



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO**



## **CUADERNO DE APUNTES**

**MATERIA**

## **ESTRUCTURAS DE CONCRETO**

**ELABORADO POR:**

**M.I. JOEL MELCHOR OJEDA RUIZ**

**M.C. ALBERTO PARRA MEZA**

**M.I. RICARDO SÁNCHEZ VERGARA**

Ensenada, Baja California.

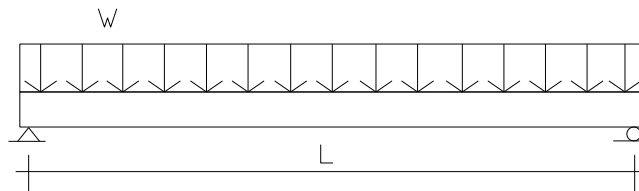
# **CONTENIDO**

- 1. CONCEPTOS GENERALES DE FLEXIÓN**
- 2. TEORIA DE DISEÑO PLÁSTICO**
- 3. VIGAS SIMPLEMENTE ARMADAS**
  - a. Conceptos generales
  - b. Ejemplos de revisión
  - c. Especificaciones ACI-318-14
  - d. Ejemplos de diseño
- 4. VIGAS DOBLEMENTE ARMADAS**
  - a. Conceptos generales
  - b. Ejemplos de revisión
  - c. Ejemplos de diseño
- 5. VIGAS “T”**
  - a. Conceptos generales
  - b. Ejemplos de revisión
  - c. Ejemplos de diseño
- 6. CORTANTE Y TENSIÓN DIAGONAL**
  - a. Conceptos generales
  - b. Especificaciones ACI-318-14
  - c. Ejemplos de revisión
  - d. Ejemplos de diseño
- 7. LONGITUD DE DESARROLLO Y ANCLAJE**
  - a. Conceptos generales
  - b. Especificaciones ACI-318-14
  - c. Ejemplos de revisión
  - d. Ejemplos de diseño
- 8. COLUMNAS**
  - a. Conceptos generales
  - b. Especificaciones ACI-318-14
  - c. Ejemplos de revisión, obtención de diagrama de interacción

## ANÁLISIS DE VIGAS SOMETIDAS A FLEXIÓN

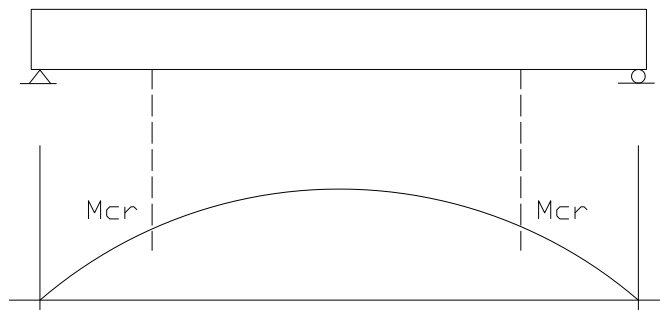
Supóngase una viga como la mostrada en la siguiente figura, en donde:

- La carga, “ $W$ ”, es pequeña e incremental
- La longitud de la viga, “ $L$ ”, es suficiente como para que sólo se presenten esfuerzos de flexión (no se desarrollarían esfuerzos cortantes, por ejemplo)
- La sección transversal de la viga es rectangular y constante en toda la longitud



ETAPAS DE FLEXIÓN:

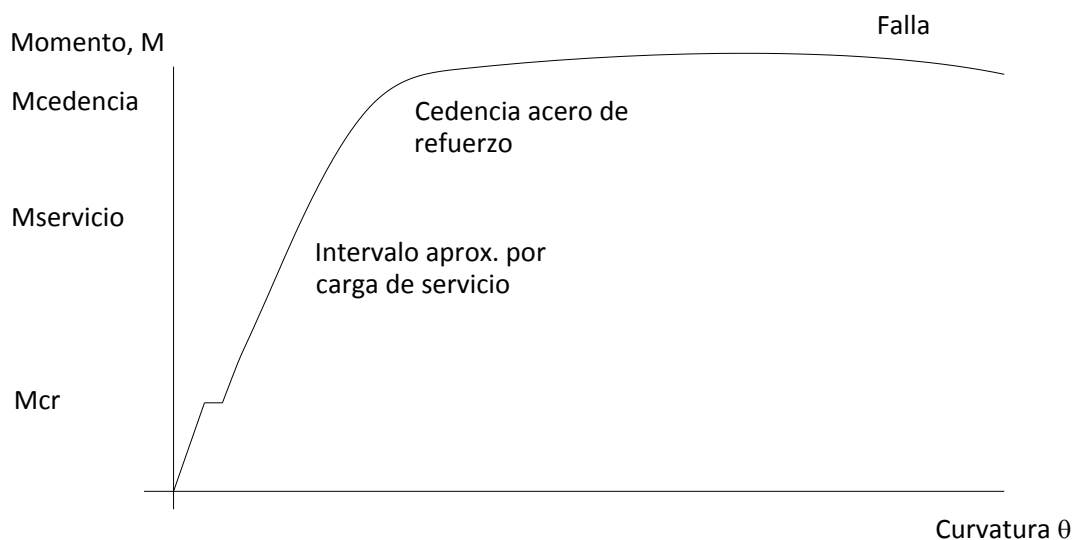
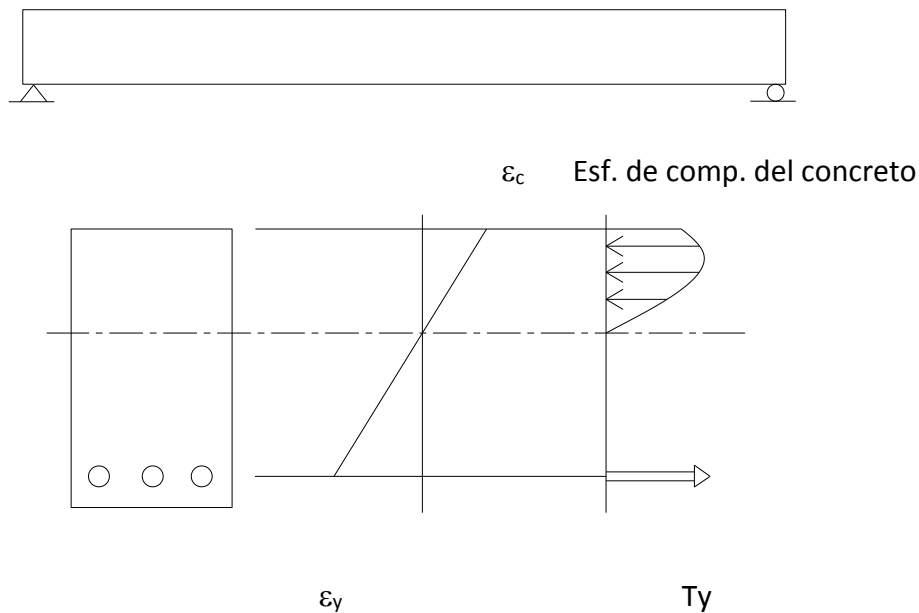
1. CONCRETO NO AGRIETADO
2. ESFUERZOS ELÁSTICOS, CONCRETO AGRIETADO
3. RESISTENCIA ÚLTIMA



De la gráfica de momento flexionante, asociada a la longitud en donde se han desarrollado las grietas, por arriba del Momento  $M_{cr}$  (momento flexionante de agrietamiento) aparecen grietas en el concreto que se extienden hacia el eje neutro de la sección.

Para  $M_{act} \geq M_{cr}$  y siempre que,  $f_c \leq 0.5 f'_c$  y  $f_s < \text{límite elástico}$ , la distribución de esfuerzos es lineal con respecto al eje neutro. Usualmente esta condición se presenta en la mayoría de las cargas de servicio.

En la etapa de resistencia última, el concreto en la zona de compresión (parte superior de la sección transversal) se aplasta, mientras que, en la zona de tensión (parte inferior de la sección transversal), el acero “fluye” (ha cedido), es decir, la magnitud de los esfuerzos se encuentra en el rango no-lineal.



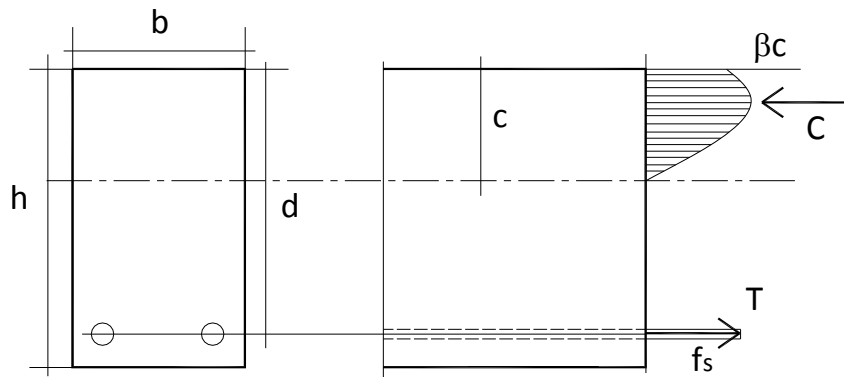
### Comparativo general de DISEÑO ELÁSTICO Vs. DISEÑO PLÁSTICO

| <b>DISEÑO ELÁSTICO</b>                                                             | <b>DISEÑO PLÁSTICO</b>                             |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Rango lineal de esfuerzos                                                          | Rango no-lineal de esfuerzos                       |
| Secciones más robustas                                                             | Secciones más esbeltas                             |
| Diseño anti-económico                                                              | Diseño razonablemente económico                    |
| Menor control de mecanismos de falla                                               | Mejor control de mecanismos de falla               |
| Combinaciones de carga (viva + muerta) sin factores (estadísticos) de variabilidad | Mejor representación de las combinaciones de carga |

## DISEÑO PLÁSTICO

Los materiales trabajan en el rango de fluencia y se considera que al presentarse una falla, ésta ocurra en el acero de refuerzo (sea de tipo “dúctil”) y no en el concreto, pues en tal caso correspondería a una falla frágil y la falla del elemento ocasionaría mayores daños.

Distribución de esfuerzos en la sección transversal



En este tipo de representación de esfuerzos, la localización de la fuerza de compresión “C” y el Eje Neutro, se determinan a través de resultados de pruebas de especímenes en laboratorio.

El valor de la fuerza de compresión “C” depende de las dimensiones del bloque a compresión y de un esfuerzo promedio de compresión en el concreto.

$$C = f_{av} c b = \alpha f'c c b$$

La fuerza de tensión “T” en el acero de refuerzo, depende del nivel de esfuerzo al cual es demandado:

$$T = A_s f_s$$

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ , se han obtenido estadísticamente para diferentes especímenes, habiéndose determinado:

$\alpha = 0.72$  para  $f'c \leq 4000 \text{ lbs/plg}^2$  y disminuye en 0.04 por cada 1000 lbs/plg<sup>2</sup> de aumento en la resistencia del concreto

$\beta = 0.425$  para  $f'c \leq 4000 \text{ lbs/plg}^2$  y disminuye en 0.025 por cada 1000 lbs/plg<sup>2</sup> de aumento en la resistencia del concreto

Por condición de equilibrio equilibrio:

$$C = T$$

$$\alpha f'_c c b = A_s f_s$$

$$c = \frac{A_s f_s}{\alpha f'_c b}$$

Sumatoria de momentos con respecto al punto de aplicación de la fuerza de compresión "C":

$$\Sigma M_C = 0$$

$$M = T (d - \beta c) = A_s f_s (d - \beta c)$$

Sumatoria de momentos con respecto al centroide del acero de refuerzo:

$$\Sigma M_T = 0$$

$$M = C (d - \beta c) = \alpha f'_c c b (d - \beta c)$$

**Al presentarse la falla del acero (falla dúctil):  $f_s = f_y$**

El eje neutro queda determinado por la expresión:

$$c = \frac{A_s f_y}{\alpha f'_c b}$$

Definiendo la cuantía de acero  $\rho$  (ó relación de acero de refuerzo):

$$\rho = \frac{A_s}{bd}$$

El eje neutro, cuando falla la sección por tensión, se determina por:

$$c = \frac{\rho f_y d}{\alpha f'_c}$$

El momento último teórico  $M'_u$ , en función del acero, se determina de la condición de equilibrio en la compresión:

$$M'_u = A_s f_y d \left( 1 - \frac{\beta f_y}{\alpha f'_c} \rho \right)$$

O bien, de acuerdo con el criterio del ACI, en función del factor de reducción de resistencia  $\phi$ , el momento resistente reducido de la sección, será:

$$\phi M'_u \geq M_u \quad \text{ó} \quad \phi M_n \geq M_u$$

Para el caso de valores  $f'_c \leq 4000 \text{ lbs/plg}^2$ ,

$$M'_u = A_s f_y d \left( 1 - 0.59 \frac{f_y}{f'_c} \rho \right)$$

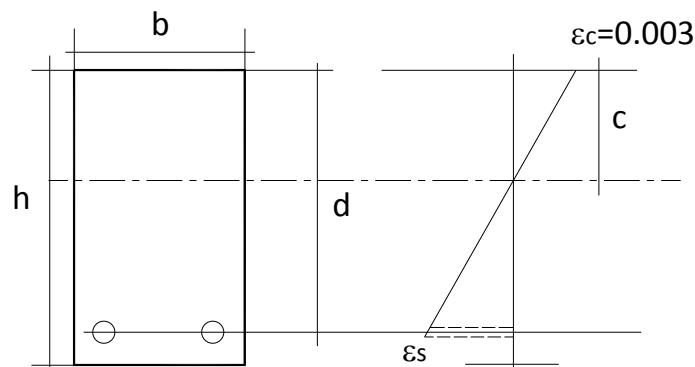
$$\phi M'_u = \phi A_s f_y d \left( 1 - 0.59 \frac{f_y}{f'_c} \rho \right)$$

$$\phi M'_u = \phi b d^2 f_y \rho \left( 1 - \frac{f_y}{1.7 f'_c} \rho \right)$$

Esta última expresión, es muy apropiada para el caso de diseño, en la determinación de la sección transversal, conocido el momento de diseño  $M_u$ , y una cuantía propuesta  $\rho$ ; o bien, la determinación de la cuantía de acero, requerida, para un momento de diseño y sección transversal establecidos previamente.

#### Al presentarse el caso de falla por compresión del concreto (falla frágil)

Del diagrama de deformaciones unitarias en la sección transversal



$$\frac{c}{\varepsilon_c} = \frac{d}{\varepsilon_c + \varepsilon_s}$$

$$c = \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_s}{E_s}} d$$

Este valor de “c”, determina la posición del Eje Neutro, cuando el concreto llega a la deformación unitaria considerada de ruptura (falla), antes que la fluencia en el acero de refuerzo.



El momento último teórico  $M'_u$ , en función del concreto, se determinaría sustituyendo el valor encontrado de “c”, en la condición de equilibrio en la tensión. Sin embargo, esta no es una condición deseable en comportamiento de elementos de concreto reforzado.

Con base en el comportamiento de los materiales (concreto y acero de refuerzo), un diseño óptimo de la sección de concreto y proporcionamiento de acero de refuerzo, es aquel en donde se presenta una falla balanceada, es decir, que no se presentara una falla frágil, y el acero de refuerzo quedara determinado por la relación de refuerzo balanceado  $\rho_b$ . Este valor determinaría una línea neutra para cualquier tipo de falla.

Al igualar los valores de “c”, para la ubicación del Eje Neutro, obtenidos previamente, considerando que, tanto el concreto, como el acero de refuerzo, alcanzan la falla en el mismo instante ( $\epsilon_c=0.003$  y  $f_s=f_y$ ):

$$\frac{\rho_b f_y d}{\alpha f'_c} = \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}} d$$

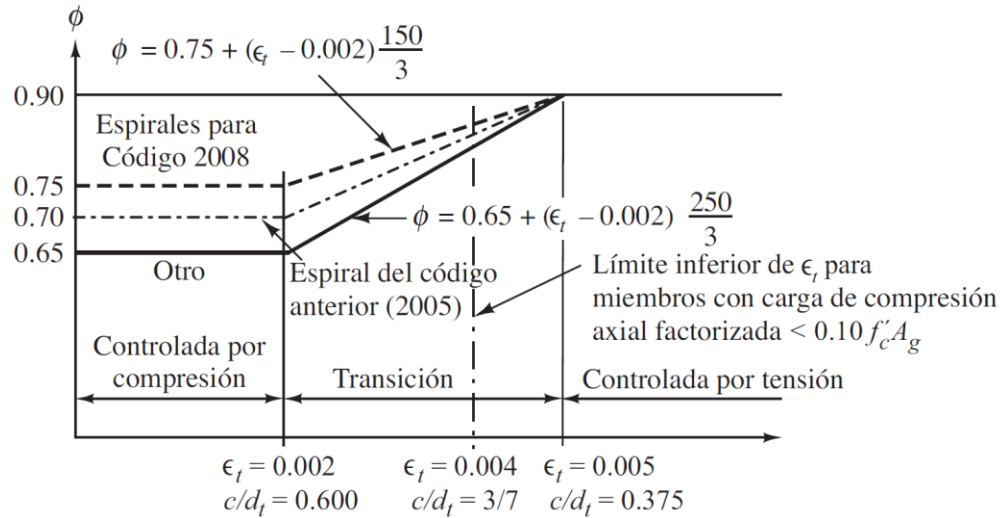
$$\rho_b = \alpha \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}} \frac{f'_c}{f_y}$$

A partir de esta expresión, cuantía de acero en la falla balanceada, la cuantía de acero a utilizar en una sección, quedaría definida como una fracción de  $\rho_b$ . Por ejemplo  $0.75 \rho_b$ ,  $0.375 \rho_b$ , etc., en donde se induciría la falla dúctil, sobre una falla frágil.

Sin embargo, en el criterio vigente establecido por el ACI, se debe verificar que el tipo de falla en la sección de concreto reforzado, sea falla controlada por tensión, a partir de las deformaciones unitarias del acero de refuerzo en tensión, de acuerdo con la determinación del valor de  $\phi$ , a partir de la información contenida en la siguiente gráfica (sección 21.2.2), la cual está representada considerando la deformación unitaria del acero de refuerzo en tensión  $\epsilon_{ty}=0.002$ , para el caso de un acero grado 60, para otros aceros, en la zona de transición ( $0.004 \leq \epsilon_t \leq 0.005$ ), el valor de  $\phi$ , está determinado por la expresión

$$\phi = 0.65 + 0.25 \frac{(\epsilon_t - \epsilon_{ty})}{(0.05 - \epsilon_{ty})}$$

De acuerdo con el ACI-14, se presenta una limitante, para el caso de los elementos con carga de compresión axial factorizada  $P_u < 0.10 f'_c A_g$ , la deformación unitaria en tensión  $\epsilon_t$ , no puede ser menor 0.004 (sección 9.3.3.1).

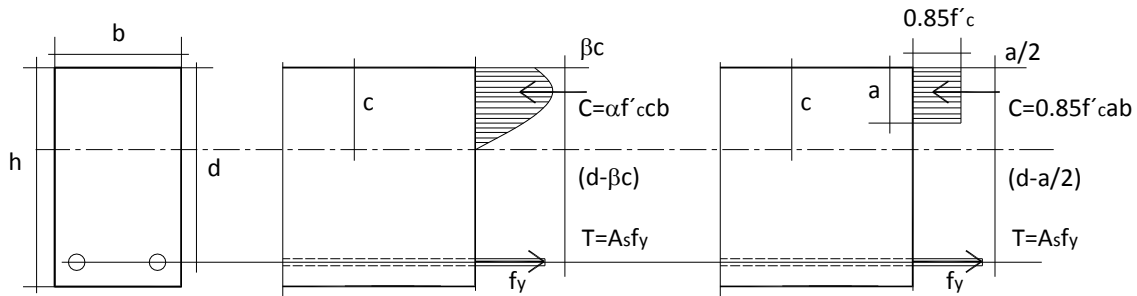


Para dar cumplimiento a requerimientos, en cuanto la cuantía de acero de refuerzo, las secciones deben cumplir con una cuantía mínima ( $\rho_{\min}$ ) de acero de refuerzo, para evitar el agrietamiento en el concreto que eventualmente conduzca a una falla no controlada, por tensión en el concreto, tanto por Momento de agrietamiento, como por efectos contracción por temperatura (sección 9.6.1.2):

$$\rho_{\min} \geq \begin{cases} \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{200}{f_y} \end{cases}$$

### METODO DEL BOQUE RECTANGULAR EQUIVALENTE (DIAGRAMA DE WHITNEY)

La representación de los esfuerzos, se realiza a través de un bloque rectangular equivalente de esfuerzos (sección 22.2.2), en donde el esfuerzo a compresión en el concreto, corresponde a un valor promedio  $0.85f'_c$ , y la profundidad del bloque a compresión queda determinada por el valor de "a", el cual es proporcional al valor de "c", que define la ubicación del Eje Neutro.



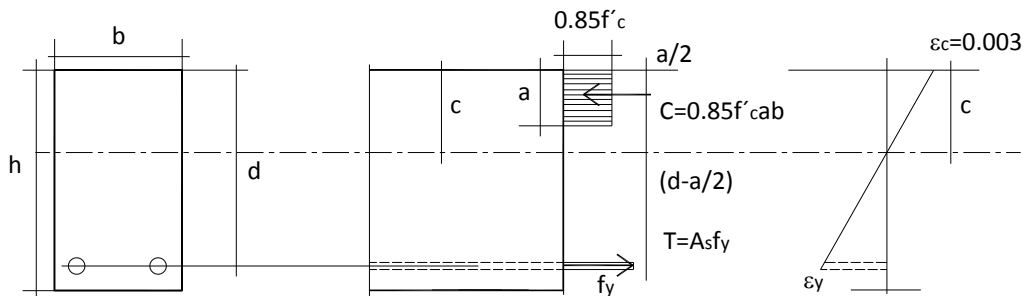
La relación entre “a” y “c”, está determinada por  $\beta_1$ :

$$a = \beta_1 c$$

En donde, de acuerdo con la tabla 22.2.2.4.3 del ACI:

| $f'c$ (lbs/plg <sup>2</sup> ) | $\beta_1$                              |     |
|-------------------------------|----------------------------------------|-----|
| $2500 \leq f'c \leq 4000$     | 0.85                                   | (a) |
| $4000 \leq f'c \leq 8000$     | $0.85 - \frac{0.05(f'c - 4000)}{1000}$ | (b) |
| $f'c \geq 8000$               | 0.65                                   | (c) |

Considerando la representación del diagrama de deformaciones, correspondiente con el diagrama rectangular equivalente de esfuerzos



Procediendo de manera similar, como se realizó anteriormente, para la determinación de la relación balanceada de cuantía de acero  $\rho_b$

$$\frac{c}{d} = \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}$$

De la condición de equilibrio de fuerzas internas

$$C = T$$

$$0.85 f'_c ab = A_s f_y$$

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

O bien,

$$a = \frac{f_y}{0.85 f'_c} \rho d$$

En donde,  $\rho = \frac{A_s}{bd}$

Si  $a = \beta_1 c$ , entonces;

$$c = \frac{f_y}{0.85 \beta_1 f'_c} \rho d$$

Por lo que, en la condición balanceada de diseño

$$\frac{f_y}{0.85 \beta_1 f'_c} \rho_b = \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}$$

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}$$

O bien, para el valor  $E_s = 29'000,000 \text{ lbs/plg}^2$

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{f_y} \frac{87000}{87000 + f_y}$$

De la condición de equilibrio en la sección transversal, respecto a la compresión,  $\Sigma M_c = 0$

$$M'_u = T \left( d - \frac{a}{2} \right) = A_s f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

En términos de la cuantía de acero de refuerzo

$$M'_u = \rho b d f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Sustituyendo en esta última, la expresión anterior para la profundidad del bloque a compresión "a"

$$M'_u = \rho b d^2 f_y \left( 1 - 0.59 \frac{f_y}{f'_c} \rho \right)$$

O, de acuerdo con el criterio de reducción de resistencia del ACI

$$\phi M'_u \geq M_u$$

$$\phi M'_u = \phi \rho b d^2 f_y \left( 1 - 0.59 \frac{f_y}{f'_c} \rho \right) \geq M_u$$

Introduciendo la variable  $R'_u$

$$R'_u = \rho f_y \left( 1 - 0.59 \frac{f_y}{f'_c} \rho \right)$$

$$M'_u = R'_u b d^2$$

O bien

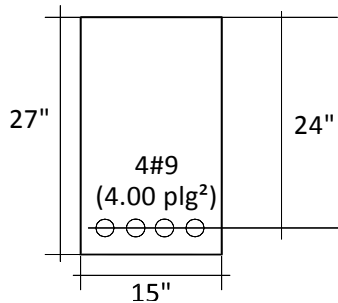
$$R_u = \frac{M_u}{\phi b d^2}$$

La solución de la cuantía de acero de refuerzo  $\rho$ , para un momento de diseño  $M_u$  y una sección predeterminada, a partir de  $b d^2$

$$\rho = \frac{0.85 f'_c}{f_y} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 R_u}{0.85 f'_c}} \right)$$

Las anteriores, son expresiones muy útiles en el caso de realizar un diseño, a partir de valores determinados de  $M_u$ , se podrá calcular la cuantía de acero requerido para una sección propuesta (predefinidos los valores “b” y “d”), o bien determinar las dimensiones de una sección, a partir de proponer un valor para la cuantía de acero  $\rho$ .

