el *vector de par*, igual en magnitud y dirección al momento  $\mathbf{M}$  del par [sección 3.15]. Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen  $O$  y se puede separar en componentes (figura 3.58).

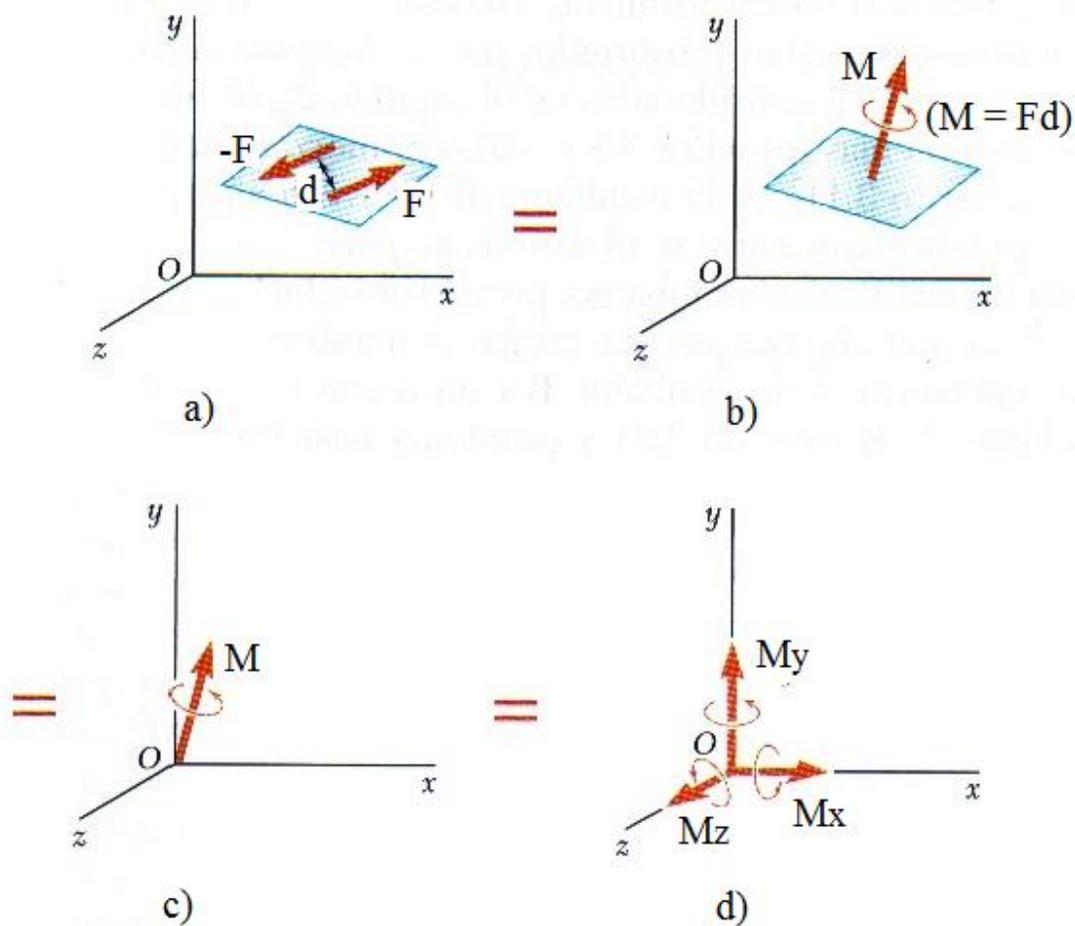


Figura 3.58

Cualquier fuerza  $\mathbf{F}$  que actúa en un punto  $A$  de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un *sistema fuerza-par* en un punto arbitrario  $O$  el cual consta de la fuerza  $\mathbf{F}$  aplicada en  $O$  y un par de momento  $\mathbf{M}_O$ , igual al momento de la fuerza  $\mathbf{F}$  en su posición original con respecto a  $O$  [sección 3.16]; se debe señalar que la fuerza  $\mathbf{F}$  y el vector de par  $\mathbf{M}_O$  siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.59).

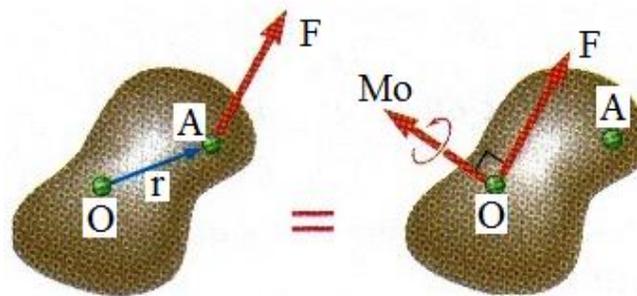


Figura 3.59

Se concluye que [sección 3.17] *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado  $O$* , reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en  $O$  (figura 3.60) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener a la fuerza resultante  $\mathbf{R}$  y al vector de par resultante  $\mathbf{M}_O^R$  [problemas resueltos 3.8 al 3.11]. Obsérvese que, en general, la resultante  $\mathbf{R}$  y el vector de par  $\mathbf{M}_O^R$  no serán perpendiculares entre sí.

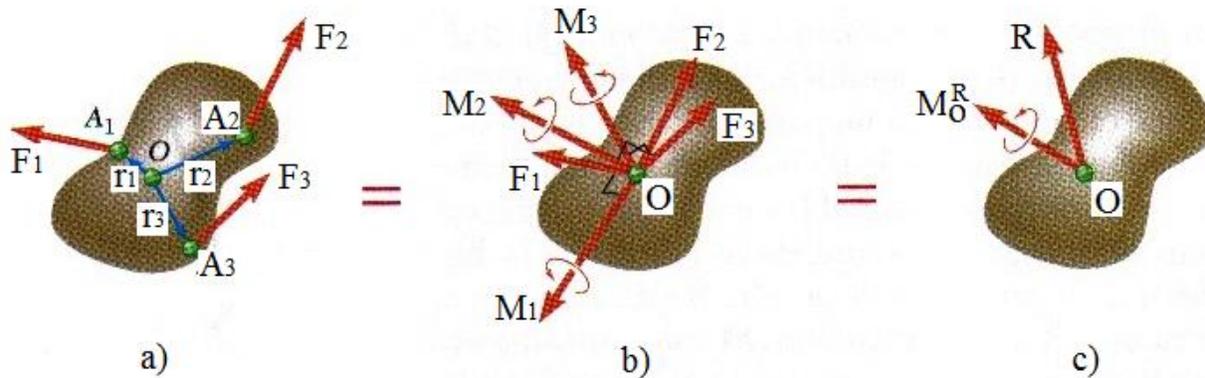


Figura 3.60

Con base en lo anterior, se concluyó [sección 3.18] que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$  y  $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots$ , son equivalentes si, y sólo si,*

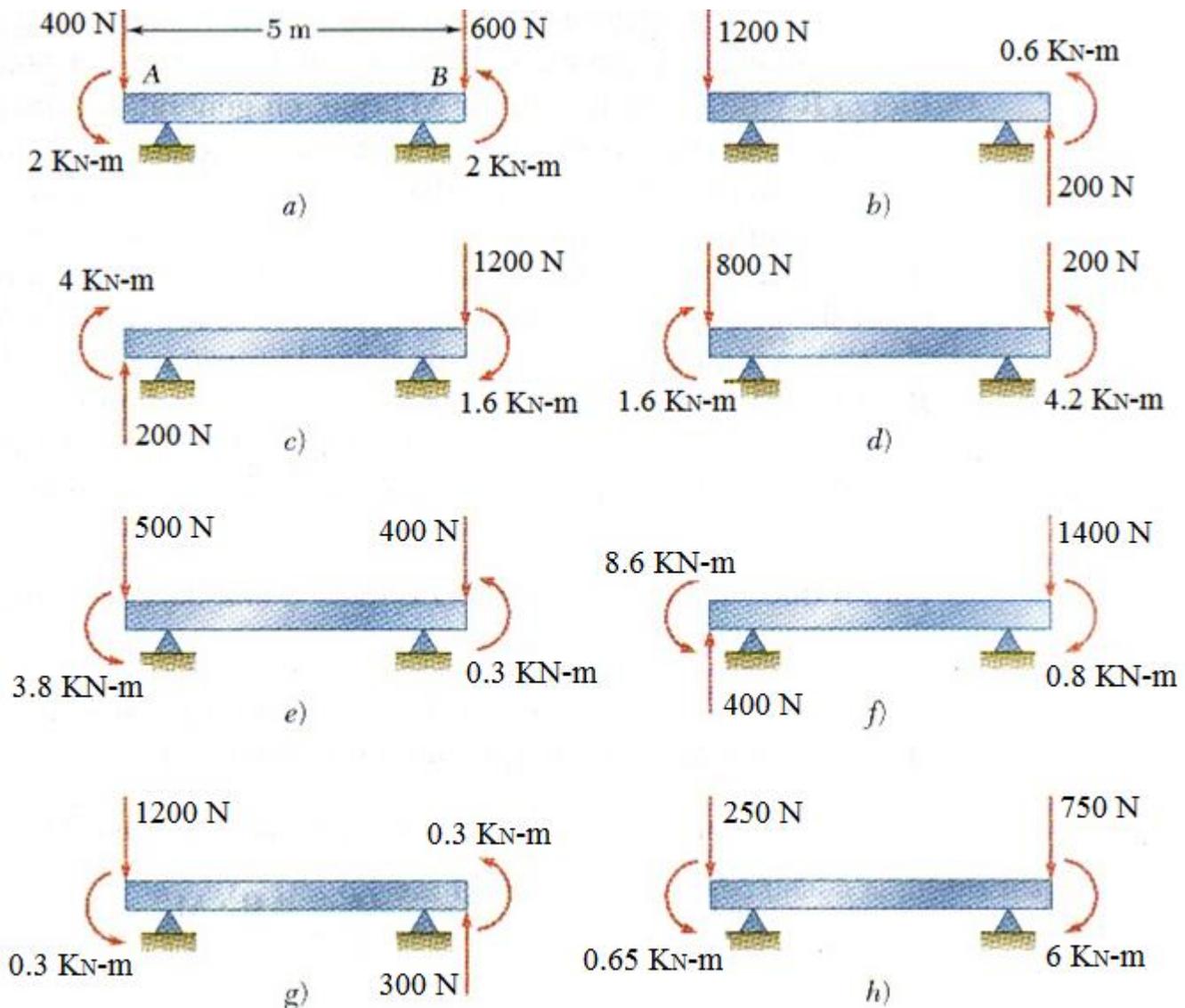
$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Si la fuerza resultante  $\mathbf{R}$  y el vector de par resultante  $\mathbf{M}_O^R$  son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en  $O$  puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante [sección 3.20]. Éste es el caso para sistemas que están constituidos por: *a) fuerzas concurrentes* (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b) fuerzas coplanares* [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o *c) fuerzas paralelas* [problema resuelto 3.11]. Si la resultante  $\mathbf{R}$  y el vector de par

$\mathbf{M}_O^R$  no son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede* ser reducido a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante  $\mathbf{R}$  y un vector de par  $\mathbf{M}_1$  dirigido a lo largo de  $\mathbf{R}$  [sección 3.21 y problema resuelto 3.12].

# Problemas

**3.98** Una viga de 5 m de longitud se somete a cierta diversidad de cargas. *a)* Reemplace cada tipo de carga con un sistema equivalente fuerza-par en el extremo *B* de la viga. *b)* ¿Cuáles de las cargas mostradas son equivalentes?



**Figura P3.98**

**3.99** Una viga de 5 m de longitud se carga de la forma indicada en la figura. Determine qué carga del problema 3.98 es equivalente a esta carga.