**Ejercicio 1.** Determinar la capacidad de momento de diseño de ACI  $\phi M_n$  de la viga mostrada en la fig. si  $f'_c = 4\,000\text{ lb/plg}^2$  y  $f_y = 60\,000\text{ lb/plg}^2$



$$b := 15\text{ plg} \quad d := 24\text{ plg} \quad A_s := 4$$

$$f'_c := 4000 \quad f_y := 60000$$

$$\phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2) \quad \phi = ? \quad f_y : \text{acero fluye?} \quad a = ?$$

$$\text{si } \epsilon_T > 0.005, \phi = 0.9, \rho_{\min} < \rho < \rho_{\max} (\epsilon_t = 0.005)$$

$$(9.6.1.2) \text{ Cuantía mínima de acero } \rho_{\min} > 3(f'_c)^{1/2} / f_y, 200 / f_y$$

$$\rho_{\min} := \max\left(\frac{3 \cdot \sqrt{f'_c}}{f_y}, \frac{200}{f_y}\right)$$

$$\rho_{\min} = 0.00333$$

Cuantía de acero  $\rho = A_s / bd$

$$\rho := \frac{A_s}{b \cdot d}$$

$$\rho = 0.0111$$

Cuantía máxima de acero  $\rho_{\max}$  (suponiendo  $\epsilon_t = 0.005$ )

$$\epsilon_t := 0.005 \quad \beta_1 := 0.85 \quad (\text{para } f'_c < 4\,000\text{ lb/plg}^2)$$

$$\rho_{\max} := \left(\frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f'_c}{f_y}\right) \cdot \left(\frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t}\right)$$

$$\rho_{\max} = 0.0181$$

Puesto que,  $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max} (\epsilon_t = 0.005)$ , la cuantía de acero es adecuada

Determinación de la profundidad del bloque equivalente en compresión "a":

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b}$$

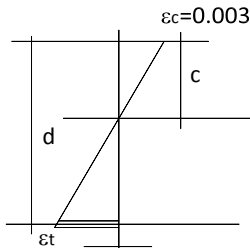
$$a = 4.706$$

Localización del Eje Neutro "c":

$$c := \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = 5.536$$

Determinación de la deformación unitaria del acero " $\epsilon_t$ ", del diagrama de deformaciones:



$$\epsilon_t := \left(\frac{0.003}{c}\right) \cdot (d - c)$$

$$\epsilon_t = 0.01 > 0.005,$$

**CONTROLA LA TENSIÓN**  $\phi := 0.9$

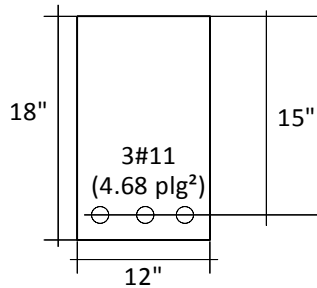
Resistencia de la sección  $\phi M_n$ :

$$M_n := A_s \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000}$$

$$M_n = 432.941 \text{ Klb-pie}$$

$$\phi \cdot M_n = 389.647 \text{ Klb-pie}$$

**Ejercicio 2.** Determinar la capacidad de momento de diseño de ACI  $\phi M_n$  de la viga mostrada en la fig. si  $f'_c = 4\,000\text{ lb/plg}^2$  y  $f_y = 60\,000\text{ lb/plg}^2$



$$b := 12\text{ plg} \quad d := 15\text{ plg} \quad A_s := 4.68$$

$$f'_c := 4000 \quad f_y := 60000$$

$$\phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2) \quad \phi = ? \quad f_y : \text{acero fluye?} \quad a = ?$$

$$\text{si } \epsilon_T > 0.005, \phi = 0.9, \rho_{\min} < \rho < \rho_{\max} (\epsilon_t = 0.005)$$

$$(9.6.1.2) \text{ Cuantía mínima de acero } \rho_{\min} > 3(f'_c)^{1/2} / f_y, 200 / f_y$$

$$\rho_{\min} := \max\left(\frac{3 \cdot \sqrt{f'_c}}{f_y}, \frac{200}{f_y}\right)$$

$$\rho_{\min} = 0.00333$$

Cuantía de acero  $\rho = A_s / bd$

$$\rho := \frac{A_s}{b \cdot d}$$

$$\rho = 0.026$$

Cuantía máxima de acero  $\rho_{\max}$  (suponiendo  $\epsilon_t = 0.005$ )

$$\epsilon_t := 0.005$$

$$\beta_1 := 0.85 \quad (\text{para } f'_c < 4\,000\text{ lb/plg}^2)$$

$$\rho_{\max} := \left(\frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f'_c}{f_y}\right) \cdot \left(\frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t}\right)$$

$$\rho_{\max} = 0.0181$$

Puesto que,  $\rho_{\min} < \rho > \rho_{\max}$ , se sabría que  $\epsilon_t < 0.005$

Determinación de la profundidad del bloque equivalente en compresión "a":

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b}$$

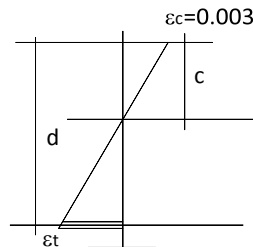
$$a = 6.882$$

Localización del Eje Neutro "c":

$$c := \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = 8.097$$

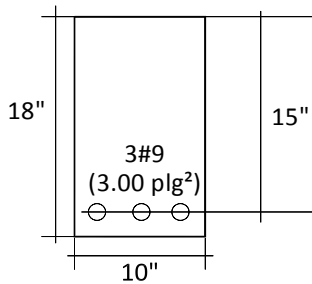
Determinación de la deformación unitaria del acero " $\epsilon_t$ ", del diagrama de deformaciones:



$$\epsilon_t := \left(\frac{0.003}{c}\right) \cdot (d - c)$$

$\epsilon_t = 0.00256 < 0.004$ , LA SECCIÓN NO ES DÚCTIL  
NO PUEDE SER UTILIZADA  
DE ACUERDO CON 9.3.3.1  
ACI

**Ejercicio 3.** Determinar la capacidad de momento de diseño de ACI  $\phi M_n$  de la viga mostrada en la fig. si  $f'_c = 4\,000\text{ lb/plg}^2$  y  $f_y = 60\,000\text{ lb/plg}^2$



$$b := 10\text{ plg} \quad d := 15\text{ plg} \quad A_s := 3$$

$$f'_c := 4000 \quad f_y := 60000$$

$$\phi M_n = \phi A_s f_y (d - a/2) \quad \phi = ? \quad f_y : \text{acero fluye?} \quad a = ?$$

$$\text{si } \epsilon_T > 0.005, \phi = 0.9, \rho_{\min} < \rho < \rho_{\max} (\epsilon_t = 0.005)$$

$$(9.6.1.2) \text{ Cuantía mínima de acero } \rho_{\min} > 3(f'_c)^{1/2} / f_y, 200 / f_y$$

$$\rho_{\min} := \max\left(\frac{3 \cdot \sqrt{f'_c}}{f_y}, \frac{200}{f_y}\right)$$

$$\rho_{\min} = 0.00333$$

Cuantía de acero  $\rho = A_s / bd$

$$\rho := \frac{A_s}{b \cdot d}$$

$$\rho = 0.02$$

Cuantía máxima de acero  $\rho_{\max}$  (suponiendo  $\epsilon_t = 0.005$ )

$$\epsilon_t := 0.005$$

$$\beta_1 := 0.85 \quad (\text{para } f'_c < 4\,000\text{ lb/plg}^2)$$

$$\rho_{\max} := \left(\frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f'_c}{f_y}\right) \cdot \left(\frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t}\right)$$

$$\rho_{\max} = 0.0181$$

$$\text{Puesto que, } \rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}, \text{ se sabría que } \epsilon_t < 0.005$$

Determinación de la profundidad del bloque equivalente en compresión "a":

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b}$$

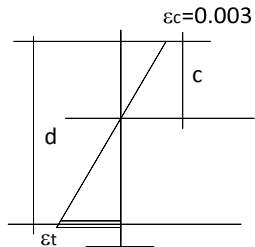
$$a = 5.294$$

Localización del Eje Neutro "c":

$$c := \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = 6.228$$

Determinación de la deformación unitaria del acero " $\epsilon_t$ ", del diagrama de deformaciones:



$$\epsilon_t := \left(\frac{0.003}{c}\right) \cdot (d - c)$$

$$\epsilon_t = 0.00422 \quad 0.004 < \epsilon_t < 0.005, \text{ VIGA EN ZONA DE TRANSICIÓN}$$

Valor de " $\phi$ ":

$$\phi := 0.65 + (\epsilon_t - 0.002) \cdot \frac{250}{3} \quad \phi = 0.8354$$

Resistencia de la sección  $\phi M_n$ :

$$M_n := A_s \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000}$$

$$M_n = 185.294 \text{ Klb-pie}$$

$$\phi \cdot M_n = 154.798 \text{ Klb-pie}$$



## DISEÑO DE VIGAS RECTANGULARES Y LOSAS EN UNA DIRECCIÓN

### FACTORES DE CARGA.

De acuerdo con el ACI (5.3), la resistencia requerida  $U$  debe ser por lo menos igual al efecto de las cargas mayoradas (cargas factorizadas) en las ecuaciones (5.3.1a) a (5.3.1g). Deberá investigarse el efecto de una o más cargas que no actúen simultáneamente

$$U = 1.4D \quad \text{EC. 5.3.1a}$$

$$U = 1.2D + 1.6L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \quad \text{EC. 5.3.1b}$$

$$U = 1.2D + 1.6(L_r \text{ o } S \text{ o } R) + (1.0L \text{ o } 0.5W) \quad \text{EC. 5.3.1c}$$

$$U = 1.2D + 1.6W + 1.0L + 0.5(L_r \text{ o } S \text{ o } R) \quad \text{EC. 5.3.1d}$$

$$U = 1.2D + 1.0E + 1.0L + 0.2S \quad \text{EC. 5.3.1e}$$

$$U = 0.9D + 1.6W \quad \text{EC. 5.3.1f}$$

$$U = 0.9D + 1.0E \quad \text{EC. 5.3.1g}$$

En las expresiones anteriores:

|                                            |                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>D</b> = carga muerta                    | <b>U</b> = carga de diseño o ultima que la estructura necesita poder resistir                                                     |
| <b>L</b> = carga viva                      | <b>S</b> = carga de nieve                                                                                                         |
| <b>L<sub>r</sub></b> = carga viva de techo | <b>H</b> = cargas debidas al peso y a la presión lateral del suelo, presión del agua subterránea o presión de materiales a granel |
| <b>R</b> = carga pluvial                   | <b>W</b> = carga eólica                                                                                                           |
| <b>E</b> = efectos sísmicos                |                                                                                                                                   |

Generalmente, los factores de combinación de carga son mayores de 1.0 y toman en cuenta la posible variabilidad del tipo de carga considerada. El factor 0.9 en la carga muerta, en las dos últimas ecuaciones, atiende al hecho que las cargas muertas mayores tienden a reducir los efectos de otras cargas.

En la aplicación de las expresiones anteriores, ante las diferentes consideraciones de los efectos de los diferentes tipos de carga, deberá tomarse en cuenta, el efecto más desfavorable, en algunos casos las combinaciones de efectos en compresión, en otros casos los efectos por tensión, es decir, efectos con signo positivo, o efectos con signo negativo, respectivamente.

El ACI permite, bajo condiciones muy específicas, la reducción de algunos de los factores mostrados en las ecuaciones.

### DISEÑO DE VIGAS RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS. (VIGAS SUBREFORZADAS)

Algunos aspectos a tomar en cuenta en el diseño de vigas rectangulares simplemente armadas, consideradas como vigas subreforzadas, debido a que el acero de refuerzo fluye antes que lo haga el concreto:

1. **Dimensiones de la viga.** A menos que haya restricciones de tipo arquitectónicas, las dimensiones a considerar se pueden establecer a partir de relaciones empíricas, como que la relación “d” a “b” sea del orden de 1.5 a 2, para el caso de vigas de corta longitud (del orden de 6 a 7 mts). Para vigas de mayor longitud las relaciones podrían ser del orden de 3 a 4 veces los anchos. Lo anterior conduciría a vigas dentro de rangos económicos en su construcción. Es recomendable establecer las dimensiones de la sección transversal, dentro de lo posible, como múltiplos enteros de 5cm, o bien pulgadas enteras. Esto último por cuestiones de optimización en el cimbrado.
2. **Deflexiones.** El ACI provee una tabla de valores recomendados para los espesores mínimos de vigas y losas en un sentido, con la finalidad de que las dimensiones que se propongan no conduzca a la generación de deflexiones excesivas, que pongan en riesgo la utilización de la estructura. Los valores proporcionados en la tabla, podrán ser corregidos en función de las propiedades de los materiales utilizados, de acuerdo con 7.3.1.1.1 a 7.3.1.1.3 y 9.3.1.1.1 a 9.3.1.1.3, para losas y vigas no presforzadas, respectivamente.

**TABLAS 7.3.1.1 Y 9.3.1.1 – ALTURAS O ESPESORES MÍNIMOS DE VIGAS NO PRESFORZADAS O LOSAS EN UNA DIRECCIÓN REFORZADAS NO PRESFORZADAS A MENOS QUE SE CALCULEN LAS DEFLEXIONES**

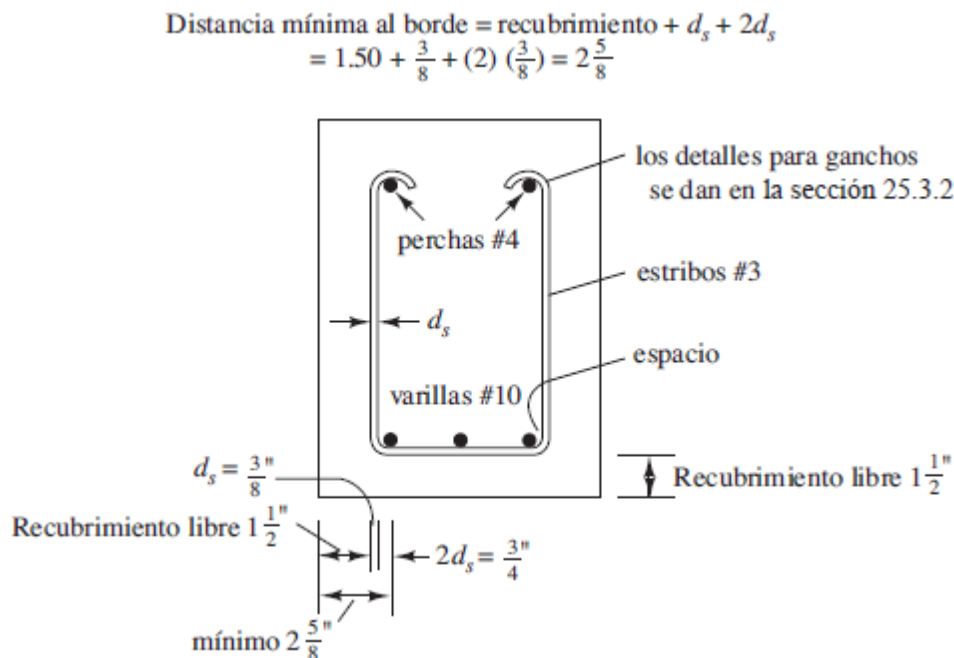
|                                       | Espesor mínimo h                                                                                                                       |                                 |                               |                               |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
|                                       | Simplemente apoyados                                                                                                                   | Con un Extremo continuo         | Ambos Extremos continuos      | En voladizo                   |
| Elementos                             | Elementos que no soporten o estén ligados a divisiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse debido a deflexiones excesivas |                                 |                               |                               |
| <b>Losas macizas en una dirección</b> | <b><math>\ell / 20</math></b>                                                                                                          | <b><math>\ell / 24</math></b>   | <b><math>\ell / 28</math></b> | <b><math>\ell / 10</math></b> |
| <b>Vigas</b>                          | <b><math>\ell / 16</math></b>                                                                                                          | <b><math>\ell / 18.5</math></b> | <b><math>\ell / 21</math></b> | <b><math>\ell / 8</math></b>  |

Para otros valores de  $f_y$  distintos a 60,000 lb/plg<sup>2</sup>, las expresiones en la tabla deberán ser multiplicadas por  $(0.4 + f_y / 100,000)$  (ACI 7.3.1.1.1 losas y 9.3.1.1.1 vigas). Para vigas/losas no presforzadas, hechas de concreto ligero con peso específico  $w_c$  en el rango de 90 a 115 lb/pie<sup>3</sup>, las expresiones en la tabla deberán ser multiplicadas por el mayor de  $(1.65 - 0.005 w_c)$  ó 1.09 (ACI 7.3.1.1.1 losas y 9.3.1.1.1 vigas). Para vigas/losas no presforzadas compuestas hechas por una combinación de concreto de peso normal y ligero, apuntaladas durante la construcción, en donde el concreto ligero está en compresión, se debe aplicar el modificador de 7.3.1.1.2 para losas y 9.3.1.1.2 para vigas (ACI 7.3.1.1.1 losas y 9.3.1.1.1 vigas)

3. **Estimación del peso de la viga.** Dado que el peso del concreto por unidad de volumen es considerable (150 lb/pie<sup>3</sup> para concreto de peso normal), este deberá ser

considerado en la estimación de los efectos producidos como carga muerta. Este podrá ser evaluado a partir de la definición de las dimensiones de la sección transversal. En algunos casos, dependiendo el procedimiento en la determinación de las dimensiones de la sección transversal, será necesario antes de finalizar el diseño de la pieza, ajustar los datos de carga y replantear el diseño si la variación en la consideración de carga por peso propio inicial, resultara muy diferente con las dimensiones finales de la sección transversal.

4. **Selección de las varillas.** Una vez determinada la cantidad de acero de refuerzo requerido, se determina la cantidad de varillas a suministrar. Es recomendable, en caso necesario de combinar diferentes diámetros de varillas, usar la menor cantidad de diámetros diferentes, con la finalidad de evitar confusiones en el proceso de construcción. Incluso se podrá recurrir a uso de “paquetes” de varillas, o disposición de acero de refuerzo en capas, con sus respectivas consideraciones en la especificación indicada en el ACI, para fines de detallado del acero.
5. **Recubrimiento.** Con la finalidad de proteger el acero de refuerzo contra los efectos de intemperismo, el ACI, establece dimensiones mínimas de recubrimiento en la sección 20.6.1, el recubrimiento contribuye también a mejorar la adherencia del acero de refuerzo con el concreto



6. **Separación mínima entre varillas.** El código ACI, establece en la sección 25.2, que la separación mínima entre varillas no debe ser al menos, el que resulte mayor de 1 plg, el

diámetro nominal de la varilla de refuerzo, ó  $\frac{4}{3}$  el tamaño del agregado grueso en la mezcla de concreto. En el caso de disponer acero de refuerzo en capas, la separación entre estas no deberá ser menor a 1 plg y las barras de las capas superiores deben colocarse directamente sobre las de las capas inferiores. Lo anterior es con el fin de que el concreto no sea segregado entre las capas.

Diseñar una viga rectangular con claro simple de 22 pies para soportar una carga muerta de 1 klb/pie (sin incluir el peso de la viga) y una carga viva de 2 klb/pie. Usar  $f'_c = 4\,000 \text{ lb/plg}^2$  y  $f_y = 60\,000 \text{ lb/plg}^2$

$$\text{Long} := 22 \quad f'_c := 4000 \quad f_y := 60000 \quad D := 1 \quad \underline{\underline{L}} := 2$$

Estimación de la dimensiones y el peso de la viga

$$\text{Suponiendo} \quad h := \frac{\text{Long} \cdot 12}{10} \quad h = 26.4 \text{ plg, usar} \quad \underline{\underline{h}} := 27 \text{ plg, por lo que} \quad d := 24 \text{ plg}$$

$$\text{Suponiendo} \quad b := \frac{h}{2} \quad b = 13.5 \text{ plg, usar} \quad \underline{\underline{b}} := 14 \text{ plg}$$

$$\text{Peso de la viga} \quad \text{wt} := \left( \frac{b \cdot h}{144} \right) \cdot \frac{(150)}{1000} \quad \text{wt} = 0.394 \text{ klb/pie}$$

Cálculo de  $W_u$  y  $M_u$

$$W_u := 1.2 \cdot (D + \text{wt}) + 1.6 \cdot (L) \quad W_u = 4.873 \text{ klb/pie}$$

$$M_u := \frac{W_u \cdot \text{Long}^2}{8} \quad M_u = 294.786 \text{ klb-pie}$$

Cálculo del área de acero requerida, a partir de la cauntía de acero  $\rho$ , en función de  $R_n$ :

$$\text{Suponiendo} \quad \phi := 0.9 \quad R_n := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot b \cdot d^2} \quad R_n = 487.411$$

$$\rho := \left( \frac{0.85 \cdot f'_c}{f_y} \right) \cdot \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot R_n}{0.85 \cdot f'_c}} \right) \quad \rho = 0.00881$$

Selección del acero de refuerzo

$$A_s := \rho \cdot b \cdot d \quad A_s = 2.96 \text{ plg}^2$$

$$\text{Usar 3 vars del \#9} \quad \underline{\underline{A_s}} := 3 \text{ plg}^2$$

(Deberá verificarse que el ancho de la sección sea adecuado para la cantidad de varillas)

Revisión de la sección (dado que se supuso el valor de  $\phi$  y la cantidad de acero aumentó)

$$\beta_1 := 0.85 \quad \epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{\min} := \max \left( \frac{200}{f_y}, \frac{3 \cdot \sqrt{f'_c}}{f_y} \right) \quad \underline{\underline{\rho}} := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho_{\max} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f'_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right)$$

$$\rho_{\min} = 0.00333 \quad \rho = 0.00893 \quad \rho_{\max} = 0.018 \quad \text{La sección es dúctil} \quad \underline{\underline{\phi}} := 0.9$$

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b} \quad a = 3.782$$

$$\phi M_n := \phi \cdot A_s \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000} \quad \phi M_n = 298.475 \text{ klb-pie} > M_u = 294.786 \text{ OK}$$

Repetiendo el mismo ejemplo, pero resuelto aplicando el método de "tanteo" en la determinación de la profundidad del bloque a compresión "a".

$$\begin{aligned} M_u &= 294.786 \text{ klb-pie} & b &= 14 \text{ plg} & f_y &= 60000 \text{ lb/plg}^2 & \phi &= 0.9 \\ & & d &= 24 \text{ plg} & f_c &= 4000 \text{ lb/plg}^2 \end{aligned}$$

Suponiendo un valor para "a" menor a d/2:

1er intento

$$a := 2 \text{ plg}$$

$$A_s := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right)} \quad A_s = 2.848 \text{ plg}$$

Recalculando el valor "a":

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 3.59 \text{ plg, proponer otro valor "a"}$$

2do intento

$$a := 3.6 \text{ plg}$$

$$A_s := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right)} \quad A_s = 2.951 \text{ plg}$$

Recalculando el valor "a":

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 3.72 \text{ plg, proponer otro valor "a"}$$

3er intento

$$a := 3.7 \text{ plg}$$

$$A_s := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right)} \quad A_s = 2.957 \text{ plg}$$

Recalculando el valor "a":

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 3.728 \text{ plg, valor bastante cercano al previo de "a"}$$

A partir de este punto, se determina la cantidad de varillas a utilizar, se revisa que el ancho de la sección sea adecuado al número de varillas, se verifica el valor  $\phi$ , se calcula el valor "a" de acuerdo con el acero suministrado y finalmente, se verifica que la resistencia de la sección sea mayor que el momento de diseño.

Algunos autores recomiendan diseñar vigas simplemente reforzadas como un porcentaje de la cuantía de acero balanceada ( $\rho_b$ ), por ejemplo  $0.375\rho_b$ , o bien como un porcentaje de las relaciones  $f'_c / f_y$ , por ejemplo  $0.18f'_c / f_y$ , lo que conduce a secciones de vigas que usualmente no presentan problemas debido a las deflexiones (aunque será conveniente calcularlas)

**Ejemplo.** Determinar las dimensiones y cantidad de acero requeridas para  $f'_c = 4\,000\text{ lb/plg}^2$   
 $f_y = 60\,000\text{ lb/plg}^2$   $M_u = 600\text{ klb-pie}$   $\rho = 0.012$

$$f_c := 4000 \quad f_y := 60000 \quad M_u := 600 \quad \rho := 0.012 \quad \beta_1 := 0.85$$

Verificando el valor de  $\rho$  vs. el recomendado por diferentes autores

$$\rho_b := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{87000}{87000 + f_y} \right) \quad 0.375 \cdot \rho_b = 0.011 \quad \frac{0.18 \cdot f_c}{f_y} = 0.012$$

El valor de la cuantía  $\rho = 0.12$  si corresponde a estos valores recomendados.

Dado que  $M_u = \phi b d^2 \rho f_y [1 - \rho f_y / (1.7 f'_c)]$  entonces  $b d^2 = M_u / \phi \rho f_y [1 - \rho f_y / (1.7 f'_c)]$

Suponiendo  $\phi := 0.9$

$$\frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot \rho \cdot f_y \cdot \left( 1 - \frac{1}{1.7} \cdot \frac{\rho \cdot f_y}{f_c} \right)} = 12426.901 = b d^2$$

Proponiendo diferentes valores de  $b$  y  $d$  que cumplan con el valor  $b d^2$ :

| b  | d     | $b d^2$ |
|----|-------|---------|
| 12 | 32.18 | 12427   |
| 14 | 29.79 | 12427   |
| 16 | 27.87 | 12427   |

Considerar  $b := 14$   $d := 30$   $h := 33$

$$A_s := \rho \cdot b \cdot d \quad A_s = 5.04 \quad \text{Usar 4\#10 (} A_s = 5.06 \text{ plg}^2 \text{)}$$

(Deberá verificarse que el ancho de la sección sea adecuado para la cantidad de varillas)

Revisión de la sección (dado que se supuso el valor de  $\phi$  y la cantidad de acero aumentó)

$$A_s := 5.06 \quad \beta_1 := 0.85 \quad \epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{\min} := \max \left( \frac{200}{f_y}, \frac{3 \cdot \sqrt{f_c}}{f_y} \right) \quad \rho := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho_{\max} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right)$$

$$\rho_{\min} = 0.00333 \quad \rho = 0.01205 \quad \rho_{\max} = 0.018 \quad \text{La sección es dúctil } \phi := 0.9$$

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 6.378$$

$$\phi M_n := \phi \cdot A_s \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000} \quad \phi M_n = 610.485 \quad \text{klb-pie} > M_u, \text{ OK}$$

## VIGAS DOBLEMENTE ARMADAS

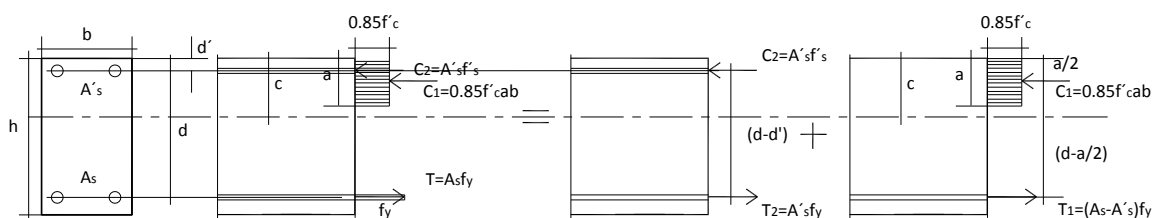
Se recurre al empleo de este tipo de vigas cuando el área a compresión en el concreto, no es suficiente para desarrollar los esfuerzos demandados en la sección transversal, es decir, cuando el área de compresión es poca.

En el diseño del acero de refuerzo, por condiciones económicas, se utilizan los momentos máximos a lo largo de la viga. En el caso de vigas continuas, con la finalidad de tener una sección constante a lo largo de toda la viga, las dimensiones de esta sección se determinan utilizando un valor establecido de momento flexionante de diseño, en algún punto en la longitud de la viga, sin embargo, en función de las condiciones de carga y de apoyo, existirán diferentes valores de momento flexionante, que bien pudieran ser mayores al considerado en el diseño de la sección transversal, en el caso de las secciones transversales sometidas a mayores momentos flexionantes, el área de concreto faltante se compensará con área adicional de acero de refuerzo.

En vigas con apoyos intermedios, el refuerzo normal (refuerzo por tensión) está en la parte superior de la viga, el doble refuerzo estará en la parte inferior y será para desarrollar los esfuerzos que en el concreto a compresión no se pueden desarrollar.

En el desarrollo de las ecuaciones utilizadas, se tienen dos suposiciones:

- Que se tiene viga doblemente reforzada.
- Que el acero de refuerzo a compresión fluye ( $f'_s = f_y$ ).



Las ecuaciones mostradas a continuación, son válidas solamente cuando el acero a compresión fluye.

Por condición de equilibrio

$$C_2 = T_2$$

Puesto que

$$f'_s = f_y$$

Por lo tanto,



$$T_2 = A_s f_y$$

De la siguiente condición de equilibrio,

$$C_1 = T_1$$

$$0.85 f'_c ab = (A_s - A'_s) f_y$$

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b}$$

Previamente se definió que,

$$\rho = \frac{A_s}{bd}$$

De manera similar

$$\rho' = \frac{A'_s}{bd}$$

La profundidad “a” del bloque a compresión queda expresada como

$$a = \frac{f_y}{0.85 f'_c} (\rho - \rho') d$$

### **Resistencia de la sección a la flexión.**

Efectuando una sumatoria de momentos respecto a la fuerza a compresión  $C_1$ ,  $\Sigma M_{c1} = 0$ :

$$M'_1 = (A_s - A'_s) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right)$$

Efectuando una sumatoria de momentos respecto a la fuerza a compresión  $C_2$ ,  $\Sigma M_{c2} = 0$ :

$$M'_2 = A'_s f_y (d - d')$$

El momento total resistente de la sección, será

$$M'_u = M'_1 + M'_2$$

El momento último de diseño  $M_u$ , será

$$M_u = \phi M'_u = \phi (M'_1 + M'_2)$$

Revisión del refuerzo límite.

De la condición de equilibrio de fuerzas internas:

$$T = T_1 + T_2$$

$$A_s f_y = (A_s - A'_s) f_y + A'_s f_y$$

En términos de cuantía de acero de refuerzo, en la condición de falla balanceada,

$$\bar{\rho}_b b d f_y = \rho_b b d f_y + \rho' b d f_y$$

$$\bar{\rho}_b f_y = \rho_b f_y + \rho' f_y$$

$$\bar{\rho}_b = \rho_b + \rho'$$

En donde,

$\bar{\rho}_b$ : es la cuantía balanceada de acero de viga doblemente reforzada.

$\rho_b$ : es la cuantía balanceada de acero de viga simplemente reforzada.

$\rho'$ : es la cuantía de acero en compresión.

En la última expresión se establece que, la cuantía balanceada de acero de refuerzo de una viga doblemente reforzada, se determina sumando la cuantía balanceada de acero de viga simplemente armada y la cuantía de acero en compresión de la misma viga.

De forma similar, se establece que la cuantía máxima de acero de refuerzo en viga doblemente reforzada y la cuantía requerida para una deformación unitaria de 0.005 en el acero de tensión, serán

$$\bar{\rho}_{\max} = \rho_{\max} + \rho'$$

$$\bar{\rho}_{0.005} = \rho_{0.005} + \rho'$$

En el caso que, el acero a compresión no fluya, entonces se tiene el caso en que

$$f'_s \neq f_y$$

Se procederá a corregir la expresión para la cuantía de acero

$$\rightarrow \bar{\rho}_b = \rho_b + \rho' \left( \frac{f'_s}{f_y} \right)$$

$$\bar{\rho}_{\max} = \rho_{\max} + \rho' \left( \frac{f'_s}{f_y} \right)$$

$$\bar{\rho}_{0.005} = \rho_{0.005} + \rho' \left( \frac{f'_s}{f_y} \right)$$

La cuantía de acero de refuerzo en tensión de una viga doblemente armada, necesaria para que el acero de compresión fluya, está determinada por la cuantía límite  $\rho_{lim}$

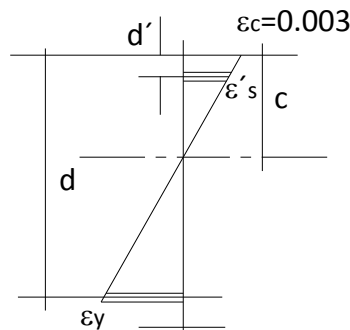
$$\rho_{lim} = 0.85\beta_1 \frac{f'_c d'}{f_y d} \frac{87000}{87000 - f_y} + \rho'$$

Si la cuantía de acero de refuerzo a tensión, en la sección, es menor a este valor límite, el esfuerzo a compresión en el acero (a compresión) en la falla, es menor que el esfuerzo de fluencia, es decir  $f'_s < f_y$ . Esto se puede determinar a partir de la ley de Hooke, en la fluencia del material

$$\epsilon_y = \frac{f_y}{E_s}$$

Si para el nivel de esfuerzo en compresión, se verifica que  $\epsilon'_s > \epsilon_y$ , entonces el acero a compresión fluyó. En este caso, la cuantía de acero a tensión, será mayor al valor límite determinado por  $\rho_{lim}$

El nivel de deformación en el acero, se establece del diagrama de deformaciones



Por triángulos semejantes

$$\frac{\epsilon'_s}{0.003} = \frac{c-d'}{c}$$

$$\rightarrow \epsilon'_s = 0.003 \left( \frac{c-d'}{c} \right)$$

Si

$$\epsilon'_s \geq \epsilon_y \rightarrow f'_s = f_y$$

$$\epsilon'_s < \epsilon_y \rightarrow f'_s < f_y$$

Revisar la capacidad de carga de la viga con los siguientes datos

$$\begin{aligned} d_p &:= 2.5 & f_c &:= 5000 & A_{sp} &:= 1.58 & b &:= 12 \\ d &:= 24 & f_y &:= 60000 & A_s &:= 7.62 \end{aligned}$$

Cuantías de acero

$$\rho_p := \frac{A_{sp}}{b \cdot d} \quad \rho_p = 0.0055 \quad \rho := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho = 0.0265$$

Cuantía máxima como simplemente armada

$$\beta_1 := 0.8 \quad \epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{\max} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right) \quad \rho_{\max} = 0.0213$$

Puesto que  $\rho > \rho_{\max}$  se considera que la viga es doblemente armada.

Cuantía de acero límite para que el acero a compresión fluya  $E_s := 29000000$

$$\rho_{\lim} := \rho_p + 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{d_p}{d} \cdot \frac{0.003}{0.003 - \frac{f_y}{E_s}} \quad \rho_{\lim} = 0.0245$$

Puesto que  $\rho > \rho_{\lim}$  se tendrá que el acero a compresión sí fluye al momento de la falla

Cuantía de acero máxima como doblemente armada

$$\rho_{\max} := \rho_{\max} + \rho_p \quad \rho_{\max} = 0.0267$$

Resistencia de la sección

$$a := \frac{(A_s - A_{sp}) \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 7.106$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 8.882$$

$$\epsilon_t := 0.003 \cdot \left( \frac{d - c}{c} \right) \quad \epsilon_t = 0.0051 > 0.005, \text{ por lo tanto } \phi := 0.9$$

$$\phi M_n := \phi \cdot f_y \cdot \left[ A_{sp} \cdot (d - d_p) + (A_s - A_{sp}) \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000}$$

$$\phi M_n = 708.6161$$

Solución en base a procedimiento utilizando ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} d_p &:= 2.5 & f_c &:= 5000 & A_{sp} &:= 1.58 & b &:= 12 \\ d &:= 24 & f_y &:= 60000 & A_s &:= 7.62 \end{aligned}$$

Considerando que el acero en compresión fluye  $f'_s = f_y$   $\beta_1 := 0.8$   $E_s := 29000000$

As  $f_y = 0.85f'_c \beta_1 b c + A'_s f_y$  despejando c:

$$c := \frac{(A_s - A_{sp}) \cdot f_y}{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c \cdot b} \quad c = 8.882$$

$$a := \beta_1 \cdot c \quad a = 7.106$$

Cálculo de las deformaciones unitarias del acero en compresión para verificar que fluye

$$\begin{aligned} \epsilon_{sp} &:= \frac{(c - d_p)}{c} \cdot 0.003 & \epsilon_y &:= \frac{f_y}{E_s} \\ \epsilon_{sp} &= 0.0022 & & \epsilon_y = 0.0021 \quad \text{Por lo que el acero a comp. fluye} \end{aligned}$$

Deformación unitaria del acero en tensión

$$\epsilon_t := \frac{d - c}{c} \cdot 0.003 \quad \epsilon_t = 0.0051 > 0.005 \text{ por lo que } \phi := 0.9$$

$$\phi M_n := \phi \cdot f_y \cdot \left[ A_{sp} \cdot (d - d_p) + (A_s - A_{sp}) \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000}$$

$$\phi M_n = 708.6161$$

Revisar la capacidad de carga de la viga con los siguientes datos

$$\begin{aligned} d_p &:= 2.5 & f_c &:= 3000 & A_{sp} &:= 2 & b &:= 14 \\ d &:= 24 & f_y &:= 60000 & A_s &:= 6.25 \end{aligned}$$

Cuantías de acero

$$\rho_p := \frac{A_{sp}}{b \cdot d} \quad \rho_p = 0.006 \quad \rho := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho = 0.0186$$

Cuantía máxima como simplemente armada

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= 0.85 & \epsilon_t &:= 0.005 \\ \rho_{max} &:= \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right) & \rho_{max} &= 0.0135 \end{aligned}$$

Puesto que  $\rho > \rho_{max}$  se considera que la viga es doblemente armada.

Cuantía de acero límite para que el acero a compresión fluya  $E_s := 29000000$

$$\rho_{lim} := \rho_p + 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{d_p}{d} \cdot \frac{0.003}{0.003 - \frac{f_y}{E_s}} \quad \rho_{lim} = 0.0181$$

Puesto que  $\rho > \rho_{lim}$  se tendrá que el acero a compresión sí fluye al momento de la falla

Cuantía de acero máxima como doblemente armada

$$\rho_{max} := \rho_{max} + \rho_p \quad \rho_{max} = 0.0195$$

Resistencia de la sección

$$a := \frac{(A_s - A_{sp}) \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 7.143$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 8.403$$

$$\epsilon_t := 0.003 \cdot \left( \frac{d - c}{c} \right) \quad \epsilon_t = 0.00557 > 0.005, \text{ por lo tanto } \phi := 0.9$$

$$\phi M_n := \phi \cdot f_y \cdot \left[ A_{sp} \cdot (d - d_p) + (A_s - A_{sp}) \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000}$$

$$\phi M_n = 584.1964$$

Revisar la capacidad de carga de la viga con los siguientes datos

$$\begin{aligned} d_p &:= 2 & f_c &:= 5000 & A_{sp} &:= 1.56 & b &:= 11 \\ d &:= 20 & f_y &:= 60000 & A_s &:= 4.68 \end{aligned}$$

Cuantías de acero

$$\rho_p := \frac{A_{sp}}{b \cdot d} \quad \rho_p = 0.0071 \quad \rho := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho = 0.02127$$

Cuantía máxima como simplemente armada

$$\beta_1 := 0.8 \quad \epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{max} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right) \quad \rho_{max} = 0.0213$$

Puesto que  $\rho < \rho_{max}$  no se puede concluir que la viga sea doblemente armada.

Suponiendo que se tiene viga doblemente armada, con la finalidad de determinar la contribución del acero a compresión a la resistencia de la viga.

Cuantía de acero límite para que el acero a compresión fluya  $E_s := 29000000$

$$\rho_{lim} := \rho_p + 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{d_p}{d} \cdot \frac{0.003}{0.003 - \frac{f_y}{E_s}} \quad \rho_{lim} = 0.0254$$

Puesto que  $\rho < \rho_{lim}$  se tendrá que el acero a compresión no fluye al momento de la falla

Cálculo del esfuerzo de trabajo del acero en compresión, suponiendo que el acero en tensión fluye

$$a := \frac{(A_s - A_{sp}) \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 4.004$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 5.005$$

$$\epsilon_{sp} := 0.003 \cdot \left( \frac{c - d_p}{c} \right) \quad \epsilon_y := \frac{f_y}{E_s}$$

$$\epsilon_{sp} = 0.0018 < \epsilon_y = 0.0021 \quad \text{El acero en comp no fluye, } f'_s < f_y$$

Recurriendo al análisis mediante estática (condición de equilibrio de fzas int):

$$0.85 f'_c \beta_1 c b + A'_s f'_s = A_s f_y$$

El esf en el acero a comp en terminos de la def unitaria, respecto al eje neutro

$$f'_s = E_s \epsilon'_s = E_s [ 0.003 (c - d') / c ]$$

$$0.85 f'_c \beta_1 c b + A'_s E_s [ 0.003 (c - d') / c ] = A_s f_y$$

$$0.85 f'_c \beta_1 c^2 b + A'_s E_s [ 0.003 (c - d') ] = A_s f_y c$$

$$(0.85 f'_c \beta_1 b) c^2 + (0.003 A'_s E_s - A_s f_y) c - A'_s E_s d' = 0$$

$$0.85 \cdot f_c \cdot \beta_1 \cdot b = 37400 \quad 0.003 \cdot A_{sp} \cdot E_s - A_s \cdot f_y = -145080 \quad A_{sp} \cdot E_s \cdot d_p \cdot 0.003 = 271440$$

Se deberá resolver la siguiente ecuación:

$$37\,400\,c^2 - 145\,080\,c - 271\,440 = 0$$

$$f(c) := c^2 - \frac{145080}{37400} \cdot c - \frac{271440}{37400}$$

$$\underline{\underline{c}} := \text{root}(f(c), c) \quad c = 5.259$$

$$\underline{\underline{a}} := \beta_1 \cdot c \quad a = 4.207$$

$$f_{sp} := E_s \cdot \left[ 0.003 \cdot \frac{(c - d_p)}{c} \right] \quad f_{sp} = 53914.898$$

Resistencia de la sección

$$\underline{\underline{\epsilon_t}} := 0.003 \cdot \left( \frac{d - c}{c} \right) \quad \epsilon_t = 0.00841 > 0.005, \text{ por lo tanto } \underline{\underline{\phi}} := 0.9$$

$$\underline{\underline{\phi M_n}} := \phi \cdot \left[ A_{sp} \cdot (d - d_p) \cdot f_{sp} + \left( A_s - A_{sp} \cdot \frac{f_{sp}}{f_y} \right) \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot f_y \right] \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000}$$

$$\phi M_n = 377.5507 \quad \text{klb-pie}$$



## DISEÑO DE VIGA DOBLEMENTE ARMADA

Razones arquitectónicas requieren la sección con los datos indicados a continuación, para una viga simplemente apoyada, determinar la cantidad de acero de refuerzo, de acuerdo con los requerimientos del ACI. La carga muerta incluye el peso propio de la sección.

$$\begin{array}{llll} b := 15 \text{ plg} & f_c := 4000 \text{ lb/plg}^2 & CV := 4.7 \text{ klb/pie} & L := 26 \text{ pies} \\ h := 31 & f_y := 60000 \text{ lb/plg}^2 & CM := 3.85 \text{ klb/pie} & \\ d := 28 \text{ plg} & d_p := 3 \text{ plg} & & \end{array}$$

Para determinar el armado en la viga, se calcula como simplemente armada, si la capacidad del refuerzo no es suficiente para los esfuerzos impuestos por el momento último de diseño ( $M_u$ ), entonces, deberá diseñarse como doblemente armada.

Momento último de diseño,  $M_u$ :

$$\begin{array}{ll} W_u := 1.2 \cdot CM + 1.6 \cdot CV & W_u = 12.14 \text{ klb-pie} \\ M_u := \frac{W_u \cdot L^2}{8} & M_u = 1025.83 \text{ klb-pie} \end{array}$$

Suponiendo  $\phi := 0.9$

$$M_n := \frac{M_u \cdot 12}{\phi} \quad M_n = 13677.733 \text{ klb-plg}$$

suponiendo el máximo acero de tensión posible, sin acero de compresión y calculando la resistencia por momento nominal de la viga

$$\begin{array}{ll} \beta_1 := 0.85 & \epsilon_t := 0.005 \\ \rho_{max} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right) & \rho_{max} = 0.0181 \\ A_{s1} := \rho_{max} \cdot b \cdot d & A_{s1} = 7.586 \end{array}$$

Determinación del momento resistente de la sección con la cantidad de acero de refuerzo calculada

Profundidad del bloque a compresión "a"

$$a := \frac{A_{s1} \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 8.925$$

La resistencia de la sección con el área de acero determinada

$$M_{u1} := \phi \cdot A_{s1} \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{1000} \quad M_{u1} = 9642.313 \text{ klb-plg}$$

$$M_{n1} := \frac{M_{u1}}{\phi}$$

$$M_{n1} = 10713.682 \text{ klb-plg} < M_n$$

Resistencia que deberá ser suministrada con acero a compresión:

$$M_{n2} := M_n - M_{n1}$$

$$M_{n2} = 2964.052$$

Revisión para determinar si el acero en compresión fluye

$$a = 8.925$$

$$d_p = 3$$

$$f_y = 60000$$

$$E_s := 29000000$$

$$c := \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = 10.5$$

Deformación del acero en compresión

$$\epsilon_y := \frac{f_y}{E_s}$$

$$\epsilon_{sp} := \frac{c - d_p}{c} \cdot 0.003$$

$$\epsilon_{sp} = 0.00214 > \epsilon_y = 0.00207$$

El acero en compresión sí fluye

Área de acero requerido en compresión

$$A_{sp} := \frac{M_{n2} \cdot 1000}{(f_y - 0.85 \cdot f_c) \cdot (d - d_p)}$$

$$A_{sp} = 2.095$$

$$\text{Usar 3\#8} \quad A_{sp} := 2.35$$

$$A_s := A_{s1} + A_{sp}$$

$$A_s = 9.936$$

$$\text{Usar 8\#10} \quad A_s := 10.12$$

Revisión de la sección y acero en tensión y compresión propuestos

$$\rho_p := \frac{A_{sp}}{b \cdot d}$$

$$\rho_p = 0.0056$$

$$\rho := \frac{A_s}{b \cdot d}$$

$$\rho = 0.0241$$

Cuantía máxima como simplemente armada

$$\beta_1 := 0.85$$

$$\epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{max} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right)$$

$$\rho_{max} = 0.0181$$

Puesto que  $\rho > \rho_{max}$  se puede concluir que la viga es doblemente armada.

Cuantía de acero límite para que el acero a compresión fluya

$$\rho_{lim} := \rho_p + 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{d_p}{d} \cdot \frac{0.003}{0.003 - \frac{f_y}{E_s}} \quad \rho_{lim} = 0.0222$$

Puesto que  $\rho > \rho_{lim}$  se tendrá que el acero a compresión sí fluye al momento de la falla

Cálculo del esfuerzo de trabajo del acero en compresión

$$a := \frac{(A_s - A_{sp}) \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b}$$

$$a = 9.141$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 10.754$$

$$\epsilon_{sp} := 0.003 \cdot \left( \frac{c - dp}{c} \right) \quad \epsilon_y := \frac{f_y}{E_s}$$

$$\epsilon_{sp} = 0.00216 > \epsilon_y = 0.0021 \quad \text{El acero en comp. sí fluye, } f'_s = f_y$$

Deformación unitaria del acero en tensión para la determinación del valor  $\phi$

$$\epsilon_t := \frac{d - c}{c} \cdot 0.003 \quad \epsilon_t = 0.0048 \quad \begin{array}{l} \text{Dado que } 0.0048 < \epsilon_t < 0.005 \\ \text{La falla es en la zona de transición} \end{array}$$

$$\phi := 0.65 + (\epsilon_t - 0.002) \cdot \frac{250}{3} \quad \phi = 0.884$$

Resistencia de la sección

$$A_{s1} := A_s - A_{sp} \quad A_{s1} = 7.77$$

$$M_{n1} := A_{s1} \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{1000 \cdot 12} \quad M_{n1} = 910.233 \quad \text{klb-pie}$$

$$M_{n2} := A_{sp} \cdot f_y \cdot (d - dp) \cdot \frac{1}{1000 \cdot 12} \quad M_{n2} = 293.75 \quad \text{klb-pie}$$

$$M_n := M_{n1} + M_{n2} \quad M_n = 1203.983 \quad \text{klb-pie}$$

$$\phi \cdot M_n = 1064.603 \quad \text{klb-pie} > M_u = 1025.83 \quad \text{klb-pie}$$

## DISEÑO DE VIGA DOBLEMENTE ARMADA EJEMPLO 2

Razones arquitectónicas requieren la sección con los datos indicados a continuación, para una viga simplemente apoyada, determinar la cantidad de acero de refuerzo, de acuerdo con los requerimientos del ACI. La carga muerta incluye el peso propio de la sección.

$$\begin{array}{llll} \underline{b} := 10 \text{ plg} & \underline{f_c} := 4000 \text{ lb/plg}^2 & \underline{C_V} := 2.47 \text{ klb/pie} & \underline{L} := 18 \text{ pies} \\ \underline{h} := 20 & \underline{f_y} := 60000 \text{ lb/plg}^2 & \underline{C_M} := 1.05 \text{ klb/pie} & \\ \underline{d} := 16 \text{ plg} & \underline{d_p} := 2.5 \text{ plg} & & \end{array}$$

Para determinar el armado en la viga, se calcula como simplemente armada, si la capacidad del refuerzo no es suficiente para los esfuerzos impuestos por el momento último de diseño ( $M_u$ ), entonces, deberá diseñarse como doblemente armada.

Momento último de diseño,  $M_u$ :

$$\begin{array}{ll} \underline{W_u} := 1.2 \cdot C_M + 1.6 \cdot C_V & W_u = 5.212 \text{ klb-pie} \\ \underline{M_u} := \frac{W_u \cdot L^2}{8} & M_u = 211.086 \text{ klb-pie} \end{array}$$

Suponiendo  $\phi := 0.9$

$$\underline{M_n} := \frac{M_u \cdot 12}{\phi} \quad M_n = 2814.48 \text{ klb-plg}$$

suponiendo el máximo acero de tensión posible sin acero de compresión y calculando la resistencia por momento nominal de la viga

$$\begin{array}{ll} \underline{\beta_1} := 0.85 & \underline{\epsilon_t} := 0.005 \\ \underline{\rho_{max}} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right) & \rho_{max} = 0.0181 \\ \underline{A_{s1}} := \rho_{max} \cdot b \cdot d & A_{s1} = 2.89 \end{array}$$

Determinación del momento resistente de la sección con la cantidad de acero de refuerzo calculada

Profundidad del bloque a compresión "a"

$$\underline{a} := \frac{A_{s1} \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 5.1$$

La resistencia de la sección con el área de acero determinada

$$\underline{M_{u1}} := \phi \cdot A_{s1} \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{1000} \quad M_{u1} = 2099.007 \text{ klb-plg}$$

$$M_{n1} := \frac{M_{u1}}{\phi}$$

$$M_{n1} = 2332.23 \text{ klb-plg} < M_n$$

Resistencia que deberá ser suministrada con acero a compresión:

$$M_{n2} := M_n - M_{n1}$$

$$M_{n2} = 482.25$$

Revisión para determinar si el acero en compresión fluye

$$a = 5.1$$

$$d_p = 2.5$$

$$f_y = 60000$$

$$E_s := 29000000$$

$$c := \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = 6$$

Deformación del acero en compresión

$$\epsilon_y := \frac{f_y}{E_s}$$

$$\epsilon_{sp} := \frac{c - d_p}{c} \cdot 0.003$$

$$\epsilon_{sp} = 0.00175 < \epsilon_y = 0.00207$$

El acero en compresión no fluye

$$f_{sp} := \epsilon_{sp} \cdot E_s \quad f_{sp} = 50750$$

Suponiendo un esfuerzo de trabajo en el acero de compresión:  $f_{sp} := 51100$

Area de acero requerido en compresión

$$A_{sp} := \frac{M_{n2} \cdot 1000}{(f_{sp} - 0.85 \cdot f_c) \cdot (d - d_p)}$$

$$A_{sp} = 0.7489$$

$$\text{Usar 4\#4} \quad A_{sp} := 0.78$$

$$A_s := A_{s1} + A_{sp} \cdot \left( \frac{f_{sp}}{f_y} \right)$$

$$A_s = 3.554$$

$$\text{Usar 3\#9, 3\#4} \quad A_s := 3.58$$

Revisión de la sección y acero en tensión y compresión propuestos

$$\rho_p := \frac{A_{sp}}{b \cdot d}$$

$$\rho_p = 0.0049$$

$$\rho := \frac{A_s}{b \cdot d}$$

$$\rho = 0.0224$$

Cuantía máxima como simplemente armada

$$\beta_1 := 0.85 \quad \epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{max} := \left( \frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y} \right) \cdot \left( \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \right)$$

$$\rho_{max} = 0.0181$$

Puesto que  $\rho > \rho_{max}$  se puede concluir que la viga es doblemente armada.