**3.100** Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la fuerza única equivalente y la distancia desde el extremo *A* hasta su línea de acción. Considere *a)*  $F_B = 200 \text{ N} \downarrow$ ,  $M_B = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$ , *b)*  $F_B = 100 \text{ N} \uparrow$ ,  $M_B = -600 \text{ N} \cdot \text{m}$ , *c)*  $F_B = 100 \text{ N} \downarrow$ ,  $M_B = -200 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

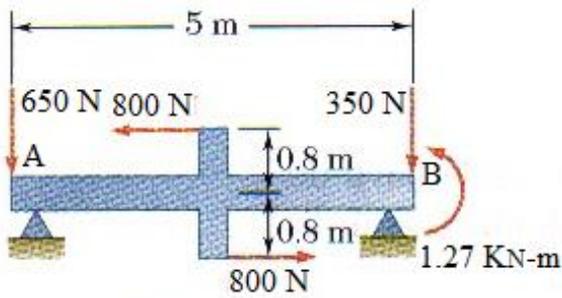


Figura P3.99

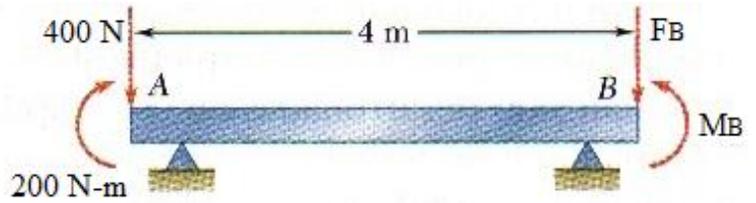


Figura P3.100

**3.101** Cinco sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas del bloque de metal moldeado de la forma que muestra la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a la fuerza  $\mathbf{F} = (2 \text{ lb})\mathbf{j}$  y al par de momento  $\mathbf{M} = (48 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (32 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$  ubicado en el punto A.

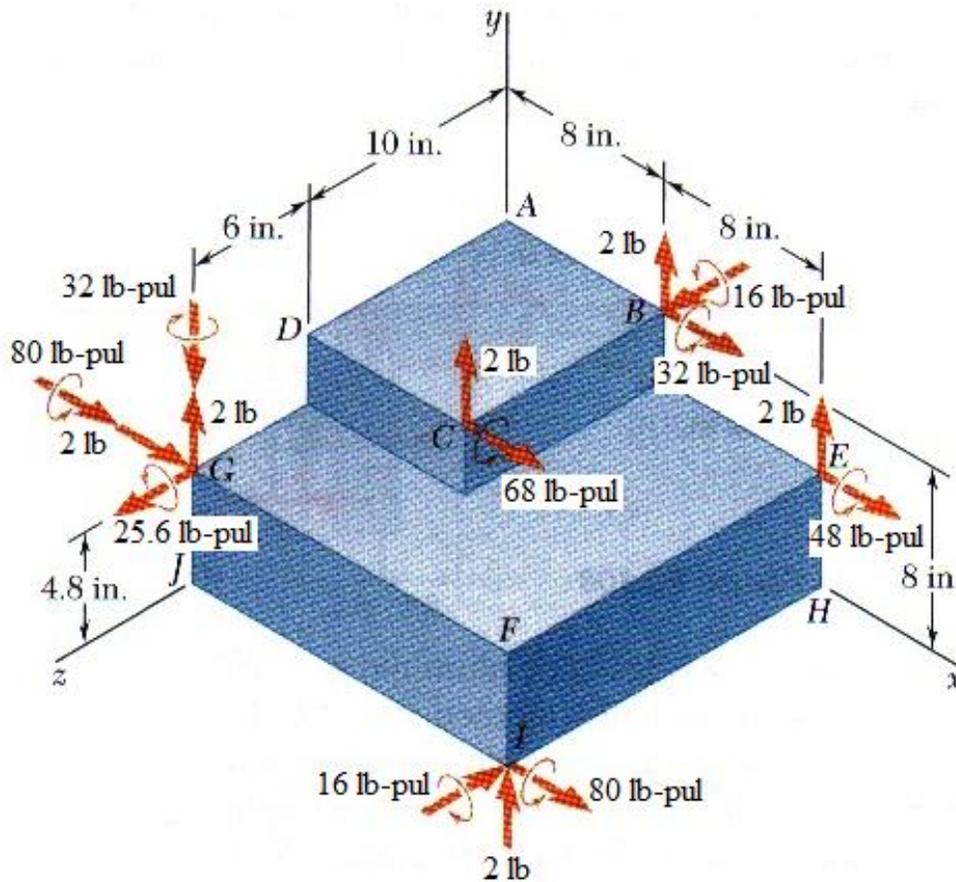


Figura P3.101

**3.102** Las masas de dos niños sentados en los extremos  $A$  y  $B$  de un balancín son de 38 y 29 kg, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de las fuerzas de los pesos de los tres niños debe pasar por  $C$ , y si la masa de la niña es de  $a)$  27 kg,  $b)$  24 kg.

**3.103** La figura muestra a tres excursionistas cruzando un puente. Si sus pesos en los puntos  $C$ ,  $D$  y  $E$  son de 200, 175 y 135 lb, respectivamente, determine  $a)$  la distancia horizontal desde  $A$  hasta la línea de acción de la resultante de los tres pesos si  $a = 3.3$  ft,  $b)$  el valor de  $a$  cuando las cargas sobre los soportes del puente en  $A$  y  $B$  son iguales.

**3.104** Al conducir un camión sobre una báscula, se determinó que las cargas sobre los ejes delantero y trasero eran de 18 y 12 kN, respectivamente, cuando el camión se encontraba vacío. Determine el peso y la ubicación de la carga más pesada que puede transportar el camión si la carga sobre cada eje no debe sobrepasar de 40 kN.

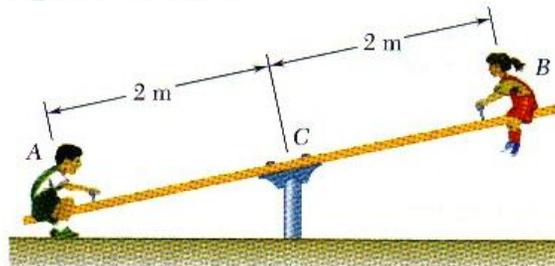


Figura P3.102

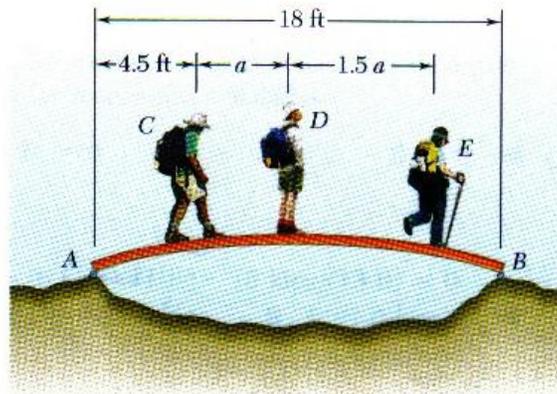


Figura P3.103

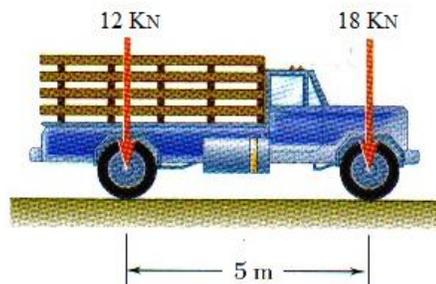
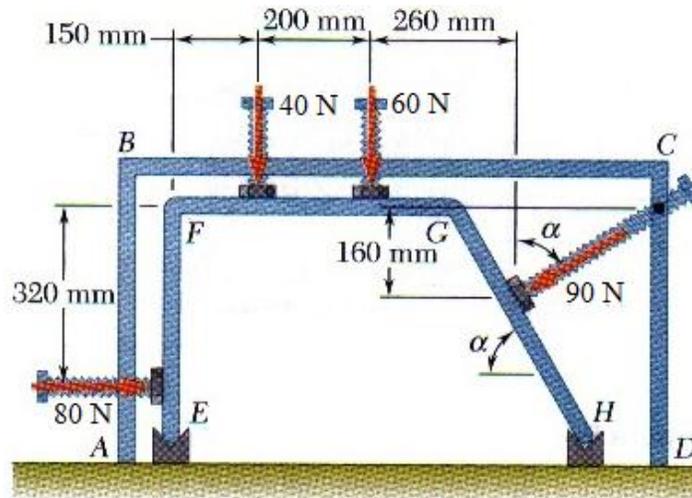


Figura P3.104

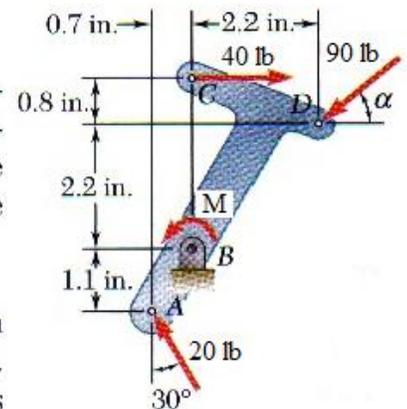
**3.105** El arreglo  $ABCD$  se utiliza para aplicar fuerzas a modelos fotoelásticos de componentes mecánicos. Para el modelo y las fuerzas que se muestran en la figura, considere que  $\alpha = 50^\circ$  y determine  $a)$  la resultante de las fuerzas aplicadas,  $b)$  el punto donde la línea de acción de la resultante interseca una línea que pasa por los puntos  $F$  y  $G$ .

**3.106** El arreglo  $ABCD$  se utiliza para aplicar fuerzas a modelos fotoelásticos de componentes mecánicos. Para el modelo y las fuerzas que se muestran en la figura,  $a)$  determine el valor de  $\alpha$  para que la línea de acción de la resultante de las fuerzas aplicadas pase a través del modelo, 100 mm a la derecha de la fuerza de 40 N;  $b)$  encuentre la resultante de las fuerzas aplicadas.



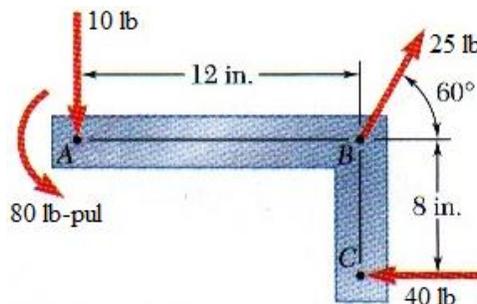
**Figura P3.105 y P3.106**

**3.107** Cuando el par  $M$  se aplica al eslabón de un mecanismo, las fuerzas resultantes ejercidas sobre el eslabón por una guía y las conexiones son como se muestran en la figura. Determine  $a)$  los valores de  $M$  y  $\alpha$  de manera que las fuerzas y el par aplicados puedan reducirse a una sola fuerza equivalente cuya línea de acción pase por los puntos  $B$  y  $D$ ,  $b)$  la fuerza equivalente.



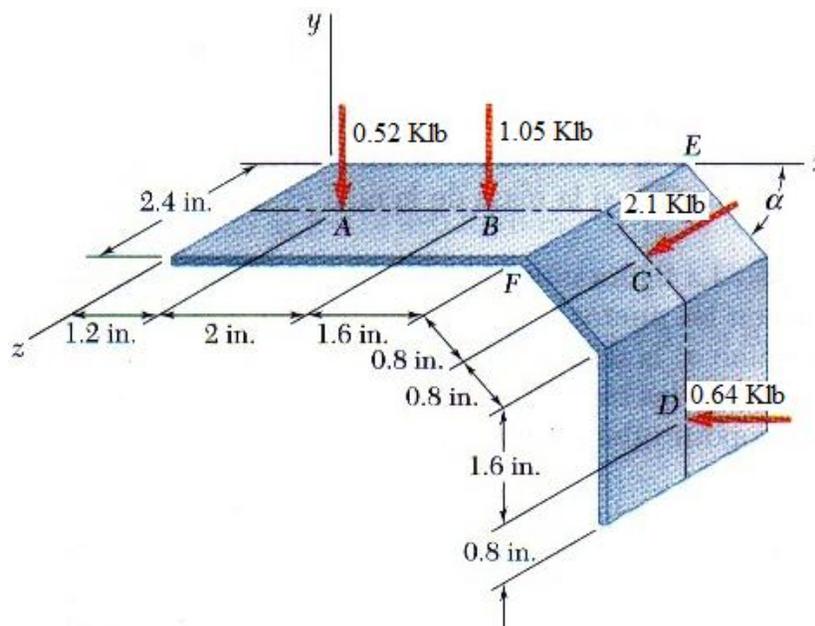
**Figura P3.107**

**3.108** Las tres fuerzas y el par que se muestran en la figura se aplican a una ménsula angular.  $a)$  Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas.  $b)$  Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca las líneas  $AB$  y  $BC$ .