Cuantía de acero límite para que el acero a compresión fluya

$$\rho_{lim} := \rho_p + 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{d_p}{d} \cdot \frac{0.003}{0.003 - \frac{f_y}{E_s}} \quad \rho_{lim} = 0.0291$$

Puesto que  $\rho < \rho_{lim}$  se tendrá que el acero a compresión no fluye al momento de la falla

Cálculo del esfuerzo de trabajo del acero en compresión, suponiendo que el acero en tensión fluye

$$a := \frac{(A_s - A_{sp}) \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 4.941$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 5.813$$

$$\epsilon_{sp} := 0.003 \cdot \left( \frac{c - d_p}{c} \right) \quad \epsilon_y := \frac{f_y}{E_s}$$

$$\epsilon_{sp} = 0.00171 < \epsilon_y = 0.0021 \quad \text{El acero en comp. no fluye, } f'_s < f_y$$

Recurriendo al análisis mediante estática (condición de equilibrio de fzas int):

$$0.85 f'_c \beta_1 c b + A'_s f'_s = A_s f_y$$

El esf en el acero a comp en terminos de la def unitaria, respecto al eje neutro

$$f'_s = E_s \epsilon'_s = E_s [0.003 (c - d') / c]$$

$$0.85 f'_c \beta_1 c b + A'_s E_s [0.003 (c - d') / c] = A_s f_y$$

$$0.85 f'_c \beta_1 c^2 b + A'_s E_s [0.003 (c - d')] = A_s f_y c$$

$$(0.85 f'_c \beta_1 b) c^2 + (0.003 A'_s E_s - A_s f_y) c - A'_s E_s d' = 0$$

$$0.85 \cdot f_c \cdot \beta_1 \cdot b = 28900 \quad 0.003 \cdot A_{sp} \cdot E_s - A_s \cdot f_y = -146940 \quad A_{sp} \cdot E_s \cdot d_p \cdot 0.003 = 169650$$

Se deberá resolver la siguiente ecuación:

$$28900 c^2 - 146940 c - 169650 = 0$$

$$f(c) := c^2 - \frac{146940}{28900} \cdot c - \frac{169650}{28900}$$

$$c := \text{root}(f(c), c) \quad c = 6.054$$

$$a := \beta_1 \cdot c \quad a = 5.146$$

$$f_{sp} := E_s \cdot \left[ 0.003 \cdot \frac{(c - d_p)}{c} \right] \quad f_{sp} = 51073.728$$

Resistencia de la sección

$$\epsilon_t := 0.003 \cdot \left( \frac{d - c}{c} \right) \quad \epsilon_t = 0.00493 \quad \text{Dado que } 0.00493 < \epsilon_t < 0.005$$

La falla es en la zona de transición

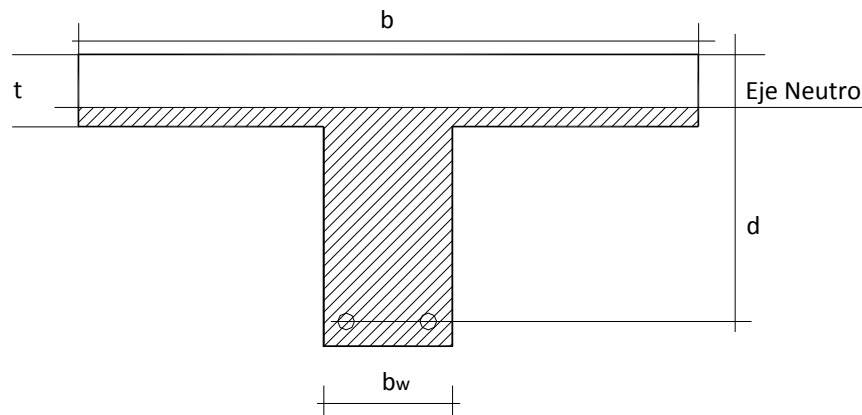
$$\phi := 0.65 + (\epsilon_t - 0.002) \cdot \frac{250}{3} \quad \phi = 0.894$$

$$\phi M_n := \phi \cdot \left[ A_s \cdot (d - d_p) \cdot f_{sp} + \left( A_s - A_s \cdot \frac{f_{sp}}{f_y} \right) \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot f_y \right] \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000}$$

$$\phi M_n = 215.095 \quad \text{klb-pie} > \quad M_u = 211.086$$

## VIGAS “T”

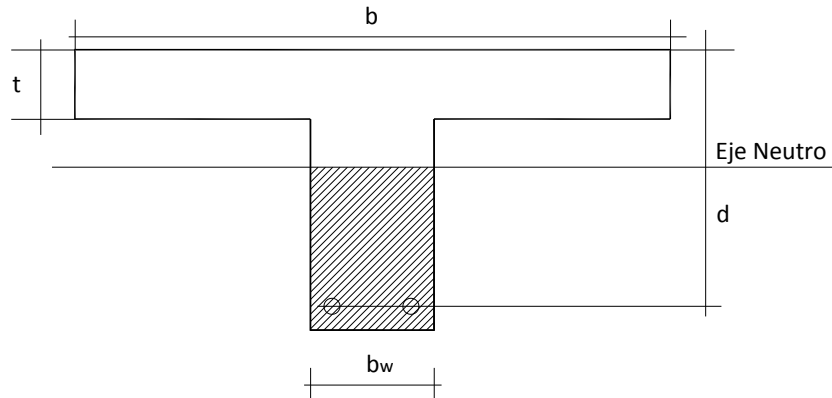
En el análisis y diseño de vigas de concreto reforzado, cuando la losa que es soportada por una viga, sean coladas monolíticamente, se incorpora como elemento que adiciona resistencia a la viga, con lo cual se obtiene un elemento con sección transversal de forma geométrica en “T”, lo cual permite que la zona de concreto en compresión sea mayor, comparada con el caso de las vigas rectangulares de concreto reforzado. En el análisis y diseño de este tipo de elementos (vigas T) se deberá verificar que efectivamente el eje neutro se encuentre en el alma de la sección y no dentro de los patines (espesor de la losa), pues de esto depende que el análisis se realice como viga rectangular o viga T. El ancho efectivo “ $b$ ”, en los patines, se debe determinar, de acuerdo con el criterio del ACI, en función de la longitud del claro de la viga, la altura de la patines (o espesor de la losa) y de la distancia libre entre vigas contiguas. Ya que de estas condiciones depende la distribución de esfuerzos en la sección transversal en los patines, con base en este criterio del ACI, se puede considerar que la distribución de esfuerzos y deformaciones unitarias, son en dirección perpendicular a la sección analizada.



En el caso mostrado en la figura anterior, el eje neutro se localiza dentro del espesor de l patín, toda la sección de concreto en área de tensión, no contribuye a la resistencia de la sección. Este caso es análogo a las vigas de sección rectangular.

El siguiente caso mostrado, corresponde a una viga de sección “T”, pues el eje neutro se localiza en el alma de la sección transversal, lo que origina que el área de concreto sometida a compresión, presente una sección geométrica en “T”





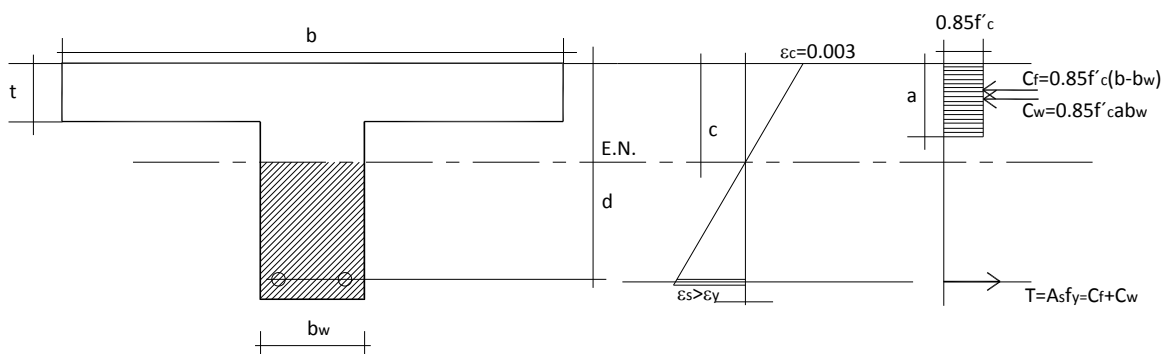
De acuerdo con el criterio del ACI (6.3.2), para el caso de vigas simétricas

$$b \leq \begin{cases} 16t + b_w \\ \text{Dist.c.c} \\ \frac{L}{4} + b_w \end{cases}$$

Para el caso de vigas no simétricas

$$b \leq \begin{cases} 6t + b_w \\ \frac{1}{2} \text{ Dist.c.c} \\ \frac{L}{12} + b_w \end{cases}$$

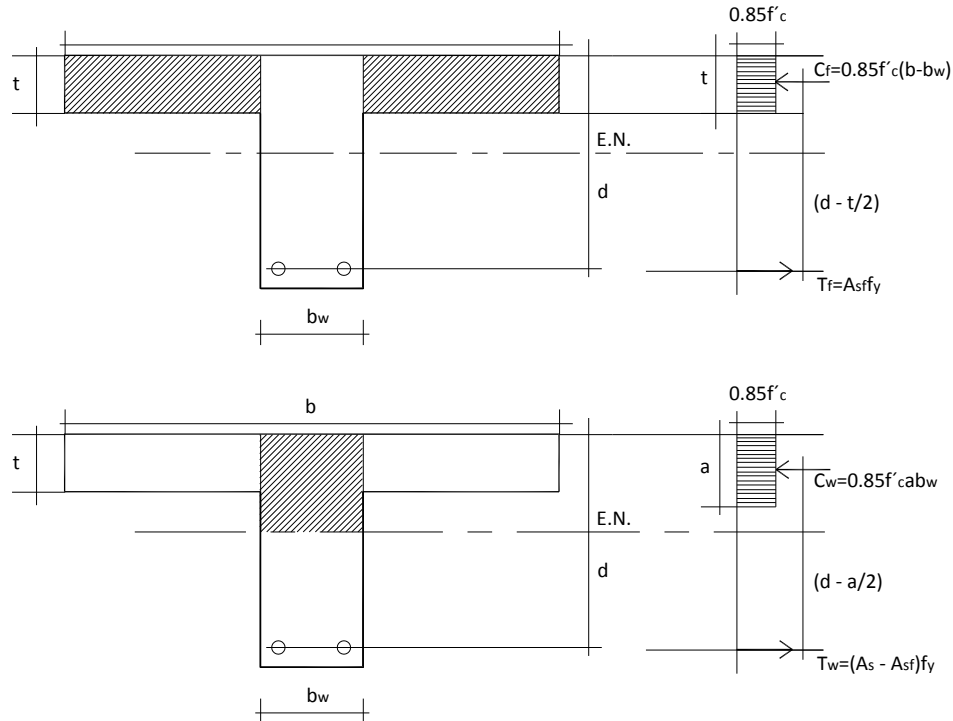
Para vigas T aisladas:  $t \geq b_w / 2$  y  $b \leq 4 b_w$



Es conveniente tener deformaciones en el acero de refuerzo mayores a 0.005 y no deben ser menores a 0.004, a menos que el elemento este sometido a una carga axial mayor de  $0.10 f'_c A_g$ . Usualmente en vigas T, las deformaciones en el acero suelen ser mayores a 0.005 debido a sus patines en compresión muy grandes. Para tales elementos los valores

de "c" normalmente son pequeños y los valores de deformación unitaria calculada del acero son muy grandes.

Considerando por separado las fuerzas de compresión desarrolladas en los patines y el alma, verificando la condición de equilibrio de fuerzas internas en cada caso, cuando se tiene viga T:



En donde,

$A_{sf}$  : Área de acero requerida para equilibrar la fuerza de compresión en el ala.

$(A_s - A_{sf})$ : Área de acero requerida para equilibrar la fuerza de compresión en el alma.

Resistencia del ala:

$$\begin{aligned} C_f &= T_f \\ 0.85 f'_c t (b - b_w) &= A_{sf} f_y \\ A_{sf} &= \frac{0.85 f'_c t (b - b_w)}{f_y} \\ M_f &= A_{sf} f_y \left( d - \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

Resistencia del alma:

$$\begin{aligned} C_w &= T_w \\ 0.85 f'_c a b_w &= (A_s - A_{sf}) f_y \\ a &= \frac{(A_s - A_{sf}) f_y}{0.85 f'_c b_w} \\ M_w &= (A_s - A_{sf}) f_y \left( d - \frac{a}{2} \right) \end{aligned}$$

Por lo que, el momento último teórico  $M'_u$  será:

$$M'_u = M_w + M_f$$

Y el momento último de diseño  $M_u$ , será:

$$M_u = \phi M'_u$$

Cuantía de acero, como en el caso de viga rectangular, o en el caso de viga doblemente armada:

$$\rho_{\min} \geq \begin{cases} \frac{3\sqrt{f'_c}}{f_y} \\ \frac{200}{f_y} \end{cases}$$

Cuantía de acero en el ala:

$$\rho_f = \frac{A_{sf}}{b_w d}$$

Cuantía de acero en el alma:

$$\rho_w = \frac{A_s}{b_w d}$$

Cuantía de acero máxima en el alma:

$$\rho_{w,\max} = \rho_{\max} + \rho_f$$

En donde,

$\rho_{\max}$ : corresponde a la cuantía máxima de acero para viga rectangular simplemente armada.

### Revisión de la capacidad de una sección dada

$$\begin{array}{llll} L := 30 \text{ pies} & t := 4 \text{ plg} & f_c := 4000 \text{ lb/plg}^2 & \beta_1 := 0.85 \quad b_w := 10 \text{ plg} \\ \text{Sep} := 50 \text{ plg} & d := 24 \text{ plg} & f_y := 60000 \text{ lb/plg}^2 & A_s := 6 \text{ plg}^2 \end{array}$$

$$b := \min\left(16 \cdot t + b_w, \text{Sep} + b_w, \frac{L \cdot 12}{4} + b_w\right) \quad b = 60 \text{ plg}$$

Verificación de Asmin

$$\frac{3 \cdot \sqrt{f_c}}{f_y} \cdot b_w \cdot d = 0.759 \quad \frac{200}{f_y} \cdot b_w \cdot d = 0.8 < A_s = 6 \text{ plg}^2$$

Determinación de la localización del eje neutro, para establecer si se trata de viga "T"

Profundidad del bloque a compresión de viga "T"

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 1.765 \text{ plg} < t, \text{ por lo que se trata de viga rectang.}$$

Verificación de la cuantía de acero

$$\epsilon_t := 0.005$$

$$\rho := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho = 0.0042$$

$$\rho_{\max} := 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \quad \rho_{\max} = 0.0181 > \rho$$

Ubicación del Eje neutro y deformación en tensión

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 2.076 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t := \frac{(d - c)}{c} \cdot 0.003 \quad \epsilon_t = 0.0317 > 0.005 \text{ por lo que se tiene sección dúctil}$$

$$\phi := 0.9$$

Capacidad de la sección

$$\phi M_n := \phi \cdot A_s \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{12000}$$

$$\phi M_n = 624.176 \text{ klb-pie}$$

### Revisión de la capacidad de una sección dada

$$\begin{array}{llll} b := 30 \text{ plg} & t := 4 \text{ plg} & f_c := 4000 \text{ lb/plg}^2 & \beta_1 := 0.85 \\ b_w := 14 \text{ plg} & d := 30 \text{ plg} & f_y := 60000 \text{ lb/plg}^2 & A_s := 10.12 \text{ plg}^2 \end{array}$$

Verificación de Asmin

$$\frac{3 \cdot \sqrt{f_c}}{f_y} \cdot b_w \cdot d = 1.328 \quad \frac{200}{f_y} \cdot b_w \cdot d = 1.4 < A_s = 10.12 \text{ plg}^2$$

Determinación de la localización del eje neutro, para establecer si se trata de viga "T"

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 5.953 \text{ plg} > t, \text{ por lo que se trata de viga "T"}$$

Área de acero Asf para equilibrar la fuerza resistente por el ala

$$A_{sf} := \frac{0.85 \cdot f_c \cdot t \cdot (b - b_w)}{f_y} \quad A_{sf} = 3.627 \text{ plg}^2$$

Área de acero Aw, para equilibrar la fuerza resistente por el alma

$$A_w := A_s - A_{sf} \quad A_w = 6.493 \text{ plg}^2$$

Verificación de la cuantía de acero

$$\epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_w := \frac{A_s}{b_w \cdot d} \quad \rho_w = 0.0241$$

$$\rho_f := \frac{A_{sf}}{b_w \cdot d} \quad \rho_f = 0.0086$$

$$\rho_{max} := 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \quad \rho_{max} = 0.0181$$

$$\rho_{wmax} := \rho_{max} + \rho_f \quad \rho_{wmax} = 0.0267 > \rho_w = 0.0241$$

Profundidad del bloque a compresión de viga "T"

$$a := \frac{A_w \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b_w} \quad a = 8.185 \text{ plg}$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 9.629 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t := \frac{(d - c)}{c} \cdot 0.003 \quad \epsilon_t = 0.0063 > 0.005 \text{ por lo que } \phi := 0.9$$

Momento resistente por el ala  $M_f := \phi \cdot A_{sf} \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{t}{2}\right) \cdot \frac{1}{12000} \quad M_f = 456.96 \text{ klb-pie}$

Momento resistente por el alma  $M_w := \phi \cdot A_w \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{1}{12000} \quad M_w = 757.019 \text{ klb-pie}$

Capacidad de la sección

$$\phi M_n := M_f + M_w \quad \phi M_n = 1213.979 \text{ klb-pie}$$

Diseñar una viga T para el sistema de piso con los datos siguientes

$$b_w := 12 \text{ plg} \quad h_f := 4 \text{ plg} \quad M_D := 80 \text{ klb-pie} \quad f_c := 4000 \text{ lb/plg}^2 \quad \underline{L} := 20 \text{ pies}$$

$$d := 18 \text{ plg} \quad M_L := 100 \text{ klb-pie} \quad f_y := 60000 \text{ lb/plg}^2 \quad \text{Distcc} := 10 \text{ pies}$$

$$\text{Ancho efectivo de patin} \quad b := \min\left(16 \cdot h_f + b_w, \text{Distcc} \cdot 12, \frac{L \cdot 12}{4} + b_w\right) \quad b = 72 \text{ plg}$$

$$\text{Suponiendo viga rectangular, con} \quad \phi := 0.9 \quad \beta_1 := 0.85$$

$$M_u := 1.2 \cdot M_D + 1.6 \cdot M_L \quad M_u = 256 \text{ klb-pie}$$

$$M_n := \frac{M_u}{\phi} \quad M_n = 284.444 \text{ klb-pie}$$

$$\underline{c} := h_f \quad a := \beta_1 \cdot c \quad a = 3.4 \text{ plg}$$

$$A_s := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right)} \quad A_s = 3.49 \text{ plg}^2$$

Revisando el valor de "c", a través de un proceso iterativo

$$\underline{a} := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 0.855 \text{ plg}$$

$$\underline{c} := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 1.006 \text{ plg} \quad \text{puesto que } c < h_f, \text{ se tiene viga rectangular (el E.N. se encuentra dentro del patin)}$$

$$\underline{A_s} := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right)} \quad A_s = 3.237 \text{ plg}^2$$

$$\underline{a} := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 0.793 \text{ plg}$$

$$\underline{A_s} := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right)} \quad A_s = 3.232 \text{ plg}^2 \quad \text{Valor aceptable, puesto que es suficientemente cercano al anterior.}$$

Cuantías de acero  $\epsilon_t := 0.005$

$$\rho_{\min} := \max\left(\frac{3\sqrt{f_c}}{f_y}, \frac{200}{f_y}\right) \quad \rho := \frac{A_s}{b_w \cdot d} \quad \rho_{\max} := \left(\frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y}\right) \cdot \left(\frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t}\right)$$

$$\rho_{\min} = 0.0033 \quad \rho = 0.015 \quad \rho_{\max} = 0.018$$

$$\underline{c} := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 0.934$$

$$\underline{\epsilon_t} := 0.003 \cdot \frac{d - c}{c} \quad \epsilon_t = 0.055 > 0.005, \text{ por lo que } \phi = 0.9 \text{ como se supuso, y}$$

$$A_s = 3.232 \text{ plg}^2$$

Diseñar una viga T para el sistema de piso con los datos siguientes

$$\begin{aligned} b_w &:= 15 \text{ plg} & h_f &:= 3 \text{ plg} & M_D &:= 200 \text{ klb-pie} & f_c &:= 3000 \text{ lb/plg}^2 & L &:= 18 \text{ pies} \\ d &:= 24 \text{ plg} & & & M_L &:= 425 \text{ klb-pie} & f_y &:= 60000 \text{ lb/plg}^2 & \text{Distcc} &:= 6 \text{ pies} \end{aligned}$$

Ancho efectivo de patin  $b := \min\left(16 \cdot h_f + b_w, \text{Distcc} \cdot 12, \frac{L \cdot 12}{4} + b_w\right) \quad b = 63 \text{ plg}$

Suponiendo viga rectangular, con  $\phi := 0.9 \quad \beta_1 := 0.85$

$$M_u := 1.2 \cdot M_D + 1.6 \cdot M_L \quad M_u = 920 \text{ klb-pie}$$

$$M_n := \frac{M_u}{\phi} \quad M_n = 1022.222 \text{ klb-pie}$$

$$c := h_f \quad a := \beta_1 \cdot c \quad a = 2.55 \text{ plg}$$

$$A_s := \frac{M_u \cdot 12 \cdot 1000}{\phi \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right)} \quad A_s = 8.996 \text{ plg}^2$$

Revisando el valor de "c", a traves de un proceso iterativo

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b} \quad a = 3.36 \text{ plg}$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 3.953 \text{ plg} \text{ puesto que } c > h_f, \text{ se tiene viga T (el E.N. se encuentra en el alma de la viga)}$$

Área de acero requerida para equilibrar la fuerza de compresión en el ala:

$$A_{sf} := \frac{0.85 \cdot f_c \cdot h_f \cdot (b - b_w)}{f_y} \quad A_{sf} = 6.12 \text{ plg}^2$$

Momento resistente por el ala

$$M_f := \phi \cdot A_{sf} \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{h_f}{2}\right) \cdot \frac{1}{1000 \cdot 12} \quad M_f = 619.65 \text{ klb-pie}$$

Momento resistente por el alma

$$M_w := M_u - M_f \quad M_w = 300.35 \text{ klb-pie}$$

Determinación del área de acero requerida para equilibrar la fuerza de compresión en el alma

Suponiendo el valor de "a"  $a := 4.7 \text{ plg}$

$$A_w := \frac{M_w \cdot 1000 \cdot 12}{\phi \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{a}{2}\right)} \quad A_w = 3.083$$

Revisando el valor propuesto de "a"

$$a := \frac{A_w \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b_w} \quad a = 4.836 \text{ El valor es suficientemente próximo al anterior, por lo que se acepta el de } A_w$$

Área total de acero requerida

$$A_s := A_{sf} + A_w \quad A_s = 9.203$$

Revisando los límites para la cantidad de acero de refuerzo, utilizando 2#14 y 4#10 en dos paquetes ( $A_{4\#10}=5.06 \text{ plg}^2$ ,  $A_{2\#14}=4.50 \text{ plg}^2$ )

$$A_s := 9.56 \text{ plg}^2$$

Área de acero  $A_{sf}$  para equilibrar la fuerza de resistente por del ala

$$A_{sf} := \frac{0.85 \cdot f_c \cdot h_f \cdot (b - b_w)}{f_y} \quad A_{sf} = 6.12 \text{ plg}^2$$

Área de acero  $A_w$ , para equilibrar la fuerza resistente por el alma

$$A_w := A_s - A_{sf} \quad A_w = 3.44 \text{ plg}^2$$

Verificación de la cuantía de acero

$$\epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_w := \frac{A_s}{b_w \cdot d} \quad \rho_w = 0.0266$$

$$\rho_f := \frac{A_{sf}}{b_w \cdot d} \quad \rho_f = 0.017$$

$$\rho_{max} := 0.85 \cdot \beta_1 \cdot \frac{f_c}{f_y} \cdot \frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t} \quad \rho_{max} = 0.0135$$

$$\rho_{wmax} := \rho_{max} + \rho_f \quad \rho_{wmax} = 0.0305 > \rho_w = 0.0266$$

Profundidad del bloque a compresión de viga "T"

$$a := \frac{A_w \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b_w} \quad a = 5.396 \text{ plg}$$

$$c := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 6.348 \text{ plg}$$

$$\epsilon_t := \frac{(d - c)}{c} \cdot 0.003 \quad \epsilon_t = 0.0083 > 0.005 \text{ por lo que } \phi := 0.9$$

Momento resistente por el ala  $M_f := \phi \cdot A_{sf} \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{h_f}{2} \right) \cdot \frac{1}{12000} \quad M_f = 619.65 \text{ klb-pie}$

Momento resistente por el alma  $M_w := \phi \cdot A_w \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{12000} \quad M_w = 329.754 \text{ klb-pie}$

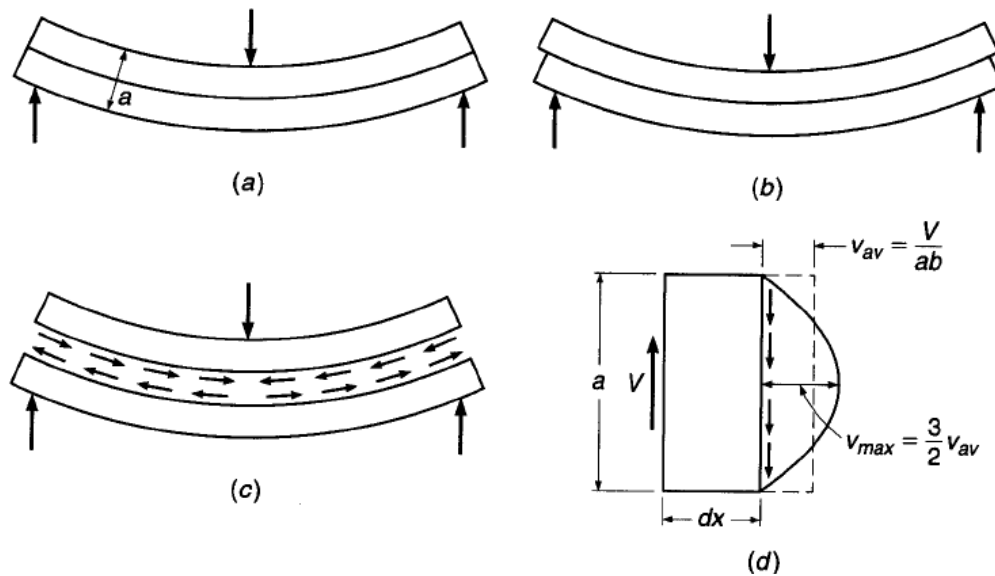
Capacidad de la sección

$$\phi M_n := M_f + M_w \quad \phi M_n = 949.404 \text{ klb-pie} > M_u = 920 \text{ klb-pie}$$

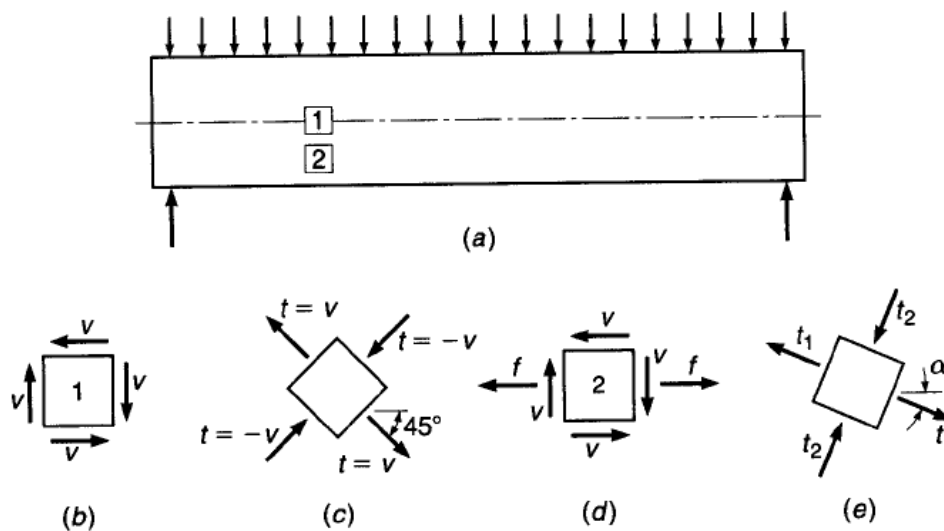


## CORTANTE Y TENSIÓN DIAGONAL.

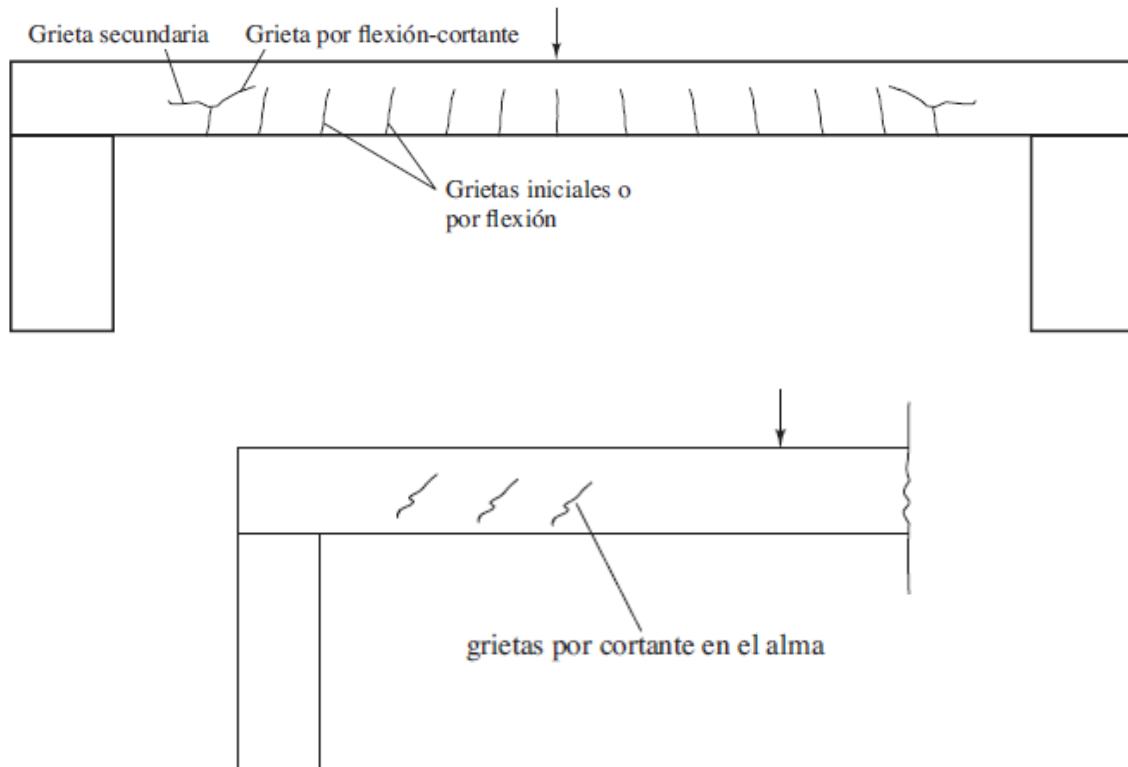
Al considerar un elemento estructural sometido a la condición de carga transversal, como la indicada en la siguiente figura, se presentarán esfuerzos longitudinales de tensión, producidos por la flexión en la pieza, sin embargo, se presentarán también esfuerzos cortantes producidos, tanto por la fuerza cortante, como por el momento flexionante, de acuerdo con el diagrama de fuerzas cortantes de la pieza.



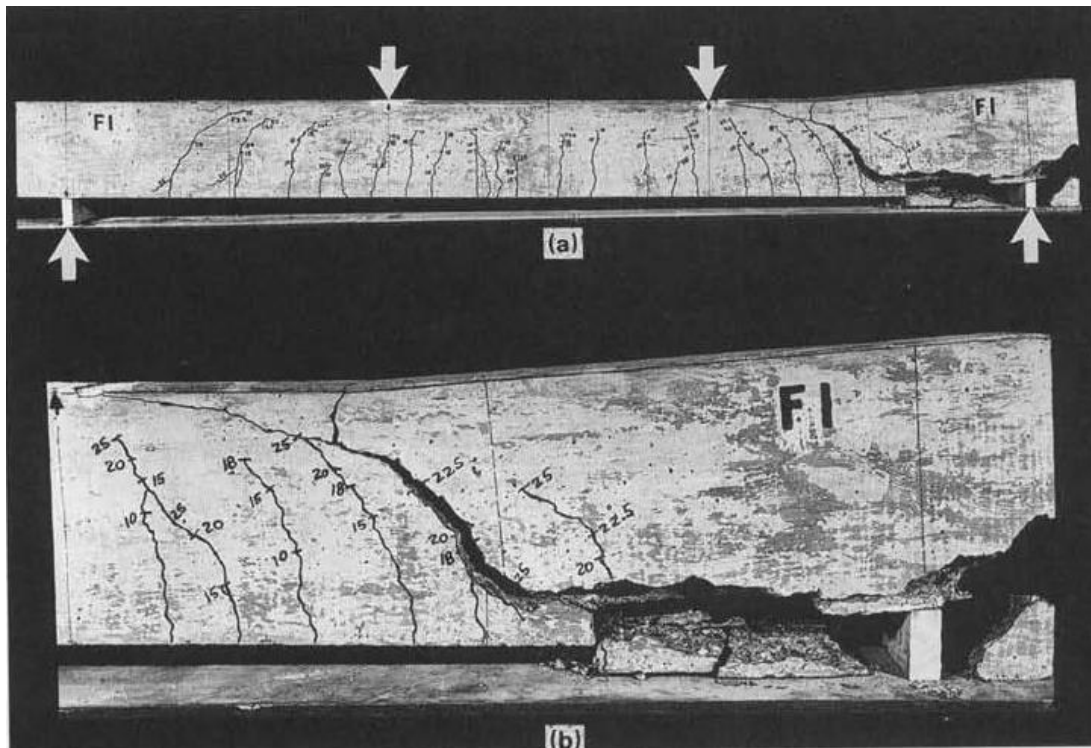
Los esfuerzos longitudinales a tensión serán máximos en las fibras más alejadas respecto a la localización del eje neutro. En el caso de los esfuerzos cortantes, estos serán máximos en la vecindad del eje neutro.



De acuerdo con el tipo y magnitud de esfuerzo, se presentarán grietas en el concreto, con base en la distribución de esfuerzos predominante en la sección:



La siguiente figura, muestra resultados de prueba de laboratorio, en el caso de viga de concreto no reforzada, simplemente apoyada, sometida a cargas concentradas. En donde se hace evidente el desarrollo de grietas de acuerdo con la distribución ideal de esfuerzos.



Los esfuerzos longitudinales de tensión, conducen a la generación de grietas verticales, cuando el refuerzo longitudinal no es suficiente para evitar la falla por tensión, es decir, este tipo de grietas es controlado por el refuerzo longitudinal en el concreto.

Al considerar el efecto de los esfuerzos por cortante solamente, estos producen un esfuerzo resultante que presenta un ángulo de  $45^\circ$ , este esfuerzo resultante produce una tensión en el concreto y las grietas que se generan son en dirección perpendicular al esfuerzo actuante (como en el caso de las grietas por flexión), de aquí que este tipo de grietas estén orientadas con un ángulo de inclinación de  $45^\circ$ .

Sin embargo, a lo largo de la pieza, se presenta una combinación de esfuerzos por flexión y por cortante, en las regiones en donde la fuerza cortante y el momento flexionante son de magnitud considerable. En este caso, las grietas que se observan, son grietas que tienen componente tanto vertical (falla producida por tensión longitudinal), como componente inclinada (falla por tensión diagonal).

En este sentido el ACI (22.5.5), establece como resistencia del concreto a fuerza cortante  $V_c$ , para el caso de elementos no presforzados sin carga axial, el valor determinado por la expresión (expresión aproximada)

$$V_c = 2\lambda\sqrt{f'_c}b_wd$$

A menos que se realice un cálculo más detallado, de acuerdo con el menor de los resultados obtenidos de las siguientes expresiones

$$V_c \leq \begin{cases} \left(1.9\lambda\sqrt{f'_c} + 2500\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) b_w d \\ (1.9\lambda\sqrt{f'_c} + 2500\rho_w) b_w d \\ 3.5\lambda\sqrt{f'_c} b_w d \end{cases}$$

En donde  $V_u$  es la fuerza cortante factorizada y  $M_u$  es el momento flexionante factorizado, las cuales ocurren simultáneamente en la sección considerada. En esta expresión de resistencia del ACI, se toma en cuenta la aportación del acero de refuerzo longitudinal en la resistencia del concreto a la tensión diagonal, a través de la cuantía de acero de refuerzo  $\rho_w$ . Determinar la resistencia del concreto a partir de esta expresión requiere del conocimiento de la cuantía de acero  $\rho_w$  y de la relación  $V_u/M_u$  en diferentes puntos de la viga, en donde se esté determinando la resistencia. Esta es una tarea un tanto tediosa, por lo que, es posible utilizar la expresión aproximada, indicada previamente.

En base a resultados experimentales, el ACI (9.6.3.1) establece que, para valores de fuerza cortante  $V_u$  por encima de la mitad del valor de resistencia a cortante del concreto

$$V_u > 0.5 \phi V_c$$

Es necesario suministrar área mínima de refuerzo a tensión diagonal a través del uso de estribos. El valor de factor de reducción de resistencia  $\phi$ , es 0.75 (ACI 21.2.1). Esta área mínima de estribos está determinada por (9.6.3.3)

$$A_{v,min} \geq \begin{cases} 0.75 \sqrt{f'_c} \frac{b_w}{f_{yt}} s \\ 50 \frac{b_w}{f_{yt}} s \end{cases}$$

En donde,

s: es la separación entre estribos.

$b_w$ : es el ancho de la sección transversal de la viga.

$f_{yt}$ : es el esfuerzo de fluencia en tensión del acero utilizado como estribo.

En el caso de ser necesario suministrar acero de refuerzo por tensión diagonal, por arriba del nivel mínimo de refuerzo ( $V_u > \phi V_c$ ), este acero de refuerzo, en el caso de suministrar estribos verticales, será determinado por la expresión (22.5.10.5.3)

$$V_s = \frac{A_v f_{yt} d}{s}$$

O bien, si (22.5.10.1)

$$V_s \geq \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

$$A_v = \frac{(V_u - \phi V_c)}{\phi f_{yt} d} s$$

$$s = \frac{\phi A_v f_{yt} d}{(V_u - \phi V_c)}$$

En la siguiente tabla se muestran los requerimientos de refuerzo por cortante, de acuerdo con el ACI:

| Condición                                                                            | Espaciamiento                                                 | ACI-14    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------|
| $V_u \leq 0.5 \phi V_c$                                                              | No se requiere refuerzo por cortante                          | 9.6.3.1   |
| $0.5 \phi V_c < V_u \leq \phi V_c$                                                   | Refuerzo mínimo por cortante $s \leq \frac{d}{2} \leq 24$ plg | 9.6.3.1   |
| $0.5 \phi V_c < V_u \leq \phi V_c + \phi 4 \sqrt{f'_c} b_w d$                        | $s \leq \frac{d}{2} \leq 24$ plg                              | 9.7.6.2.2 |
| $\phi V_c + \phi 4 \sqrt{f'_c} b_w d < V_u \leq \phi V_c + \phi 8 \sqrt{f'_c} b_w d$ | $s \leq \frac{d}{4} \leq 12$ plg                              | 9.7.6.2.2 |
| $V_u > \phi V_c + \phi 8 \sqrt{f'_c} b_w d$                                          | Incrementar la sección transversal                            | 22.5.1.2  |

El siguiente es el procedimiento recomendado para el diseño de estribos verticales:

| ¿Se requiere refuerzo por cortante?                                                                                                                                         |  |             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------|
| 1. Determinar el diagrama $V_u$ .                                                                                                                                           |  |             |
| 2. Calcular $V_u$ a una distancia "d" desde el apoyo                                                                                                                        |  | 9.4.3.2     |
| 3. Calcular $\phi V_c = 2 \phi \lambda \sqrt{f'_c} b_w d$ (o bien realizar el cálculo detallado)                                                                            |  | 22.5.5.1    |
| 4. Se requieren estribos si $V_u > 0.5 \phi V_c$                                                                                                                            |  | 9.6.3.1     |
| Diseño de estribos                                                                                                                                                          |  |             |
| 1. Revisar las dimensiones de la sección transversal cumplen con 22.5.1.2<br>$V_u \leq \phi V_c + \phi 8 \sqrt{f'_c} b_w d$                                                 |  |             |
| 2. Calcular la separación teórica entre estribos $s = A_v f_y d / V_s$ donde<br>$V_s = (V_u - \phi V_c) / \phi$                                                             |  | 22.5.10.5.3 |
| 3. Determinar la separación máxima para proveer un área mínima de refuerzo por cortante $s = \frac{A_v f_y}{0.75 \sqrt{f'_c} b_w}$ pero no más que $\frac{A_v f_y}{50 b_w}$ |  | 9.6.3.3     |
| 4. Calcular la separación máxima: $d/2 \leq 24$ plg, si $V_s \leq 4 \sqrt{f'_c} b_w d$                                                                                      |  | 9.7.6.2.2   |
| 5. Calcular la separación máxima: $d/4 \leq 12$ plg, si $V_s > 4 \sqrt{f'_c} b_w d$                                                                                         |  | 9.7.6.2.2   |

Determinar la sección transversal mínima requerida para una viga rectangular desde el punto de vista del cortante, de manera que según el código ACI no se requiera refuerzo en el alma si:

$$V_u := 27 \text{ klb} \quad f_c := 4000 \text{ lb/plg}^2 \quad \lambda := 1.0 \quad \phi := 0.75$$

Utilizando el valor conservador  $V_c = 2 \lambda (f_c')^{1/2} b_w d$

$$\phi V_c := \phi \cdot 2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c} b_w d$$

$$\phi V_c = 94.868 b_w d$$

De acuerdo con el ACI, art 11.4.6.1 establece que deberá suministrarse un área de acero de refuerzo por cortante si  $V_u$  excede a  $\phi V_c / 2$

$$b_w d := \frac{V_u \cdot 1000}{\frac{1}{2} \phi V_c} \quad b_w d = 569.21$$

| $b_w$ | $d$        | $b_w d$ |
|-------|------------|---------|
| 16    | 35.575625  | 569.21  |
| 18    | 31.6227778 | 569.21  |
| 20    | 28.4605    | 569.21  |

Usar viga 20" x 31" ( $d = 28.5"$ )

Una viga de concreto reforzado, de peso normal, de sección rectangular, con  $b_w = 14$  plg,  $h = 27$  plg,  $d = 24$  plg,  $f_c = 3000$  lb/plg<sup>2</sup>,  $f_y = 60000$  lb/plg<sup>2</sup>, determinar la separación de estribos del #3 para cada una de las siguientes fuerzas cortantes de diseño.

- a)  $V_u = 12000$  lb
- b)  $V_u = 40000$  lb
- c)  $V_u = 60000$  lb
- d)  $V_u = 150000$  lb

Datos:  $b_w := 14$   $d := 24$   $f_c := 3000$   $f_y := 60000$   $A_v := 0.22$   $\lambda := 1.0$   $\phi := 0.75$

Solución a)  $V_u := 12000$

$$V_c := 2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d \quad V_c = 36806.956 \quad \phi \cdot V_c = 27605.217$$

$$V_u = 12000 < \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot V_c = 13802.608$$

**Por lo tanto, no se requieren estribos**

Solución b)  $V_u := 40000$

$$V_u = 40000 > \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot V_c = 13802.608 \quad \text{Por lo tanto, se requieren estribos}$$

Separación teórica de estribos:

$$s_1 := \frac{\phi \cdot A_v \cdot f_y \cdot d}{V_u - \phi \cdot V_c} \quad s_1 = 19.169$$

Separación máxima para proveer  $A_v$  mínima:

$$s_2 := \frac{A_v \cdot f_y}{0.75 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w} \quad s_2 = 22.952$$

$$s_3 := \frac{A_v \cdot f_y}{50 \cdot b_w} \quad s_3 = 18.857$$

Separación máxima de acuerdo con el nivel de fuerza cortante:

$$V_u = 40000 < \phi \cdot V_c + \phi \cdot 4 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d = 82815.651$$

$$s_4 := \min\left(\frac{d}{2}, 24\right) \quad s_4 = 12$$

Colocación de estribos:

$$s := \min(s_1, s_2, s_3, s_4) \quad s = 12$$

Solución c)  $V_u := 60000$

$$V_u = 60000 > \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot V_c = 13802.608 \quad \text{Por lo tanto, se requieren estribos}$$

Verificación de sección admisible

$$V_u = 60000 < \phi \cdot V_c + \phi \cdot 8 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d = 138026.084 \quad \text{OK}$$

Separación teórica de estribos:

$$s_1 := \frac{\phi \cdot A_v \cdot f_y \cdot d}{V_u - \phi \cdot V_c} \quad s_1 = 7.335$$

Separación máxima para proveer  $A_v$  mínima:

$$s_2 := \frac{A_v \cdot f_y}{0.75 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w} \quad s_2 = 22.952$$

$$s_3 := \frac{A_v \cdot f_y}{50 \cdot b_w} \quad s_3 = 18.857$$

Separación máxima de acuerdo con el nivel de fuerza cortante:

$$V_u = 60000 < \phi \cdot V_c + \phi \cdot 4 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d = 82815.651$$

$$s_4 := \min\left(\frac{d}{2}, 24\right) \quad s_4 = 12$$

Colocación de estribos:

$$s := \min(s_1, s_2, s_3, s_4) \quad s = 7.335$$

Solución d)  $V_u := 150000$

$$V_u = 150000 > \frac{1}{2} \cdot \phi \cdot V_c = 13802.608 \quad \text{Por lo tanto, se requieren estribos}$$

Verificación de sección admisible

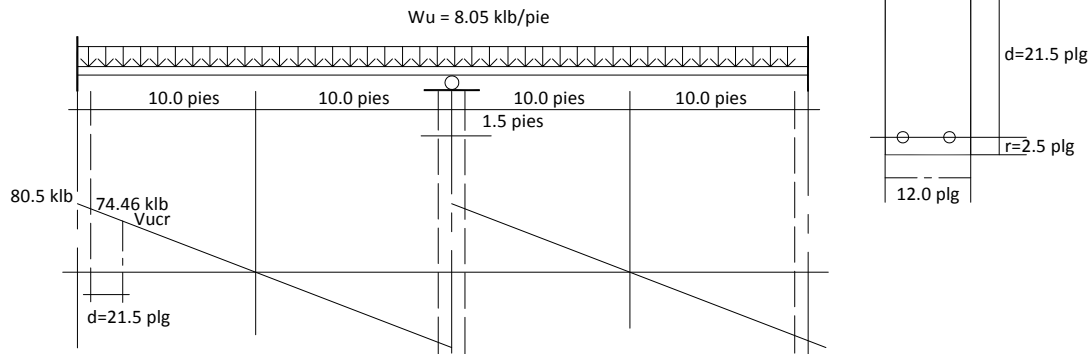
$$V_u = 150000 > \phi \cdot V_c + \phi \cdot 8 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d = 138026.084$$

**La sección NO ES ADMISIBLE, deberá incrementarse las dimensiones y/o incrementar  $f_c$**

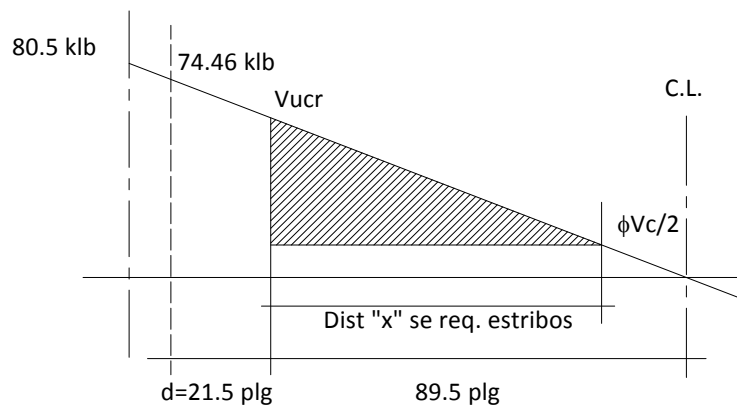


Determinar la cantidad y distribución de acero de refuerzo por tensión diagonal de la viga mostrada

$$\begin{aligned} L &:= 18.5 \text{ pies} & b_w &:= 12 \text{ plg} & f_y &:= 40000 \text{ lb/plg}^2 & W_D &:= 2.955 \text{ Klb/pie} \\ V_{\max} &:= 74.46 \text{ klb} & d &:= 21.5 \text{ plg} & f_c &:= 4000 \text{ lb/plg}^2 & W_L &:= 2.59 \text{ Klb/pie} \\ \phi &:= 0.75 & \lambda &:= 1 \end{aligned}$$



Del diagrama de fuerza cortante, a una distancia "d" del apoyo:



$$V_{ucr} := \frac{\frac{L \cdot 12}{2} - d}{\frac{L \cdot 12}{2}} \cdot V_{\max} \cdot 1000 \quad V_{ucr} = 60037.568 \text{ lb}$$

Resistencia del concreto (en donde no se requieren estribos)

$$\begin{aligned} V_c &:= 2 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d & V_c &= 32634.705 \text{ lb} \\ V_{ucr} &= 60037.568 > \frac{\phi \cdot V_c}{2} = 12238.015 \end{aligned}$$

Puesto que  $V_{ucr} > \phi V_c / 2$ , si se requiere el uso de estribos.

$$V_s := \frac{V_{ucr}}{\phi} - V_c \quad V_s = 47415.385 \text{ lb}$$

Determinando los requerimientos de separación de estribos "s"

$$4 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w \cdot d = 65269.411 > V_s = 47415.385$$

Suponiendo el uso de estribos # 3  $A_v := 0.22$

$$24 \text{ plg} \quad \frac{d}{2} = 10.75 \quad \frac{A_v \cdot f_y}{50 \cdot b_w} = 14.667 \quad \frac{A_v \cdot f_y}{0.75 \cdot \sqrt{f_c} \cdot b_w} = 15.46$$

Por lo tanto  $s_{\max} := \frac{d}{2}$

Longitud "x" en la que se requiere suministrar estribos

$$x := \frac{\left(\frac{L \cdot 12}{2} - d\right)}{V_{ucr}} \cdot \left(V_{ucr} - \frac{\phi \cdot V_c}{2}\right) \quad x = 71.256 \text{ plg}$$

Proponiendo cuatro regiones de diferente separación de estribos

Región 1: s1  $s1 := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{V_s}$  s1 = 3.99 usar  $s1 := 3.75 \text{ plg}$

Regiones 2, 3 y 4: puesto que la variación de la fuerza cortante en este caso es lineal

$s2 := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{\frac{3}{4} \cdot V_s}$  s2 = 5.32 usar  $s2 := 5.25 \text{ plg}$

$s3 := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{\frac{2}{4} \cdot V_s}$  s3 = 7.981 usar  $s3 := 7.75 \text{ plg}$

$s4 := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{\frac{1}{4} \cdot V_s}$  s4 = 15.961 > s<sub>max</sub> = 10.75  
usar  $s4 := 10.75 \text{ plg}$

Verificación de la longitud total suministrada de estribos, considerando que en la práctica se utiliza la distancia (1/2)s1 para colocar el primer estribo y a partir de este colocar los demás estribos

La longitud de estribos requerida L<sub>req</sub>

L<sub>req</sub> := d + x L<sub>req</sub> = 92.756 plg

1 estribo @ s1 /2:  $\frac{s1}{2} = 1.875$

10 estribo @ s1: 10s1 = 37.5

4 estribo @ s2: 4s2 = 21

3 estribo @ s3: 3s3 = 23.25

2 estribo @ s4: 2s4 = 21.5

Longitud acumulada Leac

$Leac := \frac{s1}{2} + 10 \cdot s1 + 4 \cdot s2 + 3 \cdot s3 + 2 \cdot s4$  Leac = 105.125

Proponiendo tres regiones de diferente separación de estribos

Región 1: s1  $s1 := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{V_s}$  s1 = 3.99 usar  $s1 := 3.75 \text{ plg}$

Regiones 2 y 3: puesto que la variación de la fuerza cortante en este caso es lineal

$s2 := \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{\frac{2}{3} \cdot V_s}$  s2 = 5.985 usar  $s2 := 5.75 \text{ plg}$

$$s3 := \frac{Av \cdot fy \cdot d}{\frac{1}{3} \cdot Vs} \quad s3 = 11.971 > s_{max} = 10.75$$

usar  $s3 := 10.75 \text{ plg}$

Verificación de la longitud total suministrada de estribos, considerando que en la práctica se utiliza la distancia  $(1/2)s1$  para colocar el primer estribo y a partir de este colocar los demás estribos

La longitud de estribos requerida  $L_{req}$

$$L_{req} := d + x \quad L_{req} = 92.756 \text{ plg}$$

$$1 \text{ estribo @ } s1 / 2: \quad \frac{s1}{2} = 1.875$$

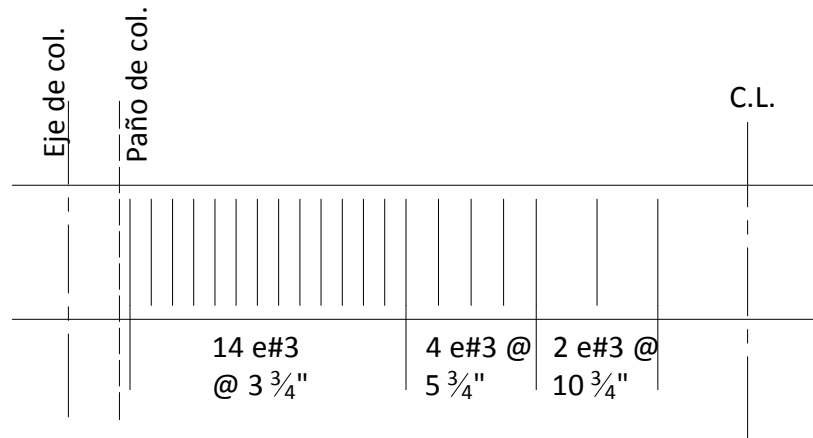
$$13 \text{ estribo @ } s1: \quad 13s1 = 48.75$$

$$4 \text{ estribo @ } s2: \quad 4s2 = 23$$

$$2 \text{ estribo @ } s3: \quad 2s3 = 21.5$$

Longitud acumulada  $Leac$

$$Leac := \frac{s1}{2} + 13 \cdot s1 + 4 \cdot s2 + 2 \cdot s3 \quad Leac = 95.125$$

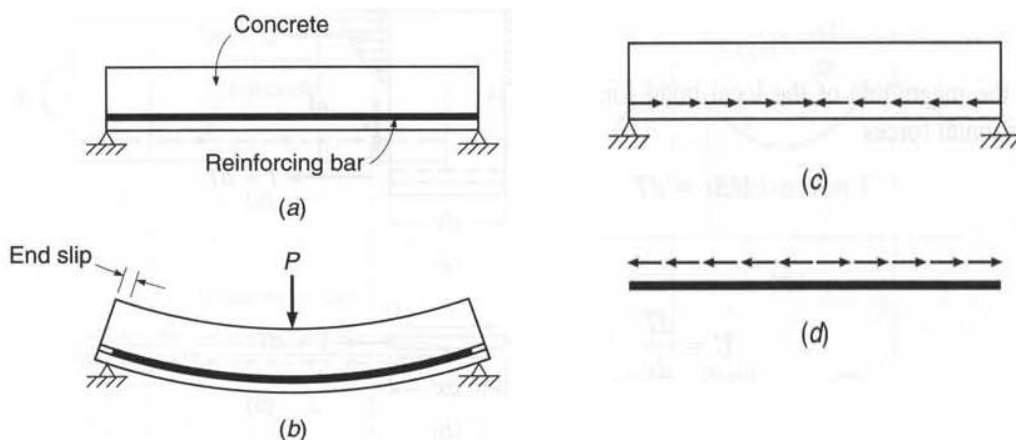


## LONGITUD DE DESARROLLO Y ANCLAJE

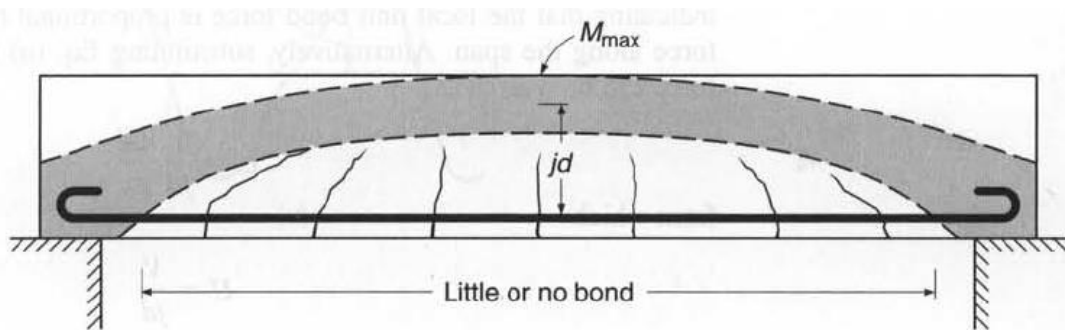
La longitud de desarrollo en el acero de refuerzo longitudinal, corresponde a la distancia necesaria en el refuerzo, para que en este se desarrollen los esfuerzos de tensión que se consideraron al determinar la resistencia a flexión de la sección de concreto reforzado. Esta longitud de desarrollo es también necesaria para sujetar el acero de refuerzo, suponiendo que se perdieran las condiciones de sujeción acero-concreto, debido a la generación de grietas.