**Figura P3.108**

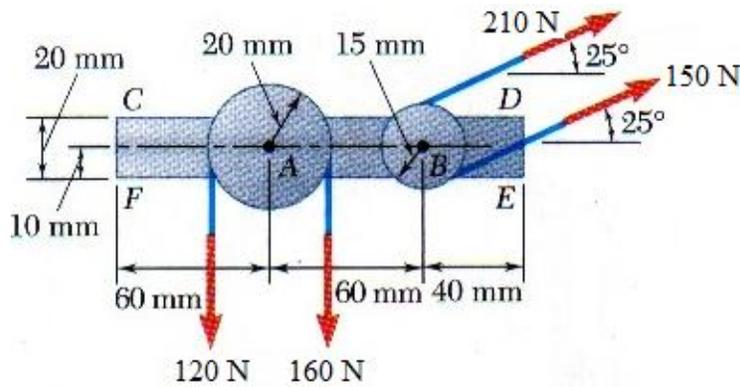
**3.109** En una pieza delgada de aluminio se perforan simultáneamente cuatro orificios, las perforaciones ejercen sobre la hoja las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas son perpendiculares a las superficies de la pieza, determine *a*) la resultante de las fuerzas aplicadas cuando  $\alpha = 45^\circ$  y el punto de intersección de la línea de acción de dicha resultante con la línea que pasa por los puntos *A* y *B*; *b*) el valor de  $\alpha$  si la línea de acción de la resultante debe pasar por el doblez *EF*.



**Figura P3.109 y P3.110**

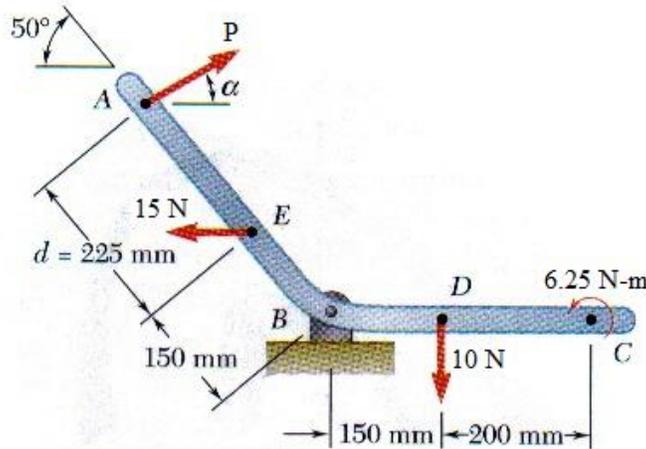
**3.110** En una pieza delgada de aluminio se perforan simultáneamente cuatro orificios, las perforaciones ejercen sobre la hoja las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas son perpendiculares a las superficies de la pieza, determine *a*) el valor de  $\alpha$  si la resultante de las fuerzas aplicadas es paralela a la fuerza de 2.1 kips, *b*) la correspondiente resultante de las fuerzas aplicadas y el punto de intersección de su línea de acción con la línea que une a los puntos *A* y *B*.

**3.111** Las poleas *A* y *B* se montan sobre el soporte *CDEF*. La tensión en cada lado de las dos bandas es la que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas con una sola fuerza equivalente y determine dónde se interseca su línea de acción con el borde inferior del soporte.



**Figura P3.111**

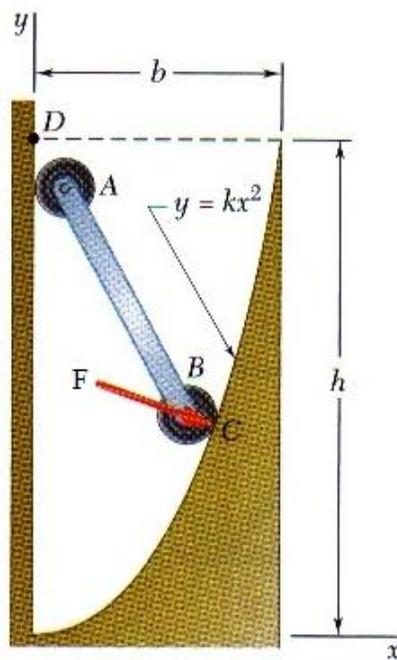
**3.112** Tres fuerzas y un par actúan sobre la manivela  $ABC$ . Para  $P = 25$  N y  $\alpha = 40^\circ$ , *a)* determine la resultante del sistema de fuerzas dado, *b)* localice el punto de intersección de la línea de acción de la resultante y la línea que une a los puntos  $B$  y  $C$ , *c)* localice el punto de intersección de la línea de acción de la resultante y la línea que pasa por los puntos  $A$  y  $B$ .



**Figura P3.112 y P3.113**

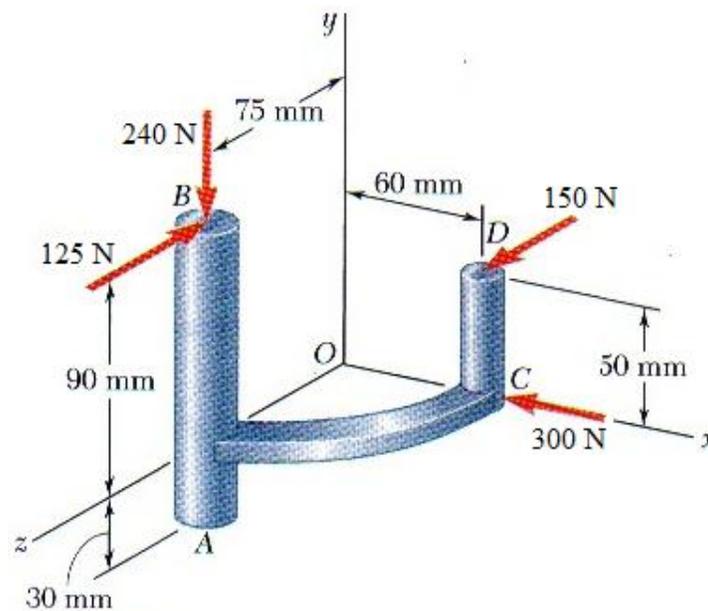
**3.113** Tres fuerzas y un par actúan sobre la manivela  $ABC$ . Determine el valor de  $d$  si el sistema de fuerzas dado debe ser equivalente a cero en *a)* el punto  $B$ , *b)* el punto  $D$ .

**3.114** Cuando el seguidor  $AB$  rueda a lo largo de la superficie del elemento  $C$ , ejerce una fuerza  $\mathbf{F}$  constante y perpendicular a la superficie. *a)* Reemplace  $\mathbf{F}$  con un sistema equivalente fuerza-par en el punto  $D$ . *b)* Para  $b = 1$  ft y  $h = 2$  ft, determine el valor de  $x$  para el cual el momento del sistema equivalente fuerza-par en  $D$  es máximo.



**Figura P3.114**

**3.115** Un componente de máquina se somete a las fuerzas mostradas en la figura, cada una de las cuales es paralela a uno de los ejes coordenados. Reemplace estas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en A.



**Figura P3.115**

**3.116** Mientras se lija un bloque de madera, éste ejerce sobre el disco del esmeril una fuerza  $\mathbf{F}$  con magnitud de 1.8 lb. Si las fuerzas de la banda ejercidas sobre la polea de 5 in. de diámetro pertenecen a un plano paralelo a  $yz$ , reemplace  $\mathbf{F}$  y las fuerzas de las bandas con un sistema equivalente fuerza-par en O.

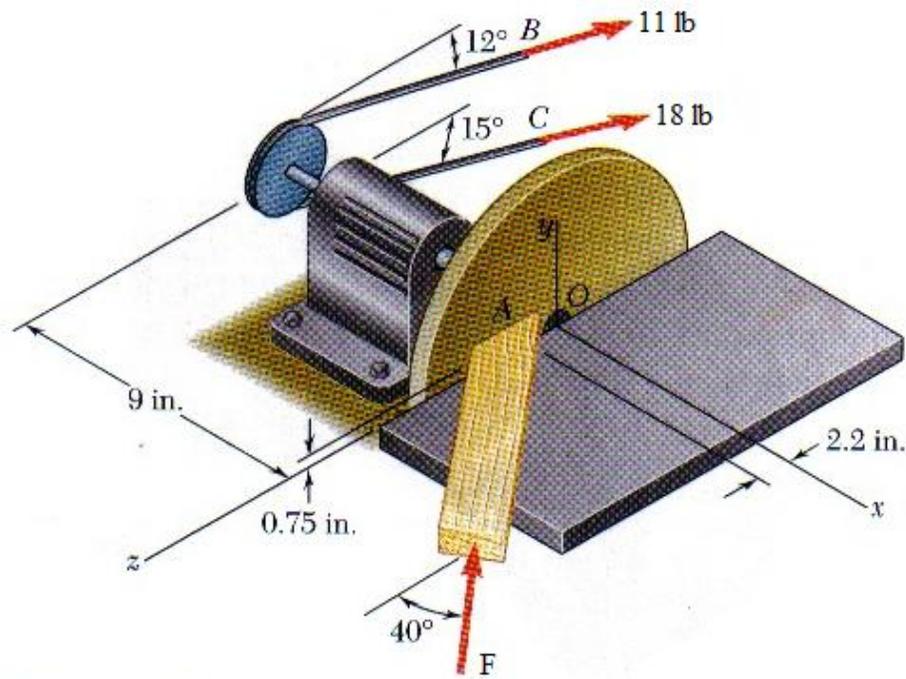


Figura P3.116

**3.117** El propietario de un automóvil usa la llave  $ABC$  para aflojar el perno ubicado en  $C$ . La longitud del mango  $AB$  es de  $372 \text{ mm}$ , y el automovilista aplica las fuerzas  $A$  y  $B$  sobre la llave. Si estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en  $O$  que consta de la fuerza  $\mathbf{R} = -(10 \text{ N})\mathbf{i} + (6 \text{ N})\mathbf{k}$  y el par  $\mathbf{M}_O = (60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (0.05 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (10 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ , determine las fuerzas aplicadas en  $A$  y  $B$  cuando  $A_x = 2 \text{ N}$ .