**Adherencia.** En el diseño de concreto reforzado se plantea, como hipótesis que no debe existir deslizamiento del acero de refuerzo con respecto al concreto circundante, en una sección transversal, es decir, se considera que existe compatibilidad de deformaciones entre el concreto y el acero de refuerzo, ambos materiales actúan como una unidad.

En el caso de la siguiente figura, se muestra el posible deslizamiento del acero de refuerzo en una viga sometida a flexión, si no existiera adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo, así como las fuerzas de adherencia en la interface entre el concreto y el acero, las cuales son iguales y actúan en dirección opuesta en cada uno de los materiales.

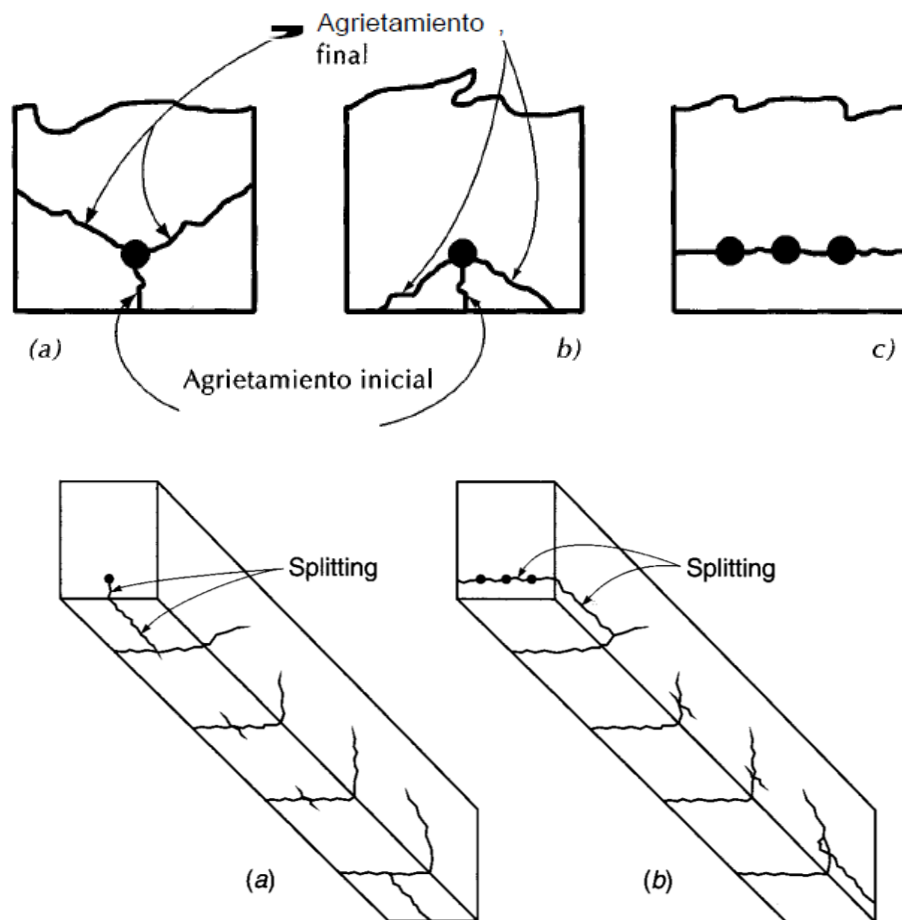


Es posible evitar el deslizamiento, mediante la utilización de ganchos en los extremos del acero de refuerzo (suponiendo que no hubiera adherencia entre ambos materiales), sin embargo, la viga actuaría como un arco.



En tal caso, en la longitud total del acero, la fuerza de tensión sería constante e igual a  $T = M_{\max} / jd$ , como consecuencia, la deformación longitudinal total del acero sería mayor que en el caso de tener una viga con deslizamiento impedido en el acero, resultando en mayores deflexiones y mayores aberturas en las grietas.

Las situaciones anteriores se previenen mediante la consideración y asegurándose que exista suficiente adherencia entre el concreto y el acero de refuerzo. En el caso de que hubiera fuerzas de tensión en el acero de refuerzo muy altas, podría presentarse el siguiente patrón de grietas en el concreto.



Es por ello, que el recubrimiento constituye un factor a considerar en la determinación de adherencia.

**Longitud de desarrollo acero de refuerzo longitudinal.** Idealmente, la cantidad de acero de refuerzo, seguiría el perfil de variación del diagrama de momentos flexionantes, sin embargo esa no es una distribución práctica, por lo que se recurre a efectuar cortes del acero de refuerzo considerando los puntos de momento máximo y los puntos de inflexión (en donde teóricamente no sería necesario suministrar acero de refuerzo, ya que el

momento flexionante es nulo). El requerimiento fundamental establecido por el criterio del ACI, es que la fuerza en el acero de refuerzo en una sección determinada, se desarrolle en ambas direcciones de dicha sección, ya sea mediante el uso de la longitud de desarrollo o mediante la utilización de ganchos, incluso mediante el uso de anclaje mecánico si es necesario, o bien combinaciones de estas alternativas.

La longitud de desarrollo para barras corrugadas y alambres corrugados en tracción, (25.4.2)  $\ell_d$  deberá ser considerada como la que resulte mayor (25.4.2.1), 12 plg ó la que resulte de aplicar las expresiones de la tabla 25.4.2.2 con los respectivos factores de modificación de la tabla 25.4.2.4

En las siguientes expresiones (25.4.1.4), se deberá cumplir que  $\sqrt{f'_c} \leq 100 \text{ lb/plg}^2$

**Tabla 25.4.2.2 — Longitud de desarrollo para barras corrugadas y alambre corrugado en tracción**

| Espaciamiento y recubrimiento                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Barras No. 6 ó menores y alambres corrugados                            | Barras No. 7 y mayores                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Espaciamiento libre entre barras o alambres que se están desarrollando o empalmando por traslapo no menor que <math>d_b</math>, recubrimiento libre al menos <math>d_b</math>, y no menos estribos a lo largo de <math>\ell_d</math> que el mínimo del Reglamento</p> <p>o</p> <p>espaciamiento libre entre barras o alambres que están siendo desarrollados o empalmados por traslapo no menor que <math>2d_b</math> y recubrimiento libre no menor que <math>d_b</math></p> | $\left( \frac{f_y \psi_t \psi_e}{25 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$   | $\left( \frac{f_y \psi_t \psi_e}{20 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$           |
| Otros casos                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | $\left( \frac{3 f_y \psi_t \psi_e}{50 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ | $\left( \frac{3 f_y \psi_t \psi_e \lambda}{40 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b$ |

Esta longitud de desarrollo puede ser reducida, de acuerdo con 25.4.10.1, si hubiera excedente de acero de refuerzo, en la proporción  $A_{s, \text{requerido}} / A_{s, \text{colocado}}$ , las longitudes modificadas no deben ser menores a las mínimas especificadas. Se deberá revisar no estar en los casos indicados en la sección 25.4.10.2: no se permite esta reducción de longitud de desarrollo en a) Apoyos no continuos; b) En ubicaciones donde se requiera anclaje o desarrollo para  $f_y$  (como sería el caso para el acero de refuerzo especificado como

requerimiento de acero mínimo – por contracción y temperatura); c) Donde se requiere que las barras sean continuas; d) Para barras corrugadas con cabeza y barras ancladas mecánicamente; y e) En sistemas resistentes ante fuerzas sísmicas de estructuras asignadas a las categorías de Diseño Sísmico D, E o F (Este último requerimiento es para los sistemas estructurales que, de acuerdo con su comportamiento ante cargas sísmicas, pudieran invertir los momentos en un punto en particular y se deberá asegurar en todo caso, la posibilidad del desarrollo de la ductilidad de diseño).

O bien, de acuerdo con 25.4.2.3

$$l_d = \left( \frac{3f_y}{40\lambda\sqrt{f'_c}} \frac{\Psi_t \Psi_e \Psi_s}{\left( \frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \right) d_b$$

En donde el termino de confinamiento  $\left( \frac{c_b + K_{tr}}{d_b} \right) \leq 2.5$

Y el índice de refuerzo transversal  $K_{tr} = \frac{40A_{tr}}{sn}$

$c_b$  : Espaciamiento o dimensión del recubrimiento, el más pequeño, centro de varilla a la superficie más cercana del concreto, ó la mitad de la distancia centro a centro de las varillas que se están desarrollando.

$A_{tr}$ : Área total en la sección transversal, de todo el refuerzo transversal que se encuentra dentro del espaciamento “s” que cruza el plano del acero de refuerzo que se desarrolla.

s: Máximo espaciamento del refuerzo transversal dentro de la longitud de desarrollo.

n: Número de varillas que se desarrollan.

Se podrá tomar  $K_{tr} = 0$  como una simplificación de diseño, aún si el refuerzo transversal se encuentra presente.

**Tabla 25.4.2.4 — Factores de modificación para el desarrollo de las barras corrugadas y alambres corrugados en tracción**

| Factor de modificación                | Condición                                                                                                                                                             | Valor del factor        |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Concreto de peso liviano<br>$\lambda$ | Concreto de peso liviano                                                                                                                                              | 0.75                    |
|                                       | Concreto de peso liviano, donde $f_{ct}$ se especifica                                                                                                                | De acuerdo con 19.2.4.3 |
|                                       | Concreto de peso normal                                                                                                                                               | 1.0                     |
| Epóxico <sup>[1]</sup><br>$\psi_e$    | Refuerzo con recubrimiento epóxico o zinc y barras con recubrimiento dual de zinc y epóxico con menos de $3d_b$ de recubrimiento, o separación libre menor que $6d_b$ | 1.5                     |
|                                       | Refuerzo con recubrimiento epóxico o zinc y barras con recubrimiento dual de zinc y epóxico para todas las otras condiciones                                          | 1.2                     |
|                                       | Refuerzo sin recubrimiento o refuerzo recubierto con zinc (galvanizado)                                                                                               | 1.0                     |
| Tamaño<br>$\psi_s$                    | Para barras No. 7 y mayores                                                                                                                                           | 1.0                     |
|                                       | Para barras No. 6 o menores y alambres corrugados                                                                                                                     | 0.8                     |
| Ubicación <sup>[1]</sup><br>$\psi_t$  | Más de 12 pulg. de concreto fresco colocado bajo el refuerzo horizontal                                                                                               | 1.3                     |
|                                       | Otra                                                                                                                                                                  | 1.0                     |

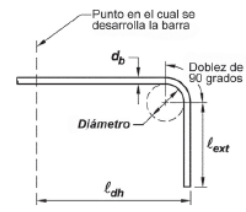
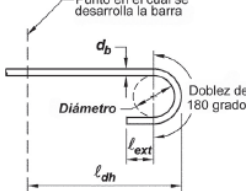
<sup>[1]</sup> El producto ( $\psi_t \psi_e$ ) no hay necesidad de que exceda 1.7.

#### **Anclaje de acero de refuerzo en tensión utilizando ganchos**

Será necesario proveer anclaje especial en los extremos de las varillas cuando el refuerzo de tensión no pueda desarrollarse por adherencia solamente. Este anclaje puede ser mediante el uso de ganchos de 90° o 180°.

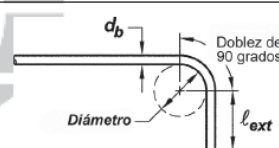
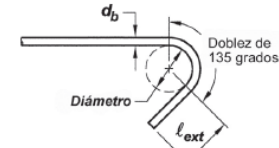
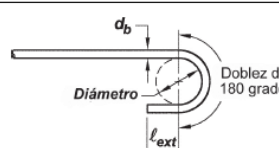


**Tabla 25.3.1 — Geometría del gancho estándar para el desarrollo de barras corrugadas en tracción**

| Tipo de gancho estándar | Diámetro de la barra | Diámetro interior mínimo de doblado, pulg. | Extensión recta <sup>[1]</sup><br>$\ell_{ext}$ , pulg. | Tipo de gancho estándar                                                             |
|-------------------------|----------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Gancho de 90 grados     | No. 3 a No. 8        | $6d_b$                                     | $12d_b$                                                |  |
|                         | No. 9 a No. 11       | $8d_b$                                     |                                                        |                                                                                     |
|                         | No. 14 y No. 18      | $10d_b$                                    |                                                        |                                                                                     |
| Gancho de 180 grados    | No. 3 a No. 8        | $6d_b$                                     | Mayor de $4d_b$ y 2.5 pulg.                            |  |
|                         | No. 9 a No. 11       | $8d_b$                                     |                                                        |                                                                                     |
|                         | No. 14 y No. 18      | $10d_b$                                    |                                                        |                                                                                     |

<sup>[1]</sup> El gancho estándar para las barras corrugadas en tracción incluye el diámetro interior específico del dobléz y el largo de la extensión recta. Se permite usar una extensión recta más larga en el extremo del gancho. No se considera que esta extensión aumente la resistencia de anclaje del gancho.

**Tabla 25.3.2 — Diámetro mínimo interior de doblado y geometría del gancho estándar para estribos, amarras y estribos cerrados de confinamiento**

| Tipo de gancho estándar | Diámetro de la barra | Diámetro interior mínimo de doblado pulg. | Extensión recta <sup>[1]</sup><br>$\ell_{ext}$ , pulg. | Tipo de gancho estándar                                                              |
|-------------------------|----------------------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Gancho de 90 grados     | No. 3 al No. 5       | $4d_b$                                    | Mayor de $6d_b$ y 3 pulg.                              |  |
|                         | No. 6 al No. 8       | $6d_b$                                    | $12d_b$                                                |                                                                                      |
| Gancho de 135 grados    | No. 3 al No. 5       | $4d_b$                                    | Mayor de $6d_b$ y 3 pulg.                              |  |
|                         | No. 6 al No. 8       | $6d_b$                                    |                                                        |                                                                                      |
| Gancho de 180 grados    | No. 3 al No. 5       | $4d_b$                                    | Mayor de $4d_b$ y 2.5 pulg.                            |  |
|                         | No. 6 al No. 8       | $6d_b$                                    |                                                        |                                                                                      |

<sup>[1]</sup> El gancho estándar para estribos y estribos cerrados de confinamiento incluye el diámetro interior del dobléz específico y el largo de la extensión recta. Se permite usar una extensión recta más larga en el extremo del gancho. No se considera que esta extensión aumente la resistencia de anclaje del gancho.

**Longitud de desarrollo de ganchos estándar en tracción.** La longitud de desarrollo  $\ell_{dh}$  será determinada, de acuerdo con 25.4.3

$$l_{dh} \geq \begin{cases} \left( \frac{f_y \Psi_e \Psi_c \Psi_r}{50 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b \\ 8d_b \\ 6 \text{ plg} \end{cases}$$

En donde, de acuerdo con 25.4.3.2, los factores de modificación deben cumplir con la tabla 25.4.3.2. En el caso de los factores  $\Psi_c$  y  $\Psi_r$  pueden tomarse igual a la unidad (1.0)

**Tabla 25.4.3.2 — Factores de modificación para el desarrollo de las barras con gancho en tracción**

| Factor de modificación                    | Condición                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Valor del factor |
|-------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Concreto liviano $\lambda$                | Concreto de peso liviano                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0.75             |
|                                           | Concreto de peso normal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1.0              |
| Epóxico $\Psi_e$                          | Refuerzo con recubrimiento epóxico o zinc y barras con recubrimiento dual de zinc y epóxico                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 1.2              |
|                                           | Refuerzo sin recubrimiento o refuerzo recubierto con zinc (galvanizado)                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1.0              |
| Recubrimiento $\Psi_c$                    | Para ganchos de barras No. 11 y menores, con recubrimiento lateral (normal al plano del gancho) $\geq 2 - 1/2$ pulg. y para ganchos de 90 grados con recubrimiento en la extensión de la barra más allá del gancho $\geq 2$ pulg.                                                                                                                                             | 0.7              |
|                                           | Otras                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1.0              |
| Confinamiento del refuerzo $\Psi_r^{[2]}$ | Para ganchos de 90 grados de barras No. 11 y menores que se encuentran:<br>(1) confinados a lo largo de $\ell_{dh}$ con estribos <sup>[1]</sup> perpendiculares a $\ell_{dh}$ con $s \leq 3d_b$ , o bien,<br>(2) confinados a lo largo de la barra que se está desarrollando más allá del gancho por estribos <sup>[1]</sup> perpendiculares a $\ell_{ext}$ con $s \leq 3d_b$ | 0.8              |
|                                           | Para ganchos de 180 grados de barra No. 11 y menores que se encuentran confinados con estribos <sup>[2]</sup> perpendiculares a $\ell_{ext}$ con $s \leq 3d_b$                                                                                                                                                                                                                |                  |
|                                           | Otros                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1.0              |

<sup>[1]</sup> El primera estribo debe confinar la parte doblada del gancho dentro de una distancia  $2d_b$  del borde externo del doblez del gancho.

<sup>[2]</sup>  $d_b$  es el diámetro nominal de la barra del gancho.

Esta longitud de desarrollo puede ser reducida, de acuerdo con 25.4.10.1, si hubiera excedente de acero de refuerzo, en la proporción  $A_{s,requerido} / A_{s,colocado}$ , las longitudes modificadas no deben ser menores a las mínimas especificadas. Se deberá revisar no estar en los casos indicados en la sección 25.4.10.2: no se permite esta reducción de longitud de desarrollo en a) Apoyos no continuos; b) En ubicaciones donde se requiera anclaje o desarrollo para  $f_y$  (como sería el caso para el acero de refuerzo especificado como requerimiento de acero mínimo – por contracción y temperatura); c) Donde se requiere que las barras sean continuas; d) Para barras corrugadas con cabeza y barras ancladas mecánicamente; y e) En sistemas resistentes ante fuerzas sísmicas de estructuras asignadas a las categorías de Diseño Sísmico D, E o F (Este último requerimiento es para los sistemas estructurales que, de acuerdo con su comportamiento ante cargas sísmicas, pudieran invertir los momentos en un punto en particular y se deberá asegurar en todo caso, la posibilidad del desarrollo de la ductilidad de diseño).

**Longitud de desarrollo de barras corrugadas y alambres corrugados en compresión.** La longitud de desarrollo  $l_{dc}$  será determinada, de acuerdo con 25.4.3

$$l_{dh} \geq \begin{cases} \left( \frac{f_y \Psi_r}{50 \lambda \sqrt{f'_c}} \right) d_b \\ 0.0003 f_y \Psi_r d_b \\ 8 \text{ plg} \end{cases}$$

**Tabla 25.4.9.3 — Factores de modificación para barras y alambres corrugados a compresión**

| Factor de modificación                | Condición                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Valor del factor        |
|---------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| Concreto liviano<br>$\lambda$         | Concreto liviano                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.75                    |
|                                       | Concreto liviano, cuando se especifica $f'_{ct}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | De acuerdo con 19.2.4.3 |
|                                       | Concreto de peso normal                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 1.0                     |
| Refuerzo de confinamiento<br>$\Psi_r$ | Refuerzo encerrado dentro de (1), (2), (3) ó (4):<br>(1) Una espiral<br>(2) Un estribo circular continuo con $d_b \geq 1/4$ pulg. y paso 4 pulg.<br>(3) Estribos de barra No. 4 o alambre D20 de acuerdo con 25.7.2 espaciado $\leq 4$ pulg.<br>(4) Estribos cerrados de confinamiento de acuerdo con 25.7.4 y espaciadas a distancias $\leq 4$ pulg., centro a centro. | 0.75                    |
|                                       | Otra                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1.0                     |

**Longitud de desarrollo de paquetes de varillas.** De acuerdo con lo especificado en 25.6.1.1 a 25.6.1.7: se limita a cuatro varillas cada paquete; se limita a varillas del No. 11 las varillas que pueden colocarse en paquete; el corte de varillas dentro del paquete, se deberá realizar en lugares diferentes escalonadas al menos dentro de una longitud de  $40d_b$ ; la longitud de desarrollo de cada varilla individual dentro de un paquete de varillas, en tracción o compresión, debe ser aquella de la varilla individual aumentada en 20% para paquetes de 3 varillas y en 33% para paquetes de 4 varillas, y; los factores requeridos para determinar la longitud de desarrollo en un paquete de varillas, deberá ser tratada como una varilla sencilla de diámetro derivado del área total equivalente.

### **DESARROLLO DE REFUERZO A FLEXIÓN (sección 9.7.3)**

(9.7.3.1) La fuerza de tracción ó compresión calculada en el refuerzo en cada sección de la viga debe ser desarrollada hacia cada lado de dicha sección.

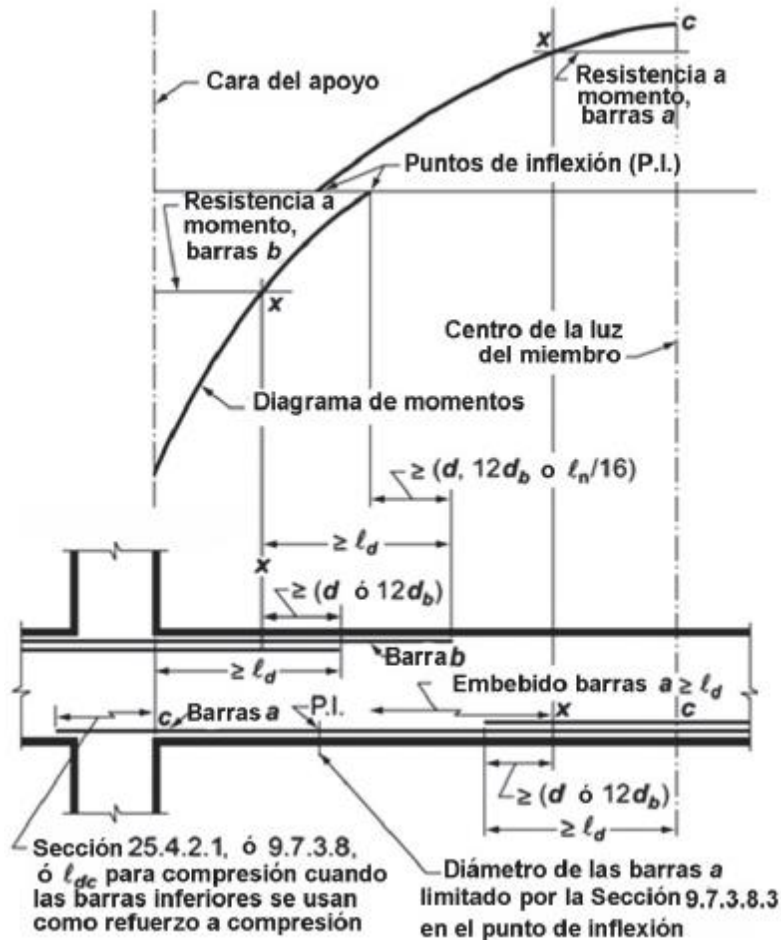
(9.7.3.2) Las secciones críticas para el desarrollo del refuerzo con los puntos donde se presentan esfuerzos máximos y los puntos del claro donde el refuerzo a tracción doblado o terminado ya no es necesario para resistir flexión.

En los Reglamentos anteriores a 2014, una de las secciones críticas se definía como donde termina o se dobla el refuerzo adyacente. En el Reglamento de 2014, esta sección crítica se redefinió como “donde el refuerzo a tracción doblado o terminado ya no es necesario para resistir flexión.

En la siguiente figura, las secciones críticas para una viga continua típica se indican con una “c” en los puntos de esfuerzo máximo o una “x” donde el refuerzo a tracción doblado o terminado ya no es necesario para resistir flexión. Para carga uniforme, el refuerzo positivo que se extiende dentro del apoyo es probable que esté controlado por los requisitos de 9.7.3.8.1 ó 9.7.3.8.3 y no por las consideraciones de longitud medida a partir del punto de momento máximo o del punto de terminación de las barras.

(9.7.3.3) El refuerzo se debe extender más allá del punto en el que ya no es necesario para resistir flexión, en una distancia igual al mayor entre  $d$  y  $12d_b$ , excepto en los apoyos de vigas simplemente apoyadas y en el extremos de voladizos.

Para tomar en cuenta las variaciones en la localización de los momentos máximos, el Reglamento requiere la extensión del refuerzo por una distancia  $d$  ó  $12d_b$  más allá del punto donde se calcula que ya no se requiere para resistir la flexión, excepto en los casos mencionados. Cuando se usan barras de diferentes diámetros, la prolongación debe hacerse de acuerdo con el diámetro de la barra que se está terminando.



(9.7.3.4) El refuerzo continuo en tracción por flexión debe tener una longitud embebida no menor que  $l_d$  más allá del punto en donde el refuerzo doblado o terminado ya no se requiere para resistir flexión.

(9.7.3.5) El refuerzo en tracción por flexión no debe terminarse en una zona de tracción, a menos que se cumpla (a), (b) o (c).

(a)  $V_u \leq (2/3) \phi V_n$  en el punto de terminación;

(b) Para barras No. 11 y menores, cuando el refuerzo que continua proporciona el doble del área requerida por flexión en el punto de terminación y  $V_u \leq (3/4) \phi V_n$ ;

(c) Se proporciona un área de estribos o estribos cerrados de confinamiento que excede lo requerido para cortante y torsión a lo largo de cada barra o alambre que termina por una distancia medida a partir del punto de terminación del refuerzo igual a  $(3/4) d$ . El área de estribos en exceso no debe ser menor que  $60 b_w s / f_{yt}$ . El espaciamiento  $s$  no debe exceder  $d / (8\beta_b)$ .

$\beta_b$ : es la relación entre el área de refuerzo suspendido en una sección y el área total del refuerzo en tracción de la sección.

(9.7.3.6) Se debe proporcionar un anclaje adecuado para el refuerzo en tracción en donde el esfuerzo en el refuerzo no es directamente proporcional al momento, como ocurre en vigas inclinadas, escalonadas o de sección variable, o en elementos en los cuales el refuerzo de tracción no es paralelo a la cara de compresión.

(9.7.3.7) Se permite desarrollar el refuerzo a tracción doblándolo dentro del alma para anclarlo o hacerlo continuo con el refuerzo de la cara opuesta de la viga.

#### TERMINACIÓN DEL REFUERZO (sección 9.7.3.8)

(9.7.3.8.1) En los apoyos simples, por lo menos un tercio del refuerzo máximo para momento positivo se debe prolongar a lo largo de la cara inferior de la viga dentro del apoyo por lo menos 6 plg, excepto en vigas prefabricadas, en las cuales este refuerzo debe extenderse al menos hasta el centro de la longitud del apoyo.

(9.7.3.8.2) En otros apoyos, por lo menos un cuarto del refuerzo máximo para momento positivo se debe prolongar a lo largo de la cara inferior de la viga por lo menos 6 plg dentro del apoyo, y si la viga hace parte del sistema principal de resistencia ante cargas laterales, debe anclarse para desarrollar  $f_y$  en la cara del apoyo.

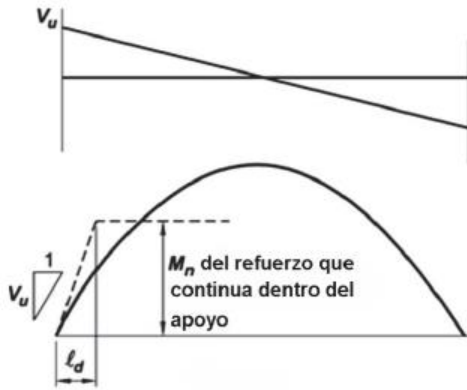
(9.7.3.8.3) En los apoyos simples y en los punto de inflexión,  $d_b$  para el refuerzo en tracción que resiste momento positivo debe limitarse de manera que  $l_d$  para es refuerzo cumpla con (a) o (b). Cuando el refuerzo termina más allá del centro del apoyo con un gancho estándar o en un anclaje mecánico equivalente al menos a un gancho estándar, no es necesario cumplir con (a) o (b).

(a)  $l_d \leq ( 1.3 M_n / V_u + l_a )$  cuando los extremos del refuerzo estén confinados por una reacción de compresión.

(b)  $l_d \leq ( M_n / V_u + l_a )$  cuando los extremos del refuerzo no estén confinados por una reacción de compresión.

$M_n$  se calcula suponiendo que todo el refuerzo de la sección está sometido a  $f_y$  y  $V_u$  se calcula en la sección. En el apoyo,  $l_a$  es la longitud embebida más allá del punto de inflexión y está limitada al mayor valor entre  $d$  y  $12d_b$ .

(9.7.3.8.4) Por lo menos un tercio del refuerzo para resistir momento negativo en el apoyo debe tener una longitud embebida más allá del punto de inflexión de al menos el mayor de  $d$ ,  $12d_b$  y  $l_n / 16$ .



Pendiente de capacidad  $\left(\frac{M_n}{\ell_d}\right) \geq$  Pendiente demanda  $(V_u)$

$$\ell_d \leq \frac{M_n}{V_u}$$

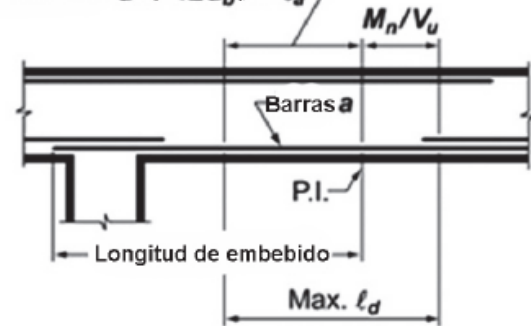
(a) Diagrama de  $M_u$  positivo



Nota: El factor 1.3 solo es aplicable si la reacción confina los extremos del refuerzo

(b)  $\ell_d$  máximo en un apoyo simple

Máxima longitud de embebido efectivo limitada a  $d$  ó  $12d_b$  para  $\ell_a$



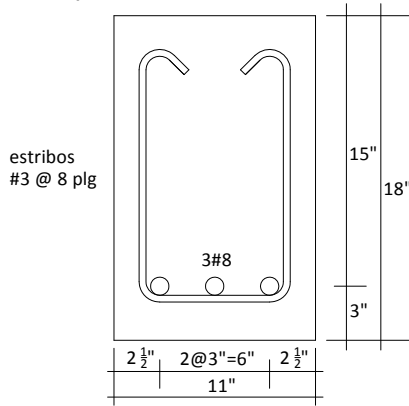
(c)  $\ell_d$  máximo para barras "a" en el punto de inflexión

**Ejemplo 1.** Determinar la longitud de desarrollo requerida para las varillas no recubiertas mostradas en la figura de la sección

a) Suponer  $K_{tr}=0$

b) Usar el valor calculado de  $K_{tr}$

De acuerdo con la especificación, los factores de modificación de la longitud de desarrollo, corresponden a:



$\psi_t := 1.0$  Para varillas de fondo

$\psi_e := 1.0$  Para varillas no recubiertas

$\psi_s := 1.0$  Para varillas del #8

$\lambda := 1.0$  Para concreto de peso normal

$rec\_lat := 2.5 \text{ plg}$  Recubrim. lat. medido desde el centro de las varillas

$sep := 3 \text{ plg}$  Separación centro a centro de varillas

$$C_b := \min\left(rec\_lat, \frac{sep}{2}\right) \quad C_b = 1.5$$

$$d_b := 1 \text{ plg} \quad f_c := 3000 \text{ lb/plg}^2 \quad f_y := 60000 \text{ lb/plg}^2$$

$$A_{tr} := 2 \cdot 0.11 \text{ plg}^2 \quad n := 3 \text{ varillas long. en la sección} \quad s := 8 \text{ plg. sep. estribos}$$

a) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando el valor  $K_{tr} := 0$

$$\frac{C_b + K_{tr}}{d_b} = 1.5 < 2.5 \text{ OK}$$

$$l_d := \frac{3}{40} \cdot \frac{f_y}{\lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot \left[ \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s}{\left( \frac{C_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \cdot d_b \right] \quad l_d = 54.772 \text{ plg}$$

b) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando el valor calculado de  $K_{tr}$

$$K_{tr} := \frac{40 \cdot A_{tr}}{s \cdot n} = 0.367$$

$$\frac{C_b + K_{tr}}{d_b} = 1.867 < 2.5 \text{ OK}$$

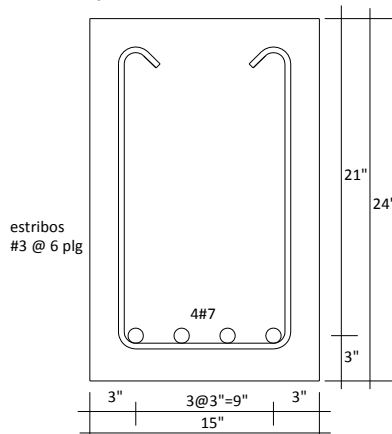
$$l_d := \frac{3}{40} \cdot \frac{f_y}{\lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot \left[ \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s}{\left( \frac{C_b + K_{tr}}{d_b} \right)} \cdot d_b \right] \quad l_d = 44.013 \text{ plg}$$



**Ejemplo 2.** Las varillas del #7 de fondo mostradas en la siguiente figura están recubiertas con epóxido. Suponiendo concreto de peso normal,  $f_y=60\ 000\text{ lb/plg}^2$ ,  $f_c=3500\text{ lb/plg}^2$ . Determinar la longitud de desarrollo requerida

- Usar las ecuaciones simplificadas
- Usar el valor calculado de  $K_{tr}$
- Suponer  $K_{tr}=0$

De acuerdo con la especificación, los factores de modificación de la longitud de desarrollo, corresponden a:



$\psi_t := 1.0$  Para varillas de fondo  
 $\psi_e := 1.5$  Para varillas con recubrimiento epóxido y separación  $< 6d_b$   
 $\psi_t \cdot \psi_e = 1.5 < 1.7$  OK  
 $\psi_s := 1.0$  Para varillas del #7  
 $\lambda := 1.0$  Para concreto de peso normal  
 $rec_{lat} := 3.0\text{ plg}$  Recubrim. lat. medido desde el centro de las varillas  
 $sep := 3\text{ plg}$  Sep. centro a centro de varillas

$$C_b := \min\left(rec_{lat}, \frac{sep}{2}\right) \quad C_b = 1.5$$

$$d_b := \frac{7}{8}\text{ plg} \quad f_c := 3500\text{ lb/plg}^2 \quad f_y := 60000\text{ lb/plg}^2$$

$$A_{tr} := 2.011\text{ plg}^2 \quad n := 4\text{ varillas long. en la sección} \quad s := 6\text{ plg. sep. estribos}$$

$$\sqrt{f_c} = 59.161 < 100\text{ lb/plg}^2 \text{ OK}$$

- a) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando las ecuaciones simplificadas

$$l_d := \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e}{20 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot d_b \quad l_d = 66.556\text{ plg}$$

- b) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando el valor calculado de  $K_{tr}$

$$K_{tr} := \frac{40 \cdot A_{tr}}{s \cdot n} = 0.367$$

$$\frac{C_b + K_{tr}}{d_b} = 2.133 < 2.5 \text{ OK}$$

$$l_d := \frac{3}{40} \cdot \frac{f_y}{\lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s}{\left(\frac{C_b + K_{tr}}{d_b}\right)} \cdot d_b \quad l_d = 46.797\text{ plg}$$

- c) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando el valor  $K_{tr} := 0$

$$\frac{C_b + K_{tr}}{d_b} = 1.714 < 2.5 \text{ OK}$$

$$l_d := \frac{3}{40} \cdot \frac{f_y}{\lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s}{\left(\frac{C_b + K_{tr}}{d_b}\right)} \cdot d_b \quad l_d = 58.236\text{ plg}$$

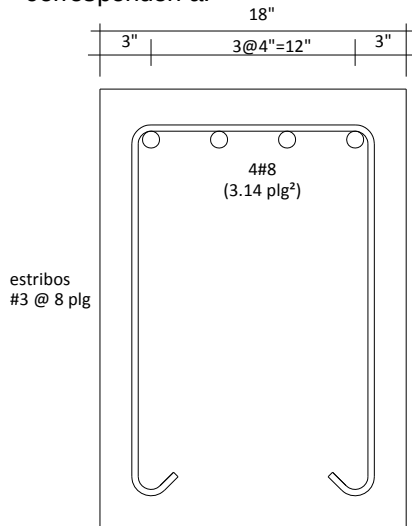
**Ejemplo 3.** El área requerida de acero de refuerzo para la viga de concreto de peso ligero mostrada en la siguiente figura es de 2.88 plg<sup>2</sup>. Las varillas superiores del #8 mostradas no están recubiertas. Si  $f_y=60\ 000\text{ lb/plg}^2$ ,  $f'_c=3500\text{ lb/plg}^2$ , determinar la longitud de desarrollo

a) Usar las ecuaciones simplificadas

b) Usar el valor calculado de  $K_{tr}$

c) Suponer  $K_{tr}=0$

De acuerdo con la especificación, los factores de modificación de la longitud de desarrollo, corresponden a:



$\psi_t := 1.3$  Para varillas superiores

$\psi_e := 1.0$  Para varillas no recubiertas

$\psi_t \cdot \psi_e = 1.3 < 1.7$  OK

$\psi_s := 1.0$  Para varillas del #7 y mayores

$\lambda := 0.75$  Para concreto de peso ligero

$rec\_lat := 3.0\text{ plg}$  Recubrim. lat. medido desde el centro de varillas

$sep := 4\text{ plg}$  Sep. centro a centro de varillas

$C_b := \min\left(rec\_lat, \frac{sep}{2}\right)$   $C_b = 2$

$db := 1\text{ plg}$   $f'_c := 3500\text{ lb/plg}^2$   $f_y := 60000\text{ lb/plg}^2$

$A_{tr} := 2 \cdot 0.11\text{ plg}^2$   $n := 4$  varillas long. en la sección  $s := 8\text{ plg}$  sep. estribos

$\sqrt{f'_c} = 59.161 < 100\text{ lb/plg}^2$  OK  $A_{s\_req} := 2.88$   $A_{s\_sum} := 3.14$

a) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando las ecuaciones simplificadas

$$l_d := \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e}{20 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c}} \cdot \frac{A_{s\_req}}{A_{s\_sum}} \cdot db \quad l_d = 80.618\text{ plg}$$

b) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando el valor calculado de  $K_{tr}$

$$K_{tr} := \frac{40 \cdot A_{tr}}{s \cdot n} = 0.275$$

$$\frac{C_b + K_{tr}}{db} = 2.275 < 2.5 \text{ OK}$$

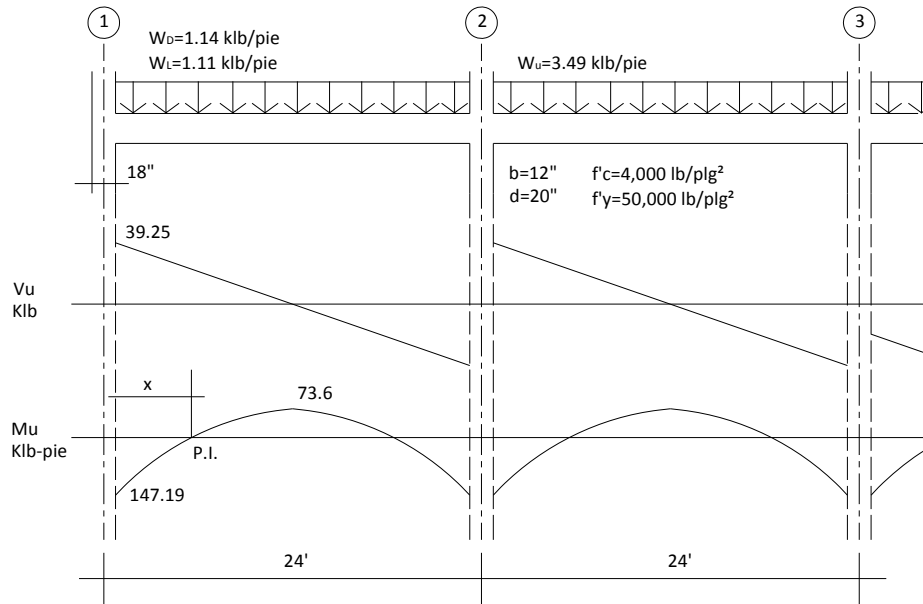
$$l_d := \frac{3}{40} \cdot \frac{f_y}{\lambda \cdot \sqrt{f'_c}} \cdot \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s}{\left(\frac{C_b + K_{tr}}{db}\right)} \cdot \frac{A_{s\_req}}{A_{s\_sum}} \cdot db \quad l_d = 53.155\text{ plg}$$

c) En el cálculo de la longitud de desarrollo, usando el valor  $K_{tr} := 0$

$$\frac{C_b + K_{tr}}{db} = 2 < 2.5 \text{ OK}$$

$$l_d := \frac{3}{40} \cdot \frac{f_y}{\lambda \cdot \sqrt{f'_c}} \cdot \frac{\psi_t \cdot \psi_e \cdot \psi_s}{\left(\frac{C_b + K_{tr}}{db}\right)} \cdot \frac{A_{s\_req}}{A_{s\_sum}} \cdot db \quad l_d = 60.464\text{ plg}$$

**Ejemplo 4.** Aplicar el criterio del ACI-14 para determinar la longitud de desarrollo en el acero de refuerzo de la viga del claro exterior izquierdo ( entre ejes 1 - 2 ), para el momento en el apoyo izquierdo - eje 1, acero de refuerzo por momento negativo, y para el momento al centro del claro, acero de refuerzo por momento positivo; de acuerdo con el diagrama mostrado en la figura. Detallar las longitudes del acero de refuerzo.



$$d := 20 \quad b := 12 \quad f_c := 4000 \quad f_y := 50000 \quad l_n := (24 - 1.5) \cdot 12$$

$$l_n = 270$$

|              | EJE 1                    |                          | EJE 2                    |                          | EJE 3                    |
|--------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| CONCEPTO     | Soporte ext.             | centro claro             | Soporte int.             | centro claro             | Soporte típico           |
| Mu (Klb-pie) | 147.19                   | 73.6                     | 147.19                   | 73.6                     | 147.19                   |
| (As)req      | 2.097                    | 1.013                    | 2.097                    | 1.013                    | 2.097                    |
| (As)sum      | 3#8                      | 3 - 2#4                  | 3#8                      | 3 - 2#4                  | 3#8                      |
|              | (2.35 plg <sup>2</sup> ) | (1.18 plg <sup>2</sup> ) | (2.35 plg <sup>2</sup> ) | (1.18 plg <sup>2</sup> ) | (2.35 plg <sup>2</sup> ) |

Localización del Punto de inflexión (P.I.) en el diagrama de momentos:

Efectuando una sumatoria de momentos a una distancia "x" desde el apoyo exterior izquierdo (desde la cara interior de la columna de apoyo en el eje 1)

$$-147.19 + 39.25x - 3.49 x^2 / 2 = 0$$

$$C1 x^2 + C2 x + C3 = 0$$

En donde:

$$C1 := 1.745 \quad C2 := -39.25 \quad C3 := 147.19$$

$$\text{coef} := \begin{pmatrix} C3 \\ C2 \\ C1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(\text{coef}) = \begin{pmatrix} 4.755 \\ 17.737 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el PI queda localizado a una dist  $x := \text{polyroots}(\text{coef})_0$   $x = 4.755 \text{ pies}$

### Longitud de desarrollo en acero de refuerzo por momento negativo

No se recortará ninguna varilla y se revisa la longitud de desarrollo comparada con la longitud adicional desde el PI en el diagrama de momentos.

$$\begin{aligned}\psi_t &:= 1.3 && \text{Para varillas superiores} && \frac{d_b}{8} \\ \psi_e &:= 1.0 && \text{Para varillas no recubiertas} && f_y = 50000 \\ \psi_t \cdot \psi_e &= 1.3 < 1.7 && \text{OK} && f_c = 4000 \\ \lambda &:= 1.0 && \text{Para concreto de peso normal}\end{aligned}$$

$$l_d := \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e}{20 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot d_b \quad l_d = 51.387 \quad \text{plg} > 12 \text{ plg}$$

Longitud de anclaje "la" más allá del PI (el mayor de los siguientes valores):

$$d = 20$$

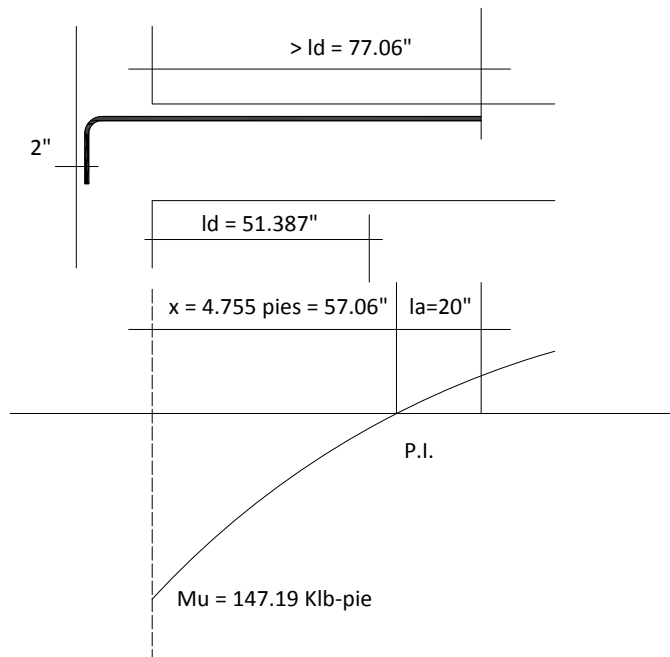
$$12 \cdot d_b = 12$$

$$\frac{l_n}{16} = 16.875$$

Por lo tanto,  $l_a := d$

$$l_a = 20 \quad \text{plg}$$

Puesto que la longitud de desarrollo requerida hacia el interior de la columna de apoyo, es mayor a la longitud en el apoyo (después de descontar 2 plg por recubrimiento lateral), se utilizarán ganchos en el apoyo.



### Longitud de desarrollo en los ganchos

$\psi_e := 1.0$  Para varillas no recubiertas

$\psi_c := 0.7$  Rec. lat. > 2.5 plg (esto es considerando el ancho de la col.)

$\psi_r := 1.0$  Al no haber información de estrubos en la columna

$$l_{dh} := \frac{f_y \cdot \psi_e \cdot \psi_c \cdot \psi_r}{50 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot d_b \quad l_{dh} = 11.068$$

Comparando esta longitud de desarrollo con:

$$8 \cdot d_b = 8$$

6 plg

por lo que,  $l_{dh} = 11.068$  plg

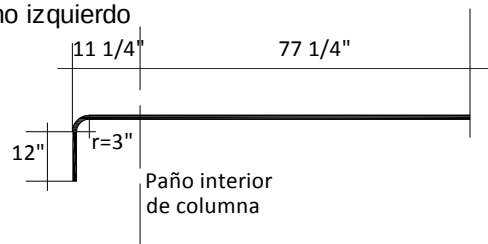
Longitud disponible en el apoyo = 16 plg

Detallado de la longitud del gancho en el apoyo externo izquierdo

$$r := 3 \cdot d_b$$

$$r = 3$$

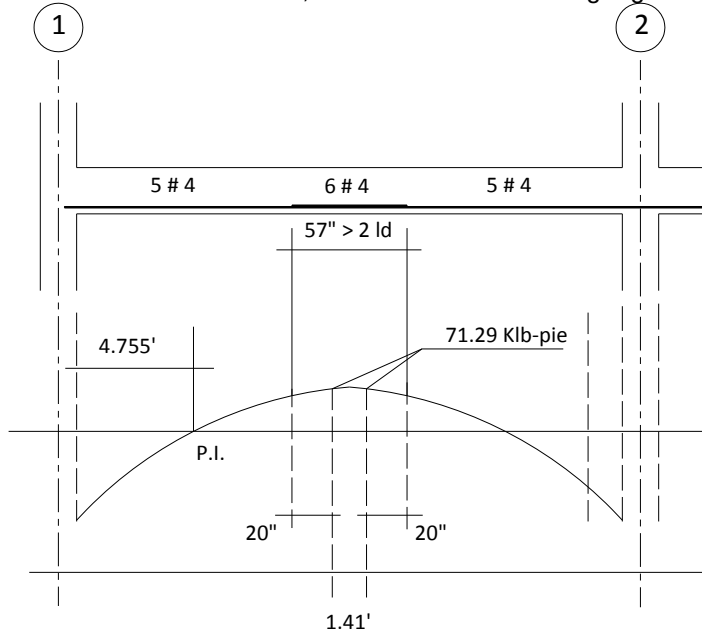
$$12 \cdot d_b = 12$$



### Acero de refuerzo por momento positivo

Para la determinación de la longitud de desarrollo del acero de refuerzo por momento positivo en el primer claro (claro exterior izquierdo, entre ejes 1 - 2), deberá determinarse

la localización de los P.I., como se indica en la sig. figura



Diámetro equiv. de 2#4:

$$A_{paq} := 0.39$$

$$d_b := \sqrt{\frac{4 \cdot A_{paq}}{\pi}} \quad d_b = 0.705$$

$$f_y = 50000$$

$$f_c = 4000$$

$$l_d = 22.284 \quad plg > 12 \text{ plg}$$

$$\psi_t := 1.0 \quad \text{Para varillas inferiores}$$

$$\psi_e := 1.0 \quad \text{Para varillas no recubiertas}$$

$$\psi_t \cdot \psi_e = 1 < 1.7 \quad \text{OK}$$

$$\lambda := 1.0 \quad \text{Para concreto de peso normal}$$

$$l_d := \frac{f_y \cdot \psi_t \cdot \psi_e}{25 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f_c}} \cdot d_b$$

Recortando 2 varillas, el momento resistente por las 4 #4 restantes

$$\text{Area de 4\#4} \quad A_s := 0.78$$

$$\beta_1 := 0.85 \quad \epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{min} := \max\left(\frac{200}{f_y}, \frac{3 \cdot \sqrt{f_c}}{f_y}\right) \quad \rho := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho_{max} := \left(\frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y}\right) \cdot \left(\frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t}\right)$$

$$\rho_{min} = 0.004$$

$$\rho = 0.00325$$

$$\rho_{max} = 0.022$$

Controla la cuantía mínima, por lo que solo se recortará una varilla.

$$\text{Area de 5\#4} \quad A_s := 0.98$$

$$\beta_1 := 0.85 \quad \epsilon_t := 0.005$$

$$\rho_{min} := \max\left(\frac{200}{f_y}, \frac{3 \cdot \sqrt{f_c}}{f_y}\right) \quad \rho := \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho_{max} := \left(\frac{0.85 \cdot \beta_1 \cdot f_c}{f_y}\right) \cdot \left(\frac{0.003}{0.003 + \epsilon_t}\right)$$

$$\rho_{min} = 0.004$$

$$\rho = 0.00408$$

$$\rho_{max} = 0.022$$

La sección es dúctil

$$a := \frac{A_s \cdot f_y}{0.85 \cdot f_c \cdot b}$$

$$a = 1.201$$

$$\phi := 0.9$$

$$\underline{c} := \frac{a}{\beta_1} \quad c = 1.413$$

$$\underline{\epsilon_t} := \frac{d - c}{c} \cdot 0.003 \quad \epsilon_t = 0.039 \quad >> 0.005, \text{ se verifica el valor de } \phi$$

$$\phi M_n := \phi \cdot A_s \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{1}{12 \cdot 1000} \quad \phi M_n = 71.293 \quad \text{klb-pie}$$

Esta ordenada de momento, deberá ubicarse en el diagrama de momentos correspondiente a la viga, para determinar la longitud de desarrollo requerida en la varilla que se recorta

Longitud de anclaje "la" más allá del punto en donde se presenta el momento requerido de la sección con las varillas que continúan:

$$d = 20$$

$$12 \cdot d_b = 8.456$$

Por lo tanto,  $\underline{la} := d$

$$la = 20 \quad \text{plg}$$

## COLUMNAS

Las columnas se definen como elementos que sostienen principalmente cargas a compresión. En general, las columnas también soportan momentos flexionantes con respecto a uno o a los dos ejes de la sección transversal y esta acción de flexión puede producir fuerzas de tensión sobre una parte de la sección transversal. Aún en estos casos, se hace referencia a las columnas como elementos a compresión puesto que las fuerzas de compresión dominan su comportamiento.

El refuerzo principal en columnas es longitudinal, paralelo a la dirección de la carga y consta de barras dispuestas en forma de cuadrado, rectángulo o círculo. La relación del área de acero longitudinal  $A_{st}$  al área de la sección transversal bruta de concreto  $A_g$  está en el intervalo de 0.01 a 0.08, conforme al ACI 10.6.1.1. El límite inferior es necesario para garantizar una resistencia a momento flexionante no tomada en cuenta en el análisis y para reducir los efectos del flujo plástico y de la retracción de fraguado del concreto sometido a compresión sostenida. Relaciones mayores que 0.08 no son solamente antieconómicas, sino que producen dificultades relacionadas con la congestión del refuerzo, en particular en las zonas de empalmes del acero. Por lo general se utilizan barras de los diámetros más grandes para reducir los costos de colocación y para evitar una congestión innecesaria. Según el código ACI 10.7.3.1, el número mínimo de barras longitudinales es de tres, cuando están dentro de estribos triangulares, cuatro para barras dentro de estribos rectangulares o circulares y seis para barras rodeadas por espirales continuas.

Las columnas pueden dividirse en dos grandes categorías: las **columnas cortas**, en las cuales la resistencia se rige por la resistencia de los materiales y por la geometría de la sección transversal, y las **columnas esbeltas** en las cuales la resistencia puede reducirse en forma significativa por las deflexiones laterales.