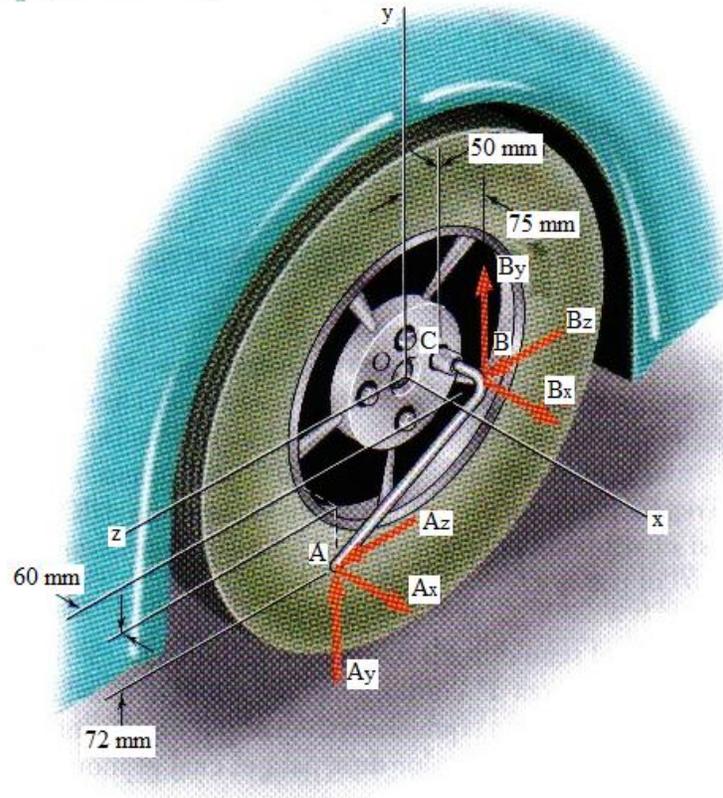
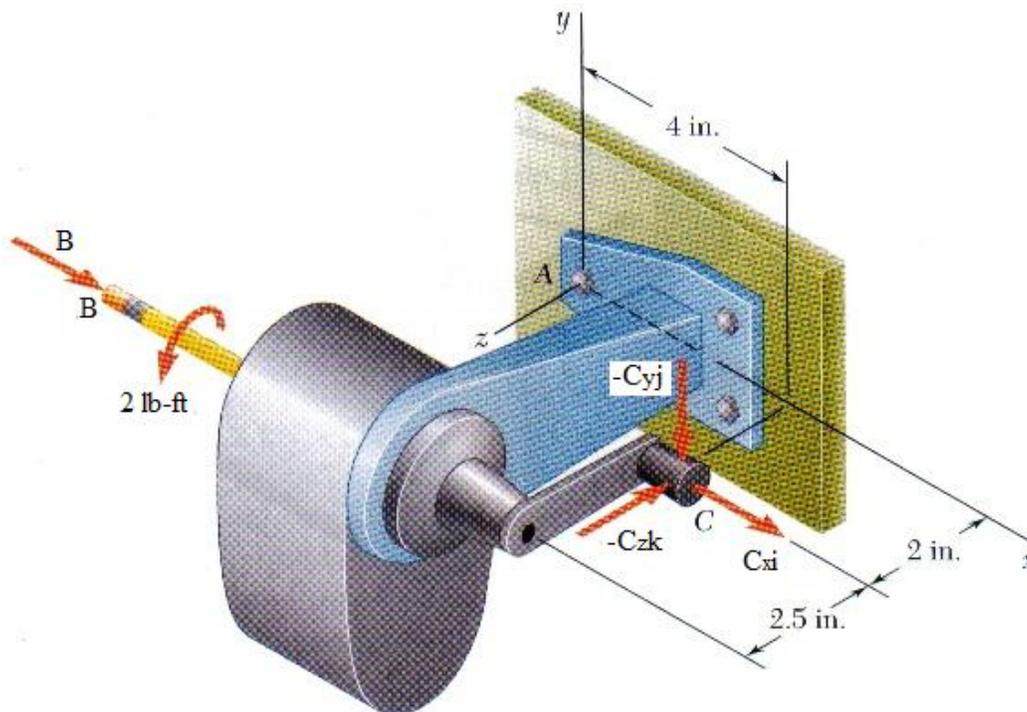


Figura P3.117

**3.118** Al usar un sacapuntas manual, un estudiante ejerce sobre el mecanismo las fuerzas y el par que se muestran en la figura. *a)* Determine las fuerzas ejercidas en *B* y en *C* si las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en *A* que consta de la fuerza  $\mathbf{R} = (3.9 \text{ lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (1.1 \text{ lb})\mathbf{k}$  y el par  $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1.5 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (1.1 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$ . *b)* Encuentre los valores correspondientes de  $R_y$  y  $M_x$ .

**3.119** Un tramo de chimenea de un horno está unido al techo en el punto *A*. Mientras mantiene el extremo libre de la chimenea en *F*, un trabajador empuja en *E* y jala en *F* para alinear el extremo *E* con el horno. Si la fuerza de 50 N aplicada en *F* yace en un plano paralelo al plano *yz*, determine *a)* el ángulo  $\alpha$  que forma la fuerza en *F* con la horizontal si el ducto *AB* no debe tender a rotar respecto a la vertical; determine *b)* el sistema fuerza-par en *B* equivalente al sistema de fuerzas dado cuando se satisface esta condición.



**Figura P3.118**

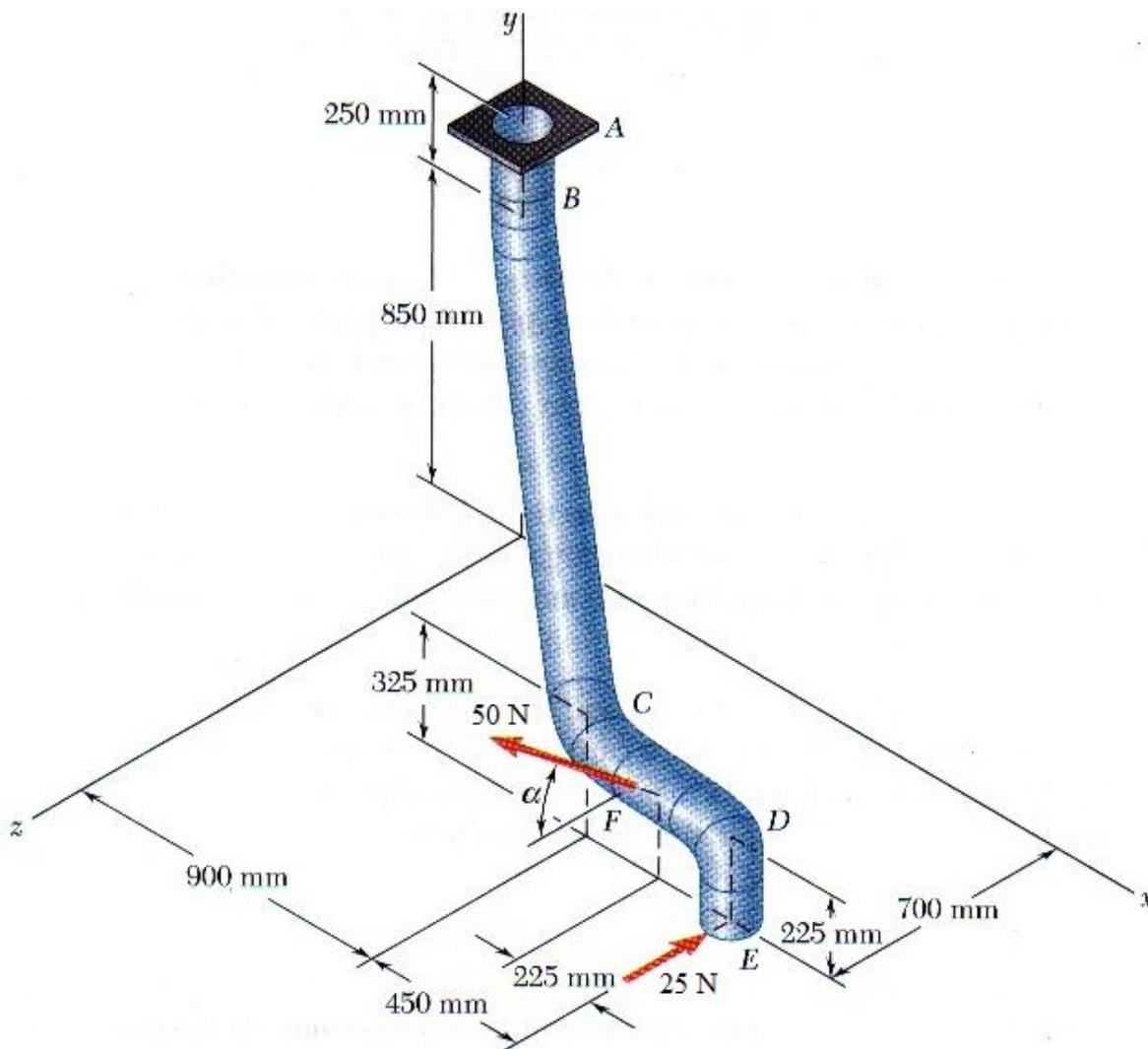
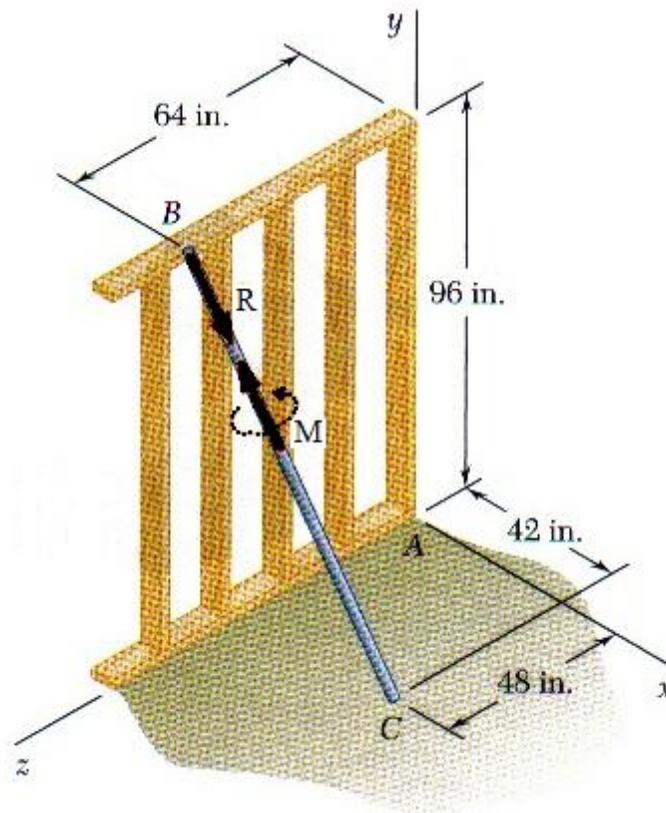


Figura P3.119 y P3.120

**3.120** Un tramo de una chimenea para horno está unido al techo en el punto  $A$ . Mientras mantiene el extremo libre de la chimenea en  $F$ , un trabajador empuja en  $E$  y jala en  $F$  para alinear el extremo  $E$  con el horno. Si la fuerza de  $50\text{ N}$  aplicada en  $F$  yace en un plano paralelo al plano  $yz$ , y  $\alpha = 60^\circ$ , *a)* reemplace el sistema de fuerzas dado con un sistema equivalente fuerza-par en  $C$ , *b)* determine si el ducto  $CD$  tenderá a rotar a favor o en contra del sentido de las manecillas del reloj con relación al codo  $C$ , visto desde  $D$ .

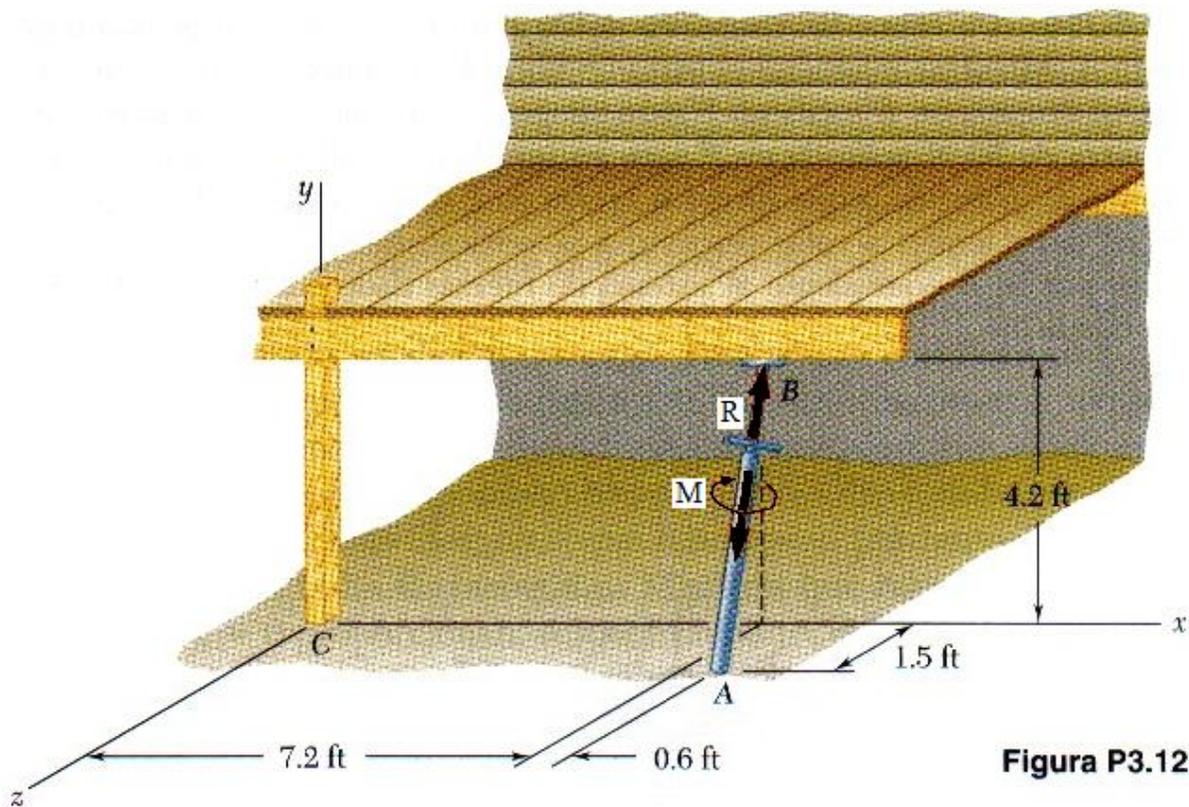
**3.121** Un puntal ajustable  $BC$  es utilizado para colocar una pared en posición vertical, se ejerce un sistema fuerza-par sobre la pared. Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema fuerza-par equivalente en  $A$ , de manera que  $R = 21.2\text{ lb}$  y  $M = 13.25\text{ lb} \cdot \text{ft}$ .



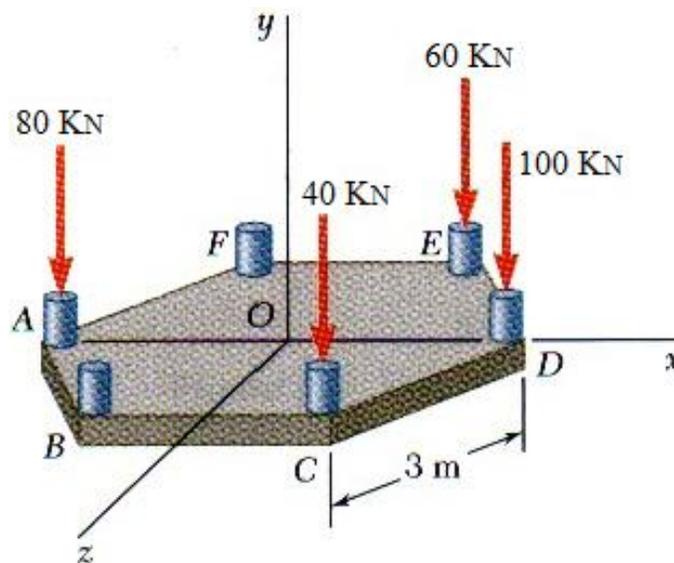
**Figura P3.121**

**3.122** Mientras se repara y nivela, el frente de un pórtico caído se sostiene mediante un gato de tornillo. Conforme el gato se expande ejerce sobre el pórtico el sistema fuerza-par mostrado, donde  $R = 60 \text{ lb}$  y  $M = 22.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ . Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema equivalente fuerza-par en  $C$ .

**3.123** Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 3 m soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como indica la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.



**Figura P3.122**



**Figura P3.123 y P3.124**

**3.124** Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 3 m soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de las cargas adicionales que deben aplicarse en  $B$  y  $F$  si la resultante de las seis cargas debe pasar por el centro de la base.

**3.125** Las fuerzas mostradas en la figura son la resultante de las cargas verticales hacia abajo ejercidas sobre las secciones del techo plano de una construcción, y se deben a la nieve acumulada. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de estas cuatro cargas.

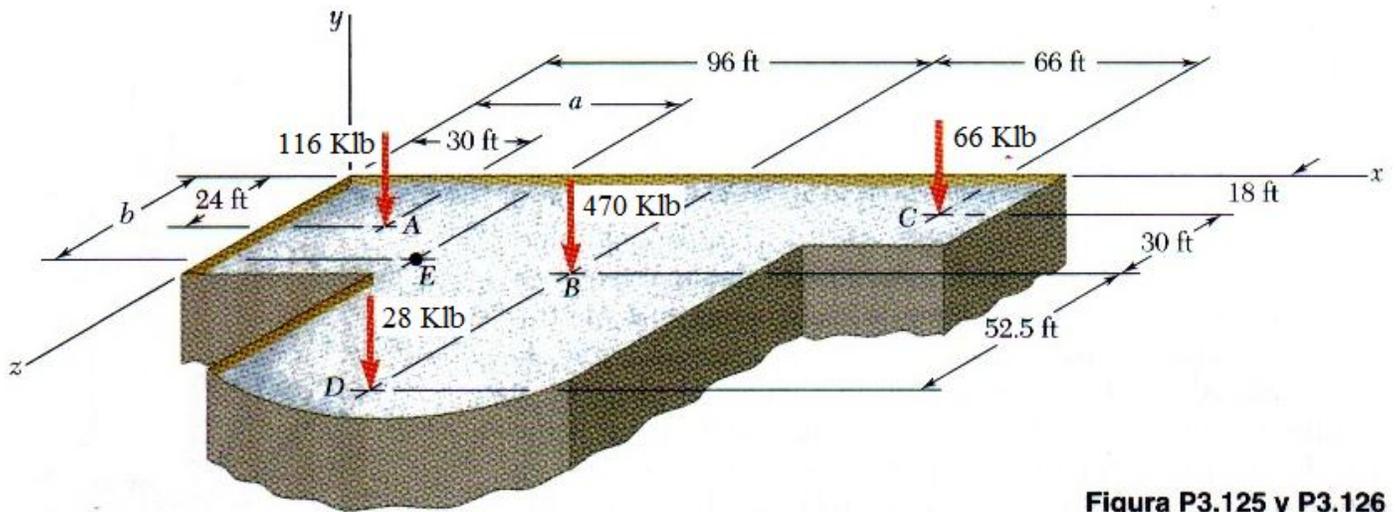
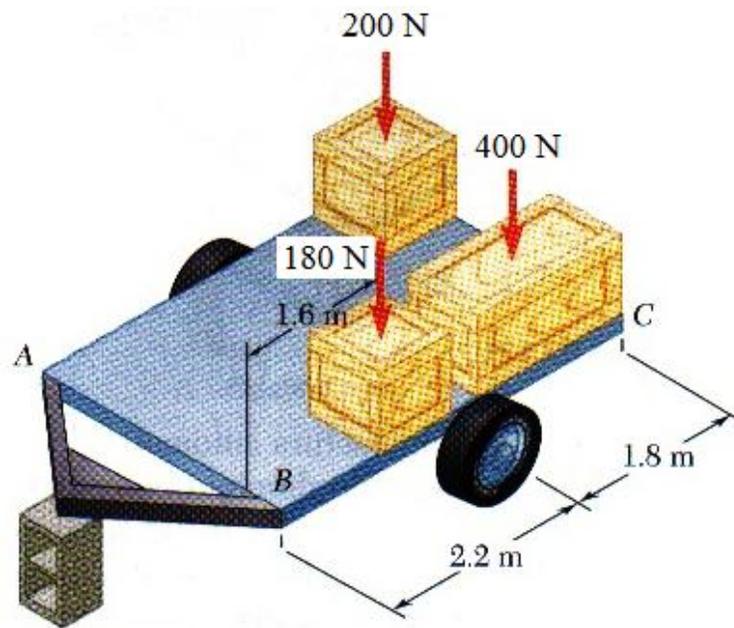


Figura P3.125 y P3.126

**3.126** Las fuerzas mostradas en la figura son la resultante de las cargas verticales hacia abajo ejercidas sobre las secciones del techo plano de una construcción, y se deben a la nieve acumulada. Si la nieve representada por la fuerza de 116 kips se remueve de manera que actúe en el punto  $E$ , determine  $a$  y  $b$  si el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas está entonces en  $B$ .

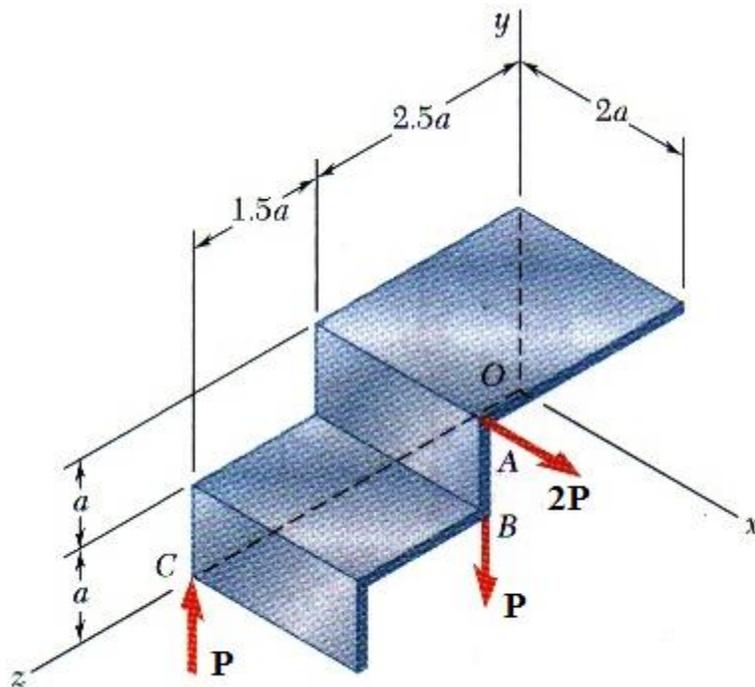
**\*3.127** Un grupo de estudiantes carga la plataforma de un tráiler de  $2 \times 4$  m con dos cajas de  $0.6 \times 0.6 \times 0.6$  m y con una caja de  $0.6 \times 0.6 \times 1.2$  m. Las cajas se colocan en la parte posterior del tráiler de manera que queden alineadas con la parte trasera y los costados de éste. Determine la carga mínima que los estudiantes deben colocar en una caja adicional de  $0.6 \times 0.6 \times 1.2$  m y el sitio donde deben asegurarla en el tráiler si ninguna parte de las cajas debe rebasar los costados. Además, suponga que cada caja está cargada uniformemente y que la línea de acción de la resultante del peso de las cuatro cajas pasa por el punto de intersección de las líneas centrales y el eje del tráiler. (*Sugerencia:* Tome en cuenta que las cajas pueden colocarse en los extremos o los costados.)



**Figura P3.127**

**\*3.128** Resuelva el problema 3.127 si los estudiantes desean colocar todo el peso posible en una cuarta caja y que al menos uno de los lados de ésta coincida con un costado del tráiler.

**\*3.129** Una pieza de metal laminado sometida a tres fuerzas se dobla en la forma que muestra la figura. Reemplace las tres fuerzas con una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la magnitud y la dirección de la resultante  $\mathbf{R}$ , *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano  $yz$ .



**Figura P3.129**

**\*3.130** Un bloque de madera está sometido a tres fuerzas de igual magnitud  $P$  en las direcciones que muestra la figura. Reemplace las tres fuerzas con una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante  $\mathbf{R}$ , *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano  $xy$ .

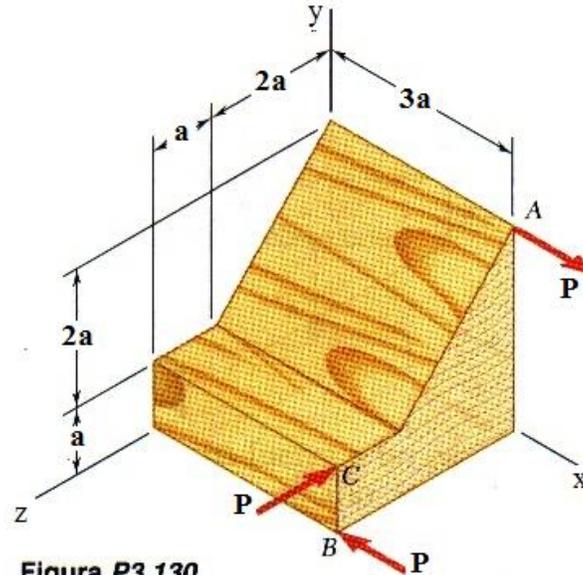


Figura P3.130

**\*3.131** Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos para sujetar una placa de metal a un bloque de madera. Reduzca las fuerzas y los pares a una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la fuerza resultante  $\mathbf{R}$ , *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano  $xz$ .

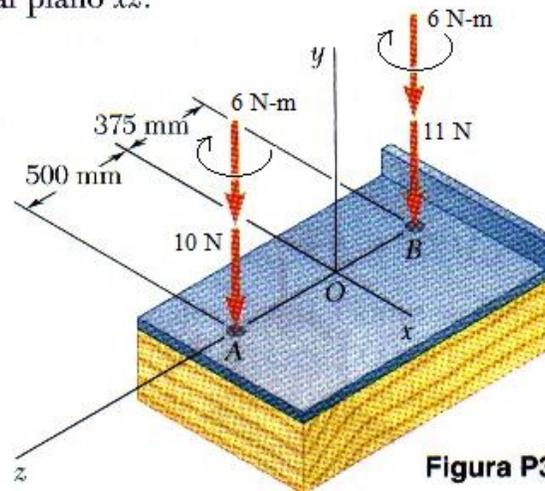
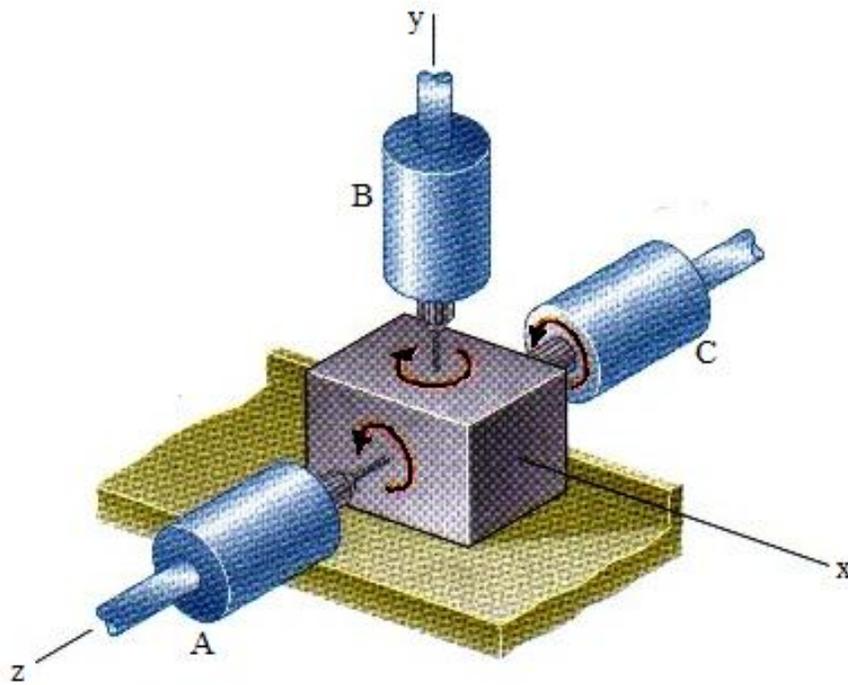


Figura P3.131

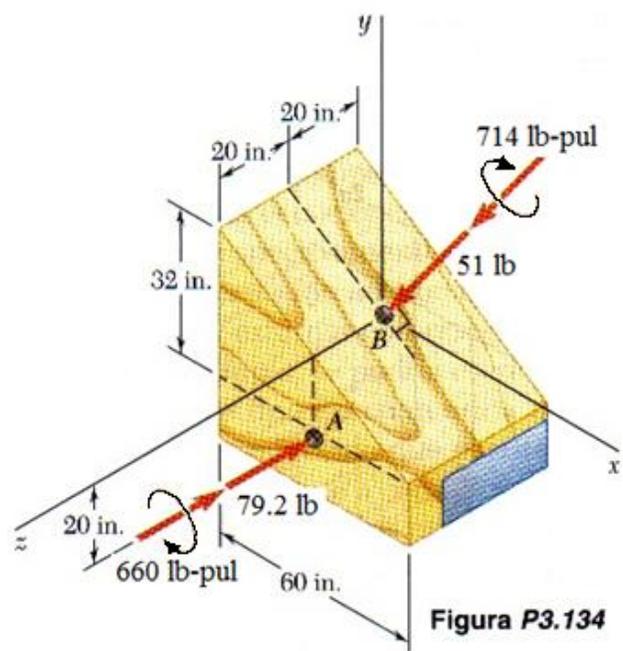
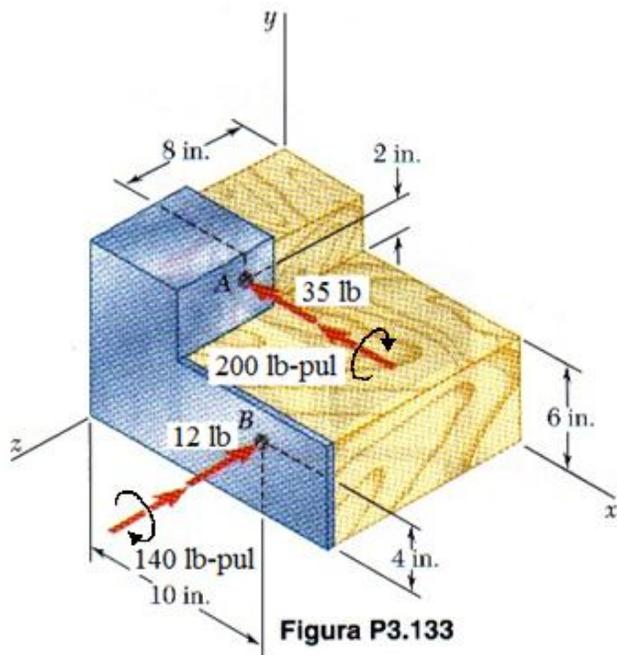
**\*3.132** En un proceso de manufactura automatizado, se perforan tres orificios simultáneamente en un bloque de aluminio, como indica la figura. Cada broca ejerce una fuerza de 50 N y un par de  $0.100 \text{ N} \cdot \text{m}$  sobre el bloque. Si la broca A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj y las brocas B y C lo hacen en el mismo sentido (según se observa para cada broca), reduzca las fuerzas y los pares ejercidos por las brocas sobre el bloque a una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la fuerza resultante  $\mathbf{R}$ , *b*) el paso de la llave de torsión, *c*) el punto donde la llave de torsión interseca al plano  $xz$ .



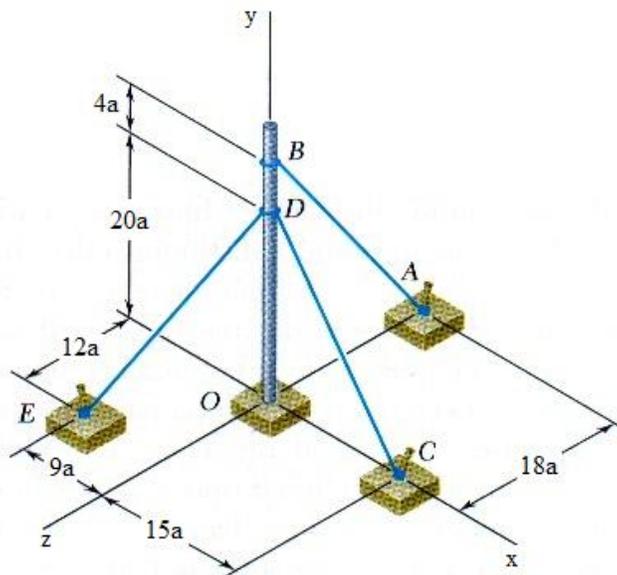
**Figura P3.132**

**\*3.133** Dos pernos *A* y *B* se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente, y determine *a*) la resultante  $\mathbf{R}$ , *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de esta llave interseca al plano *yz*.

**\*3.134** Dos pernos *A* y *B* se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente, y determine *a*) la resultante  $\mathbf{R}$ , *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de esta llave interseca al plano *xz*.



**\*3.135** Un asta bandera se sostiene mediante tres cables. Si la tensión en los cables tiene la misma magnitud  $P$ , reemplace las fuerzas ejercidas sobre el asta por una llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante  $\mathbf{R}$ , *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano  $xz$ .



**Figura P3.135**

**\*3.136 y \*3.137** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente  $\mathbf{R}$ . Si esto es posible, determine  $\mathbf{R}$  y el punto donde la línea de acción de  $\mathbf{R}$  interseca al plano  $yz$ . Si la reducción no puede lograrse, reemplace el sistema dado por una llave de torsión equivalente y determine su resultante, su paso y el punto donde su eje interseca al plano  $yz$ .

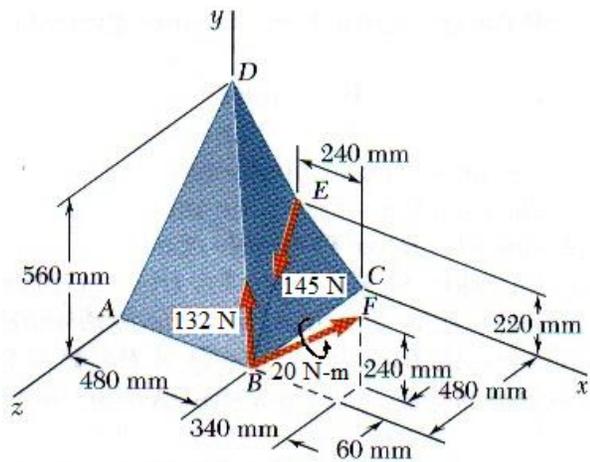


Figura P3.136

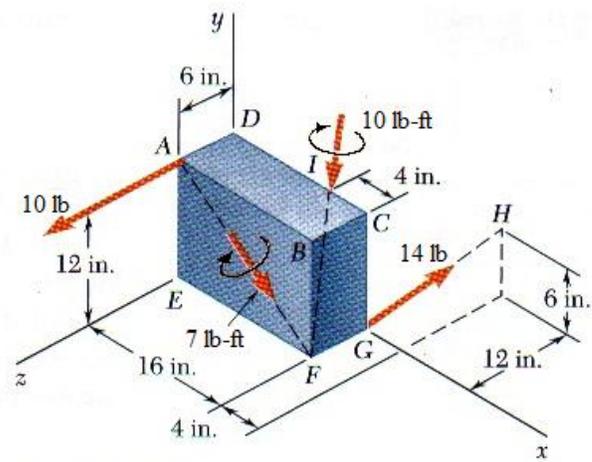


Figura P3.137

## Problemas de repaso

**3.142** Se requiere una fuerza vertical de 800 N para remover, de la tabla mostrada, el clavo que está en  $C$ . Un instante antes de que el clavo comience a salir, determine  $a)$  el momento respecto a  $B$  de la fuerza ejercida sobre el clavo,  $b)$  la magnitud de la fuerza  $\mathbf{P}$  que genera el mismo momento respecto a  $B$  si  $\alpha = 10^\circ$  y  $c)$  la fuerza  $\mathbf{P}$  mínima que genera el mismo momento respecto a  $B$ .

**3.143** Un mecánico automotriz usa el tramo de tubo  $AB$  como palanca para tensar la banda de la polea de un alternador. Cuando el mecánico presiona hacia abajo en el punto  $A$ , se genera una fuerza de 580 N sobre el alternador en  $B$ . Determine el momento de la fuerza respecto al perno  $C$  si su línea de acción pasa por  $O$ .

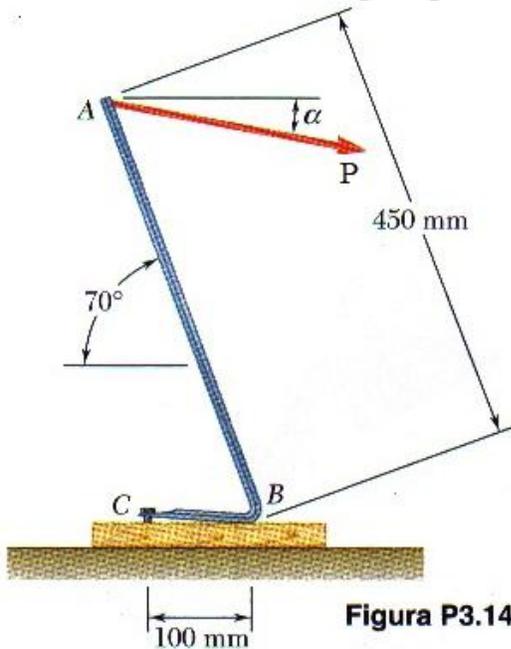


Figura P3.142

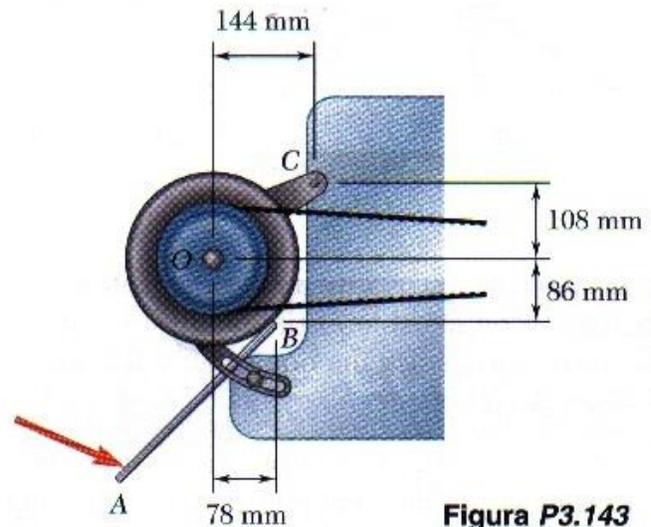
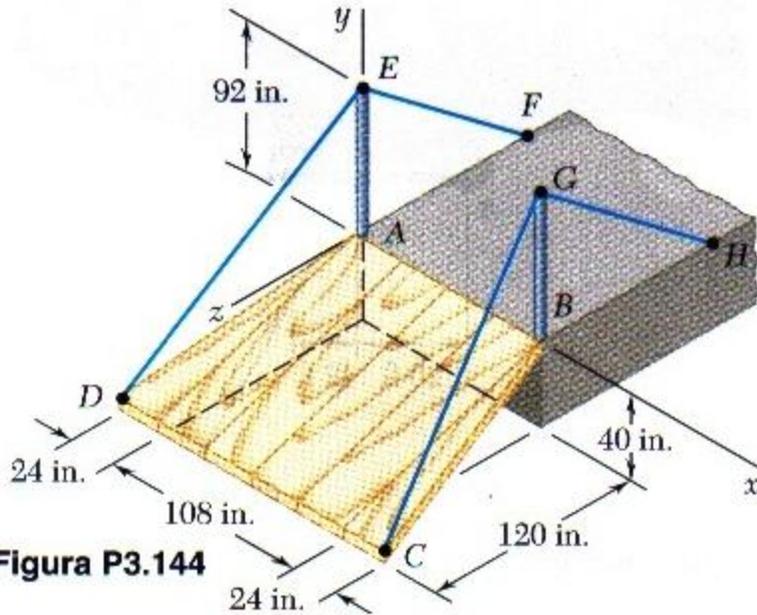


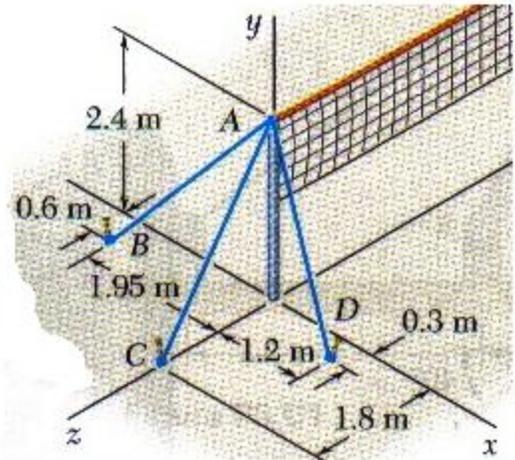
Figura P3.143

**3.144** La rampa  $ABCD$  se sostiene mediante cables colocados en las esquinas  $C$  y  $D$ . Si la tensión que se ejerce en cada uno de los cables es de 360 lb, determine el momento respecto a  $A$  de la fuerza ejercida por *a*) el cable en  $D$ , *b*) el cable en  $C$ .

**3.145** Determine los ángulos formados por los alambres  $AC$  y  $AD$  de la red de voleibol que se muestra en la figura.

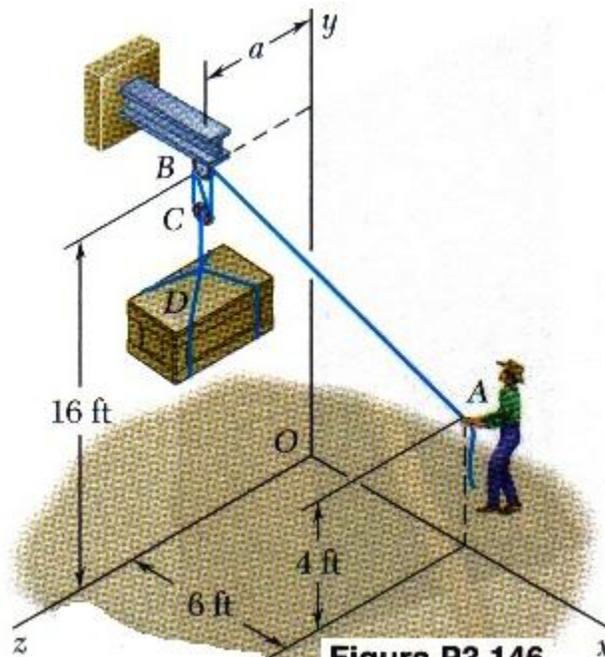


**Figura P3.144**



**Figura P3.145**

**3.146** Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto sujetándolos a la parte inferior de la viga  $I$  mediante el gancho colocado en  $B$ . Si los momentos, respecto a los ejes  $y$  y  $z$ , de la fuerza ejercida en  $B$  por el tramo  $AB$  de la cuerda son, respectivamente, de  $100 \text{ lb} \cdot \text{ft}$  y de  $-400 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ , determine la distancia  $a$ .



**Figura P3.146**

**3.147** La placa triangular  $ABC$  está sostenida por apoyos de cuenca y bola (rótula) colocados en  $B$  y  $D$ , y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables  $AE$  y  $CF$ . Si la fuerza ejercida por el cable  $CF$  en  $C$  es de 132 lb, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos  $D$  y  $B$ .

**3.148** La tensión presente en el cable que está unido al extremo  $C$  de un aguilón ajustable  $ABC$  es de 1 000 N. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en  $C$  con un sistema equivalente fuerza-par en  $a)$  el punto  $A$ ,  $b)$  el punto  $B$ .

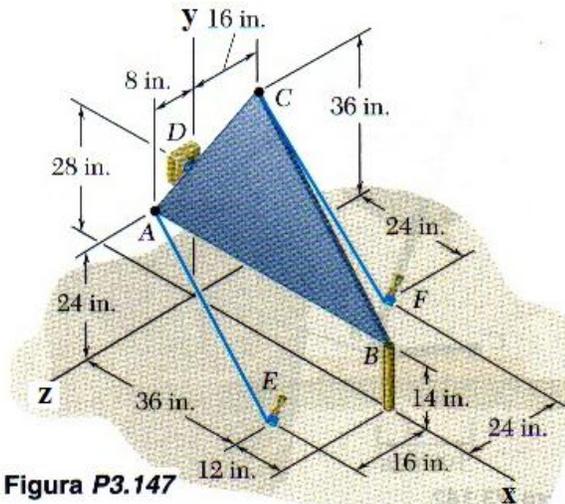


Figura P3.147

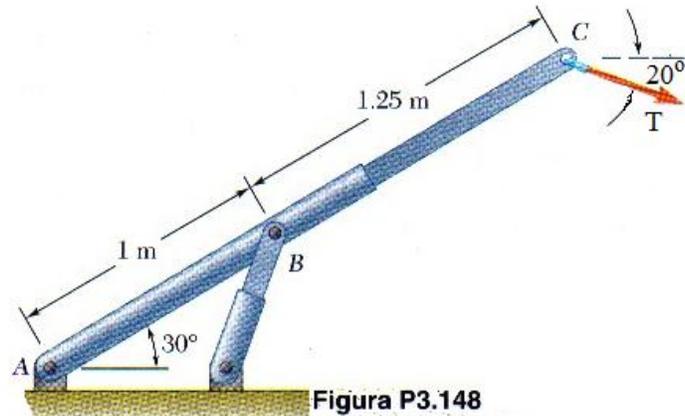


Figura P3.148

**3.149** Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la cabina en el punto  $B$ . Si la tensión en el cable es de 250 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable en  $B$  con un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en  $A$  y  $C$ .

**3.150** Para mantener cerrada una puerta, se usa una tabla de madera colocada entre el piso y la perilla de la puerta. La fuerza que la tabla ejerce en  $B$  es de 45 lb y está dirigida a lo largo de la línea  $AB$ . Reemplace esta fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en  $C$ .

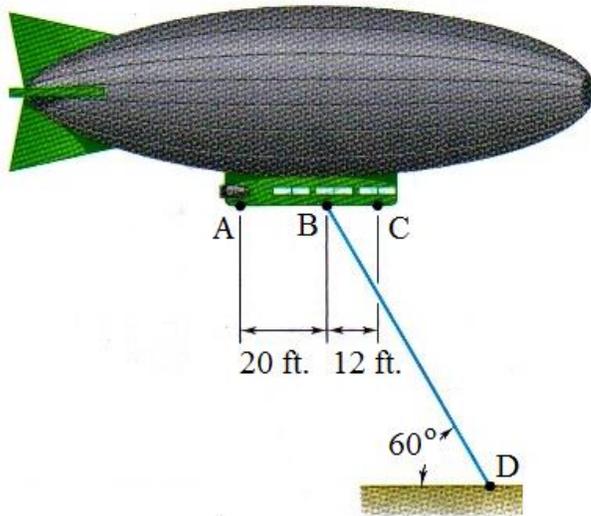


Figura P3.149

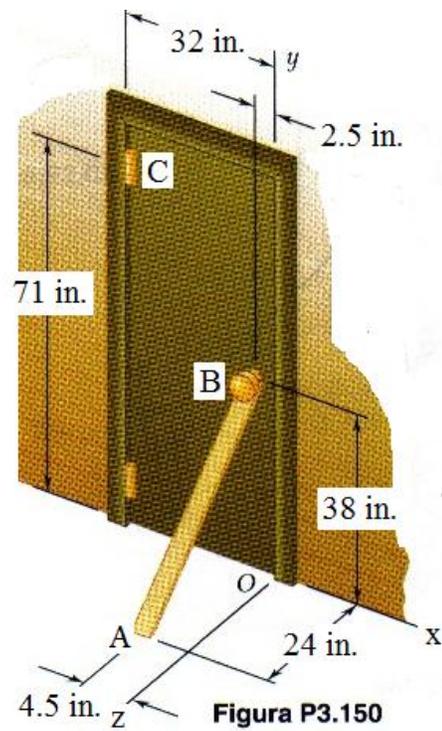


Figura P3.150

**3.151** El engrane C está unido rígidamente al brazo AB. Si las fuerzas y los pares mostrados se pueden reducir a una sola fuerza equivalente en A, determine dicha fuerza y la magnitud del par **M**.

**3.152** Un buje de plástico se inserta en un cilindro de metal de 3 in. de diámetro como indica la figura, la herramienta de inserción ejerce fuerzas sobre la superficie del cilindro. Cada fuerza es paralela a uno de los ejes coordenados. Reemplace estas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en C.

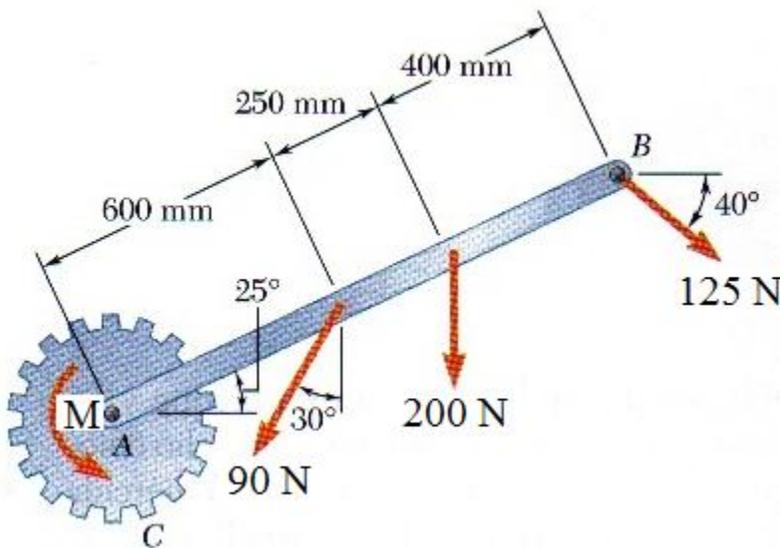


Figura P3.151

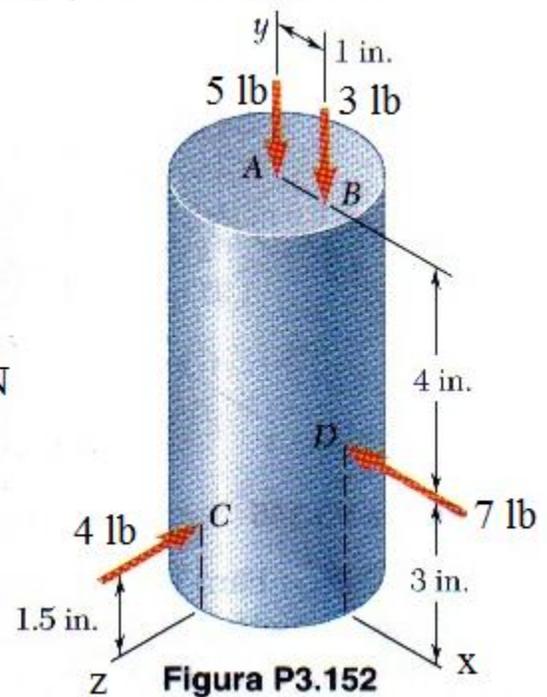


Figura P3.152

**3.153** Tres niños se encuentran parados en una balsa de  $15 \times 15$  ft. Los pesos de los niños situados, respectivamente, en  $A$ ,  $B$  y  $C$  son de 85, 60 y 90 lb. Si una cuarta niña con peso de 95 lb se sube a la balsa, determine dónde debe estar parada si los otros niños permanecen en la posición que se muestra y si la línea de acción de la resultante del peso de los cuatro niños debe pasar por el centro de la balsa.

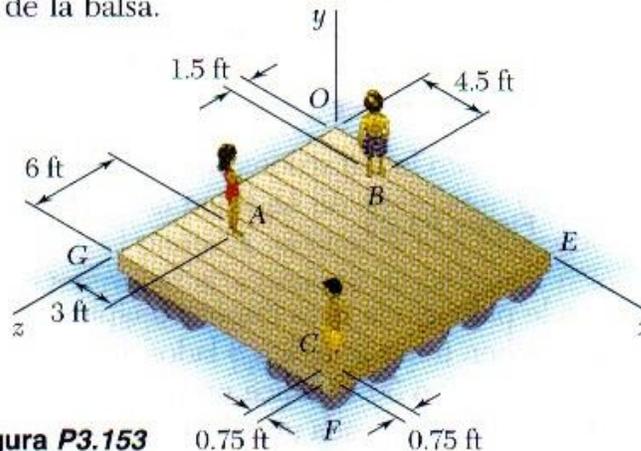


Figura P3.153

## Respuestas a problemas

- 3.98** a) Carga a:  $\mathbf{R} = 1\,000\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 6.00\text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$ .  
 Carga b:  $\mathbf{R} = 1\,000\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 6.60\text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$ .  
 Carga c:  $\mathbf{R} = 1\,000\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 6.60\text{ kN} \cdot \text{m } \downarrow$ .  
 Carga d:  $\mathbf{R} = 1\,000\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 6.60\text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$ .  
 Carga e:  $\mathbf{R} = 900\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 6.60\text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$ .  
 Carga f:  $\mathbf{R} = 1\,000\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 5.80\text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$ .  
 Carga g:  $\mathbf{R} = 900\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 6.60\text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$ .  
 Carga h:  $\mathbf{R} = 1\,000\text{ N } \downarrow$ ;  $\mathbf{M} = 6.60\text{ kN} \cdot \text{m } \uparrow$ .  
 b) Cargas b, d y h.
- 3.99** Carga f.
- 3.100** a)  $\mathbf{R} = 600\text{ N } \downarrow$ ; 1.500 m. b)  $\mathbf{R} = 300\text{ N } \downarrow$ ; 1.333 m.  
 c)  $\mathbf{R} = 500\text{ N } \downarrow$ ; 1.600 m.
- 3.101** Sistema fuerza-par en E.
- 3.103** a) 7.82 ft. b) 4.48 ft.
- 3.105** a)  $158.2\text{ N } \searrow 86.0^\circ$ . b) 302 mm a la derecha de F.
- 3.106** a)  $72.2^\circ$ . b)  $127.6\text{ N } \nearrow 87.4^\circ$ .
- 3.107** a)  $\mathbf{M} = 115.2\text{ lb} \cdot \text{in. } \uparrow$ ;  $\alpha = 39.3^\circ$ . b)  $56.1\text{ lb } \nearrow 45.0^\circ$ .
- 3.109** a)  $\mathbf{R} = 3.72\text{ kips } \nearrow 55.2^\circ$ ; 0.0406 in. a la izquierda de EF.  
 b)  $55.9^\circ$ .
- 3.111**  $350\text{ N } \searrow 21.4^\circ$ ; 92.6 mm a la izquierda de B y 27.4 mm a la derecha de F.
- 3.112** a)  $7.35\text{ N } \swarrow 55.6^\circ$ . b) 478 mm a la izquierda de B.  
 c) 34.7 mm arriba y a la izquierda de A.
- 3.113** a) 211 mm. b) 211 mm.
- 3.114** a)  $\mathbf{R} = F \searrow \tan^{-1}(b^2/2hx)$ ;  
 $\mathbf{M} = \frac{(2h^2 - b^2)x - 2(h/b)^2 x^3}{\sqrt{b^4 + 4h^2 x^2}} F \uparrow$ . b) 0.354 ft.
- 3.115**  $\mathbf{R} = -(300\text{ N})\mathbf{i} - (240\text{ N})\mathbf{j} + (25.0\text{ N})\mathbf{k}$ ;  
 $\mathbf{M} = -(3.00\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (13.50\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (9.00\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ .
- 3.117**  $\mathbf{A} = (2.00\text{ N})\mathbf{i} - (169.1\text{ N})\mathbf{j} + (12.00\text{ N})\mathbf{k}$ ;  
 $\mathbf{B} = -(12.00\text{ N})\mathbf{i} + (169.1\text{ N})\mathbf{j} - (6.00\text{ N})\mathbf{k}$ .
- 3.118** a)  $\mathbf{B} = (2.32\text{ lb})\mathbf{i}$ ;  $\mathbf{C} = (1.580\text{ lb})\mathbf{i} - (3.30\text{ lb})\mathbf{j} - (1.110\text{ lb})\mathbf{k}$ .  
 b)  $R_y = -3.30\text{ lb}$ ;  $M_x = 2.55\text{ lb} \cdot \text{ft}$ .
- 3.119** a)  $53.1^\circ$ . b)  $\mathbf{R} = (40.0\text{ N})\mathbf{j} + (5.00\text{ N})\mathbf{k}$ ;  
 $\mathbf{M} = -(24.0\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (45.0\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ .
- 3.120** a)  $\mathbf{R} = (43.3\text{ N})\mathbf{j}$ ;  
 $\mathbf{M} = (6.88\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (5.63\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (9.74\text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ .  
 b) En sentido contrario al de las manecillas del reloj.
- 3.122**  $\mathbf{R} = -(8.00\text{ lb})\mathbf{i} + (56.0\text{ lb})\mathbf{j} - (20.0\text{ lb})\mathbf{k}$ ;  
 $\mathbf{M} = -(81.0\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (123.0\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} + (444\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$ .
- 3.123** 280 kN;  $x = 0.750\text{ m}$ ,  $z = -0.1856\text{ m}$ .
- 3.124**  $F_B = 80.0\text{ kN}$ ;  $F_F = 60.0\text{ kN}$ .
- 3.125** 680 kips;  $x = 91.1\text{ ft}$ ,  $z = 43.2\text{ ft}$ .
- 3.126**  $a = 58.4\text{ ft}$ ;  $b = 52.4\text{ ft}$ .
- 3.129** a)  $2P$ ;  $\theta_x = 0$ ,  $\theta_y = -90.0^\circ$ ,  $\theta_z = 90.0^\circ$ . b)  $-0.750a$ .  
 c)  $y = 3.00a$ ,  $z = 2.50a$ .
- 3.131** a)  $-(21.0\text{ N})\mathbf{j}$ . b) 0.571 m. c) El eje de la llave de torsión es paralelo al eje y y en  $x = 0$ ,  $z = 41.7\text{ mm}$ .
- 3.133** a)  $\mathbf{R} = -(35.0\text{ lb})\mathbf{i} - (12.00\text{ lb})\mathbf{k}$ . b) 5.11 in.  
 c)  $y = 5.75\text{ in.}$ ,  $z = 4.57\text{ in.}$
- 3.135** a)  $3P(2\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - \mathbf{k})/25$ . b)  $-0.0988a$ .  
 c)  $x = 2.00a$ ,  $z = -1.990a$ .
- 3.137**  $\mathbf{R} = (4.00\text{ lb})\mathbf{i} + (6.00\text{ lb})\mathbf{j} - (2.00\text{ lb})\mathbf{k}$ ;  $p = 1.226\text{ ft}$ ;  
 $y = -3.68\text{ ft}$ ,  $z = -1.031\text{ ft}$ .
- 3.142** a)  $80.0\text{ N} \cdot \text{m } \downarrow$ . b) 205 N. c)  $177.8\text{ N } \swarrow 20.0^\circ$ .
- 3.144** a)  $-(1\,840\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} - (368\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$ .  
 b)  $-(1\,840\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{i} + (2\,160\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} + (2\,740\text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$ .
- 3.145**  $38.9^\circ$ .
- 3.146** 4.00 ft.
- 3.148** a)  $\mathbf{F} = 1\,000\text{ N } \searrow 20.0^\circ$ ;  $\mathbf{M} = 1\,724\text{ N} \cdot \text{m } \downarrow$ .  
 b)  $\mathbf{F} = 1\,000\text{ N } \searrow 20.0^\circ$ ;  $\mathbf{M} = 958\text{ N} \cdot \text{m } \downarrow$ .
- 3.150**  $\mathbf{F} = (2.00\text{ lb})\mathbf{i} + (38.0\text{ lb})\mathbf{j} - (24.0\text{ lb})\mathbf{k}$ ;  
 $\mathbf{M} = (792\text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (708\text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (1\,187\text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$ .
- 3.151**  $\mathbf{R} = 362\text{ N } \searrow 81.9^\circ$ ;  $M = 327\text{ N} \cdot \text{m}$ .
- 3.152**  $\mathbf{R} = -(7.00\text{ lb})\mathbf{i} - (8.00\text{ lb})\mathbf{j} - (4.00\text{ lb})\mathbf{k}$ ;  
 $\mathbf{M} = -(12.00\text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (10.50\text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (7.50\text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$ .

**Contenido obtenido de:**  
**MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS,**  
**ESTÁTICA. (TERCERA Y OCTAVA EDICIÓN)**  
**BEER - JOHNSTON**

**Ensenada B.C.    Octubre de 2016.**