### COLUMNAS CORTAS

De acuerdo con ACI 22.4.2.1, la resistencia de diseño útil de una columna cargada axialmente debe determinarse con la ecuación

$$\phi P_n \geq P_u$$

$$P_n = 0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y$$

Los coeficientes de reducción de resistencia, son menores para columnas que para vigas; esto refleja la mayor importancia de las columnas en una estructura. En general, la falla de una viga afectará solamente una región de la estructura, mientras que la falla de una



columna puede generar el colapso de la estructura completa. De acuerdo con ACI 21.2.2 el factor de reducción de resistencia para columnas reforzadas en espiral, es 0.75, mientras que para el caso de uso de estribos, el valor es 0.65, en comparación con el valor usual de 0.9 para vigas.

El ACI 22.4.2.1 establece la limitación adicional en la resistencia de las columnas con el fin de compensar excentricidades accidentales de cargas no contempladas en el análisis. Esto podría lograrse especificando una excentricidad mínima o más directamente, con la determinación de un límite superior en la capacidad, menor que la resistencia calculada de diseño. Este límite superior se toma igual a 0.85 veces la resistencia de diseño para columnas reforzadas en espiral y 0.80 veces la resistencia calculada para columnas con estribos.

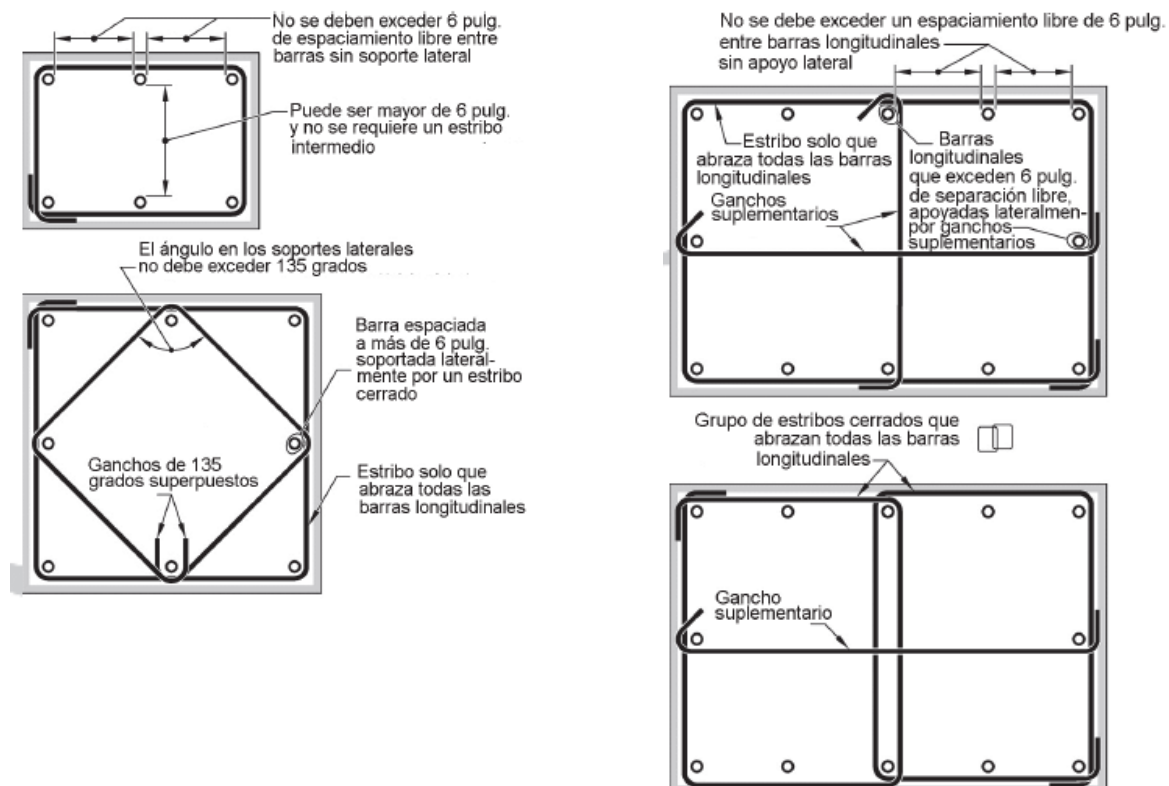
Columnas reforzadas con estribos

$$\phi P_{n(max)} = 0.80 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y], \phi = 0.65$$

Columnas reforzadas en espiral

$$\phi P_{n(max)} = 0.85 \phi [0.85 f'_c (A_g - A_{st}) + A_{st} f_y], \phi = 0.75$$

En la sección ACI 25.7.2 se establecen los requerimientos para los estribos de columnas:



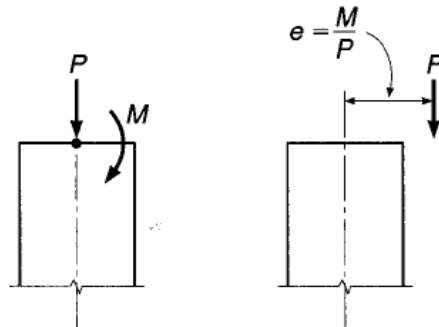
- Espaciamiento libre al menos  $(4/3) d_{agg}$
- Espaciamiento centro a centro no debe exceder el menos de  $16d_b$  de barra longitudinal,  $48d_b$  de barra de estribo y la menor dimensión del elemento.
- Diámetro de la la barra de estribo, debe ser al menos: barras #3 encerrando barras longitudinales #10 o menores; barras #4 encerrando barras longitudinales #11 o mayores.

En el caso general de carga en una columna, se tendrá una combinación de carga axial con momento flexionante, en tal caso, la columna deberá ser diseñada para el caso:

$$\phi M_n \geq M_u$$

$$\phi P_n \geq P_u$$

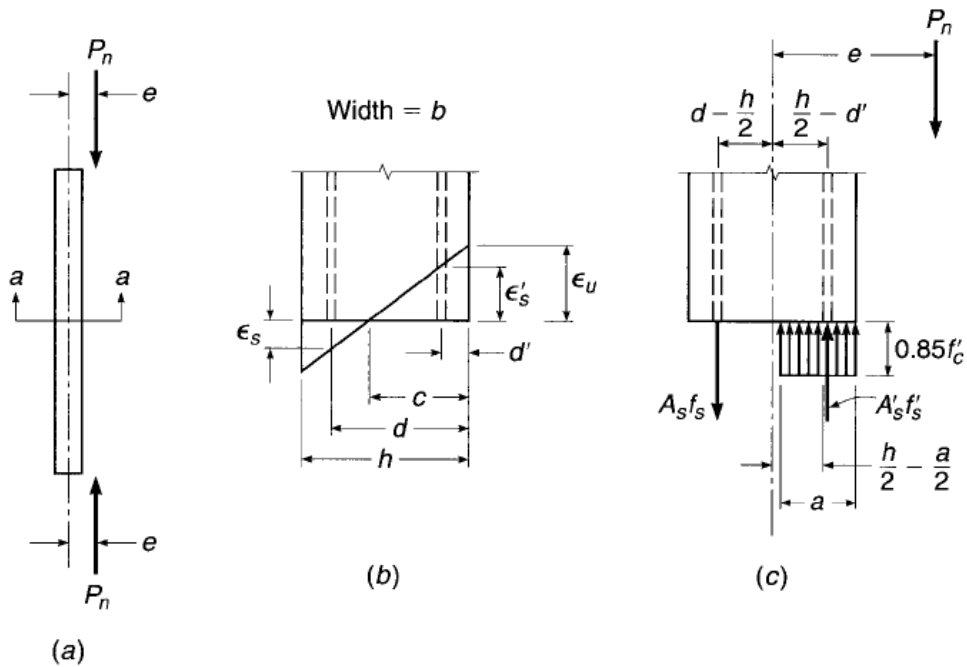
Cuando un elemento está sometido a una compresión axial  $P$  combinada con un momento flexionante  $M$ , por lo general es conveniente remplazar la carga axial y el momento flexionante por una carga equivalente de igual magnitud  $P$  aplicada con una excentricidad  $e = M / P$ . Estas dos condiciones son estáticamente equivalentes. Ante esta equivalencia, todas las columnas pueden entonces clasificarse en términos de la excentricidad equivalente. Con base en esta excentricidad, una columna podría presentar falla por aplastamiento en el concreto y fluencia en el acero en compresión, en el caso de excentricidades pequeñas y carga axial alta. En el caso de excentricidades grandes, las columnas se someten a tensión sobre, al menos, una parte de la sección y, pueden fallar por fluencia del acero a tensión en el lado más alejado de la carga.



Análisis de compatibilidad de deformaciones y diagramas de interacción.

Considérese una columna sometida a compresión excéntrica: (a) columna cargada; (b) distribución de deformaciones en la sección a-a'; (c) esfuerzos y fuerzas para la resistencia última nominal. La hipótesis de secciones planas, permanecen planas después de la deformación permite determinar las deformaciones en el acero de refuerzo y concreto, en función de la distancia al eje neutro, en forma lineal. En la sección transversal, el acero a

compresión  $A'_s$  y el acero a tensión  $A_s$ , se encuentran a la distancia  $d'$  y  $d$ , respectivamente de la fibra más alejada en compresión en el concreto.



De acuerdo con el equilibrio de fuerzas axiales internas y externas

$$P_n = 0.85 f'_c ab + A'_s f'_s - A_s f_s$$

El momento de los esfuerzos y fuerzas internas con respecto a la línea central en la sección debe ser igual y opuesto al momento de la fuerza externa  $P_n$

$$M_n = P_n e = 0.85 f'_c ab (h/2 - a/2) + A'_s f'_s (h/2 - d') - A_s f_s (d - h/2)$$

Estas expresiones constituyen las dos ecuaciones básicas de equilibrio para elementos rectangulares sometidos a compresión excéntrica.

Las expresiones anteriores pueden modificarse para tomar en cuenta el área de concreto desplazada por el acero de refuerzo en la compresión:

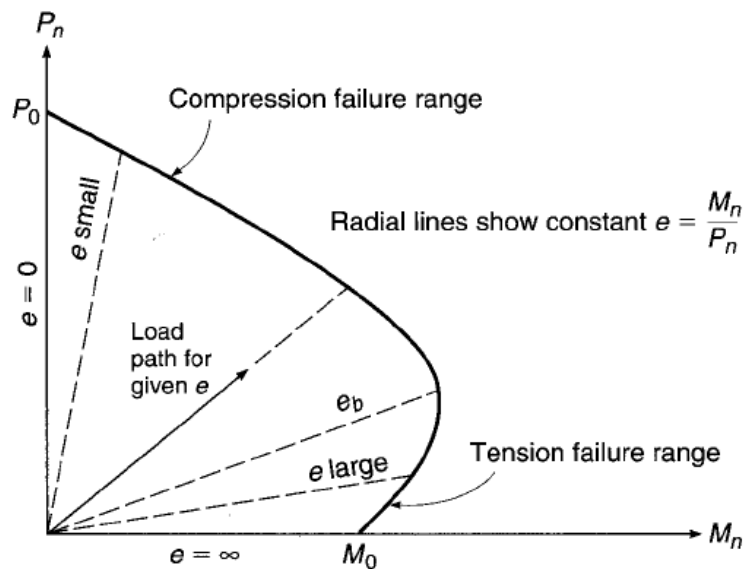
$$P_n = 0.85 f'_c ab + A'_s (f'_s - 0.85f'_c) - A_s f_s$$

$$M_n = P_n e = 0.85 f'_c ab (h/2 - a/2) + A'_s (f'_s - 0.85f'_c) (h/2 - d') - A_s f_s (d - h/2)$$

En el caso de grandes excentricidades, la falla se inicia por la fluencia del acero a tensión, en tal caso  $f_s = f_y$ . Cuando el concreto alcanza su deformación unitaria última, es posible que el acero a compresión fluya o no, esto se deberá determinar con base en la compatibilidad de deformaciones.

En el caso de excentricidades pequeñas, el concreto alcanzará su deformación límite antes que el acero a tensión empiece a fluir (incluso podría el acero estar en compresión). En este caso, el análisis debe basarse también en la compatibilidad de deformaciones entre el acero de refuerzo y el concreto adyacente.

Es posible construir el diagrama de interacción de resistencia de la sección, el cual define, para cualquier excentricidad, un par de valores de  $P_n$  y  $M_n$  que producirán un estado inminente de falla. Este punto puede representarse en una gráfica, la cual se complementa con más resultados (puntos  $P_n$  ,  $M_n$ ) para diferentes valores de excentricidad.



Para una columna seleccionada en forma tentativa, el diagrama de interacción puede construirse más fácilmente si se escogen valores sucesivos de la distancia al eje neutro “c”, desde el infinito hasta un valor muy pequeño. Para cada valor seleccionado de “c”, las deformaciones y los esfuerzos en el acero y las fuerzas en el concreto pueden ser calculados de forma sencilla:

Para el acero en tensión

$$\epsilon_s = \epsilon_u \frac{d-c}{c}$$

$$f_s = \epsilon_s E_s = \epsilon_u E_s \frac{d-c}{c} \leq f_y$$

Para el acero en compresión

$$\epsilon'_s = \epsilon_u \frac{c-d'}{c}$$

$$f'_s = \epsilon'_s E_s = \epsilon_u E_s \frac{c-d'}{c} \leq f_y$$

La profundidad del bloque a compresión en el concreto

$$a = \beta_1 c \leq h$$

Y la resultante a compresión del concreto es

$$C = 0.85 f'_c a b$$

Con estos resultados, las fuerzas  $P_n$  y  $M_n$  pueden ser determinadas con las expresiones vistas anteriormente, correspondientes a la localización seleccionada del eje neutro. Este procedimiento establece un punto del diagrama de interacción de resistencia. Para obtener otros puntos, los cálculos pueden repetirse utilizando diferentes valores de “c”.

El diagrama de interacción de resistencia, consiste en dos regiones, una en donde la falla es controlada por compresión, y la otra en donde la falla es controlada por tensión. Se establece entonces el modo de falla balanceada, correspondiente para una excentricidad  $e_b$ , con la carga  $P_b$  y el momento  $M_b$  que actúan en combinación para producir la falla, en donde el acero en tensión, en el lado alejado de la columna, alcanza su deformación de fluencia y el concreto alcanza su deformación limite en el mismo instante.

Los valores de  $P_b$  y  $M_b$  pueden calcularse para la falla balanceada

$$c = c_b = d \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y}$$

$$a = a_b = \beta_1 c_b$$

**Ejemplo.** Una columna de 12 x 20 plg está reforzada con cuatro varillas #9, una en cada esquina. La resistencia del concreto  $f'_c=3500 \text{ lb/plg}^2$  y la resistencia del acero  $f_y=50000 \text{ lb/plg}^2$ . Determinar los siguientes puntos en el diagrama de interacción

- Resistencia balanceada  $P_b$  y  $M_b$  y la excentricidad correspondiente  $e_b$
- La carga y momento para un punto representativo en la zona de falla a tensión
- La carga y momento para un punto representativo en la zona de falla a compresión
- La resistencia a carga axial para excentricidad nula
- Dibujar el diagrama de interacción de esta columna

$$b := 12 \quad f_c := 3.5 \quad f_y := 50.0 \quad E_s := 29000$$

$$h := 20 \quad d := h - 2.5 \quad d = 17.5 \quad \beta_1 := 0.85$$

$$d_p := 2.5 \quad A_s := 2.0 \quad A_{sp} := 2.0$$

### Solución

- Determinación del eje neutro en la falla balanceada

$$\epsilon_u := 0.003 \quad \epsilon_y := \frac{f_y}{E_s} \quad \epsilon_y = 0.0017$$

$$c_b := d \cdot \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} \quad c_b = 11.113$$

La profundidad del bloque a compresión

$$a := \beta_1 \cdot c_b \quad a = 9.446$$

Esfuerzo en el acero a compresión

$$f_{sp} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c_b - d_p}{c_b} \quad f_{sp} = 67.429 > f_y = 50$$

El acero a compresión está en la fluencia **OK**

$$f_{sp} := f_y$$

La fuerza de compresión en el concreto

$$C_c := 0.85 \cdot f_c \cdot a \cdot b \quad C_c = 337.228$$

La carga axial balanceada

$$P_b := C_c + A_{sp} \cdot f_{sp} - A_s \cdot f_y \quad P_b = 337.228$$

El momento balanceado

$$M_b := C_c \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + A_{sp} \cdot f_{sp} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_p \right) + A_s \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) \quad \frac{M_b}{12} = 273.294$$

Excentricidad correspondiente

$$e_b := \frac{M_b}{P_b} \quad e_b = 9.725$$

- Cualquier selección de "c" menor a  $c_b=11.1$  genera un punto en la zona de falla por tensión en la curva de interacción, con una excentricidad mayor que  $e_b$ .

Considerar  $c := 5$

El acero a tensión fluye, por definición (al encontrarse en la zona de falla por tensión)

Esfuerzo en el acero a compresión

$$f_{sp} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c - d_p}{c} \quad f_{sp} = 43.5$$

La profundidad del bloque a compresión

$$a := \beta_1 \cdot c \quad a = 4.25$$

La fuerza de compresión en el concreto

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot a \cdot b \quad C = 151.725$$

La carga axial Pn

$$P_n := C + A_{sp} \cdot f_{sp} - A_s \cdot f_y \quad P_n = 138.725$$

El momento Mn

$$M_n := C \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + A_{sp} \cdot f_{sp} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_p \right) + A_s \cdot f_y \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) \quad \frac{M_n}{12} = 216.445$$

Excentricidad correspondiente

$$e := \frac{M_n}{P_n} \quad e = 18.723$$

c) Cualquier selección de "c" menor a  $c_b=11.1$  genera un punto en la zona de falla por tensión en la curva de interacción, con una excentricidad mayor que  $e_b$ .

Considerar  $c := 18$

La profundidad del bloque a compresión

$$a := \beta_1 \cdot c \quad a = 15.3$$

La fuerza de compresión en el concreto

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot a \cdot b \quad C = 546.21$$

Esfuerzo en el acero a tensión

$$f_s := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{d - c}{c} \quad f_s = -2.417$$

Este resultado negativo indica que efectivamente  $A_s$  está en compresión si  $c > d$

Esfuerzo en el acero a compresión

$$f_{sp} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c - d_p}{c} \quad f_{sp} = 74.917 > f_y = 50$$

El acero a compresión está en la fluencia **OK**

$$f_{sp} := f_y$$

La carga axial Pn

$$P_n := C + A_{sp} \cdot f_{sp} - A_s \cdot f_s \quad P_n = 651.043$$

El momento Mn

$$M_n := C \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + A_{sp} \cdot f_{sp} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_p \right) + A_s \cdot f_s \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) \quad \frac{M_n}{12} = 166.445$$

Excentricidad correspondiente

$$e := \frac{M_n}{P_n} \quad e = 3.068$$

d) La resistencia axial de la columna, si está cargada concéntricamente  $c=\infty$  y  $e=0$

$$P_n := 0.85 \cdot f_c \cdot b \cdot h + (A_s + A_{sp}) \cdot f_y \quad P_n = 914$$

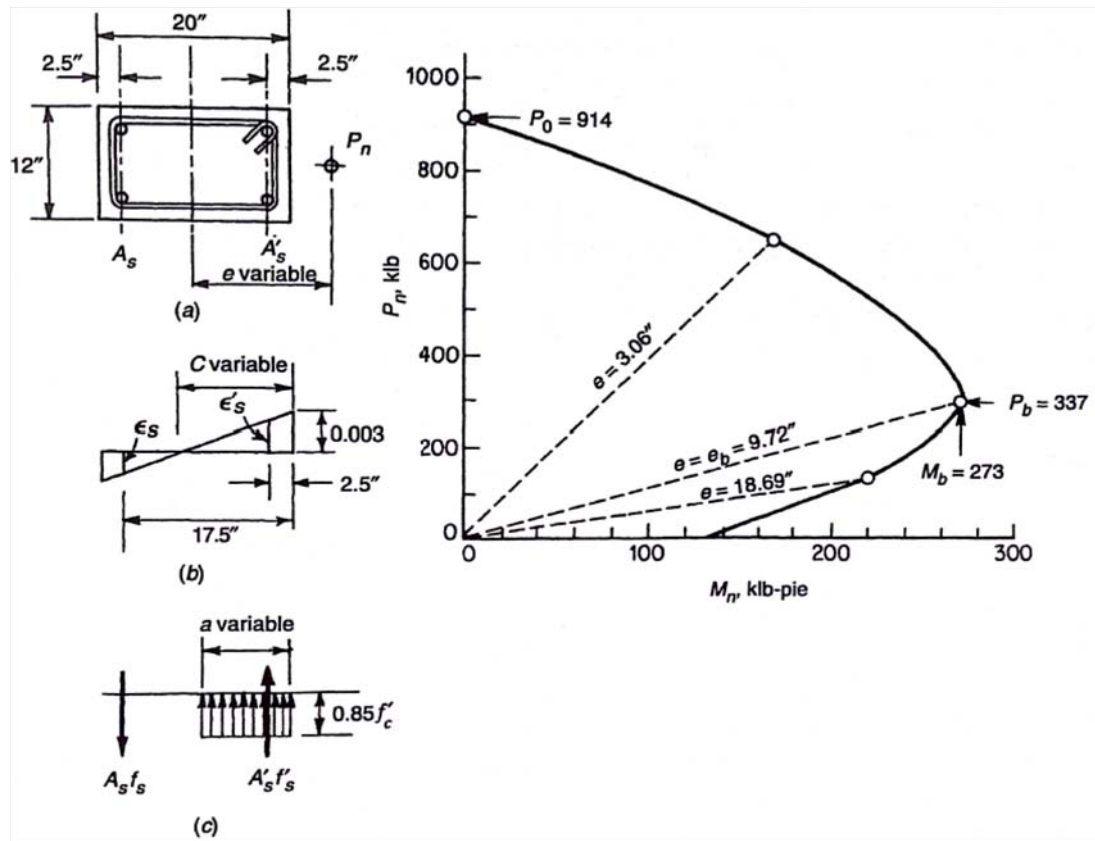


Diagrama de interacción obtenido para el ejemplo. (a) Sección transversal; (b) distribución de deformaciones; (c) esfuerzos y fuerzas; (d) diagrama de interacción de resistencias.



**Ejemplo.** Una columna de 12 x 26 plg está reforzada con diez varillas #11, en cuatro capas (3, 2, 2 y 3 varillas por capa). La resistencia del concreto  $f'_c=6000 \text{ lb/plg}^2$  y la resistencia del acero  $f_y=75000 \text{ lb/plg}^2$ . Determinar los siguientes puntos en el diagrama de interacción

- Resistencia balanceada  $P_b$  y  $M_b$  y la excentricidad correspondiente  $e_b$
- La carga y momento para un punto representativo en la zona de falla a tensión
- La carga y momento para un punto representativo en la zona de falla a compresión
- La resistencia a carga axial para excentricidad nula
- Dibujar el diagrama de interacción de esta columna

$$\begin{aligned} b &:= 12 & f_c &:= 6.0 & f_y &:= 75.0 & E_s &:= 29000 \\ h &:= 26 & d &:= h - 2.5 & d &= 23.5 & \beta_1 &:= 0.75 \\ d_p &:= 2.5 & A_s &:= 4.68 & A_{sp} &:= 4.68 \\ s &:= 7 & d_1 &:= d_p + s & d_2 &:= d_p + 2 \cdot s & A_{s1} &:= 3.12 & A_{s2} &:= 3.12 \\ & & d_1 &= 9.5 & d_2 &= 16.5 \end{aligned}$$

### Solución

- Determinación del eje neutro en la falla balanceada

$$\epsilon_u := 0.003 \quad \epsilon_y := \frac{f_y}{E_s} \quad \epsilon_y = 0.00259$$

$$c_b := d \cdot \frac{\epsilon_u}{\epsilon_u + \epsilon_y} \quad c_b = 12.62$$

La profundidad del bloque a compresión

$$a := \beta_1 \cdot c_b \quad a = 9.465$$

Esfuerzo en el acero a compresión

$$f_{sp} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c_b - d_p}{c_b} \quad f_{sp} = 69.766 < f_y = 75$$

$$f_{sp1} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c_b - d_1}{c_b} \quad f_{sp1} = 21.511 < f_y = 75$$

Esfuerzo en el acero a tensión

$$f_{s2} := \epsilon_y \cdot E_s \cdot \frac{d - c_b - s}{d - c_b} \quad f_{s2} = 26.745 < f_y = 75$$

La fuerza de compresión en el concreto

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot a \cdot b \quad C = 579.275$$

La fuerza de compresión en el acero

$$C_s := A_{sp} \cdot (f_{sp} - 0.85 \cdot f_c) \quad C_s = 302.637$$

$$C_{s1} := A_{s1} \cdot (f_{sp1} - 0.85 \cdot f_c) \quad C_{s1} = 51.201$$

La fuerza de tensión en el acero

$$T := A_s \cdot f_y \quad T = 351$$

$$T_{s2} := A_{s2} \cdot f_{s2} \quad T_{s2} = 83.443$$

La carga axial balanceada

$$P_b := C + C_s + C_{s1} - T - T_{s2} \quad P_b = 498.669$$

El momento balanceado

$$M_b := C \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \cdot \left( \frac{h}{2} - d_p \right) + C_{s1} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + T \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) + T_{s2} \cdot \left( d_2 - \frac{h}{2} \right)$$

$$\frac{M_b}{12} = 1010.293$$

Excentricidad correspondiente

$$e_b := \frac{M_b}{P_b} \quad e_b = 24.312$$

b) Cualquier selección de "c" menor a  $c_b=12.62$  genera un punto en la zona de falla por tensión en la curva de interacción, con una excentricidad mayor que  $e_b$ .

Considerar  $c := 9$

El acero a tensión fluye, por definición (al encontrarse en la zona de falla por tensión)

Esfuerzo en el acero a compresión

$$f_{sp} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c - d_p}{c} \quad f_{sp} = 62.833$$

Esfuerzo en el acero a tensión

$$f_{s1} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{d - c - 2s}{c} \quad f_{s1} = 4.833 < f_y = 75$$

$$f_{s2} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{d - c - s}{c} \quad f_{s2} = 72.5 < f_y = 75$$

La profundidad del bloque a compresión

$$a := \beta_1 \cdot c \quad a = 6.75$$

La fuerza de compresión en el concreto

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot a \cdot b \quad C = 413.1$$

La fuerza de compresión en el acero

$$C_s := A_{sp} \cdot (f_{sp} - 0.85 \cdot f_c) \quad C_s = 270.192$$

La fuerza de tensión en el acero

$$T := A_s \cdot f_y \quad T = 351$$

$$T_{s1} := A_{s1} \cdot f_{s1} \quad T_{s1} = 15.08$$

$$T_{s2} := A_{s2} \cdot f_{s2} \quad T_{s2} = 226.2$$

La carga axial  $P_n$

$$P_n := C + C_s - T - T_{s1} - T_{s2} \quad P_n = 91.012$$

El momento  $M_n$

$$M_n := C \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \cdot \left( \frac{h}{2} - d_p \right) + T_{s1} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + T \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right) + T_{s2} \cdot \left( d_2 - \frac{h}{2} \right)$$

$$\frac{M_n}{12} = 945.257$$

Excentricidad correspondiente

$$e := \frac{M_n}{P_n} \quad e = 124.633$$

c) Cualquier selección de "c" mayor a  $c_b=12.62$  genera un punto en la zona de falla por compresión en la curva de interacción, con una excentricidad mayor que  $e_b$ .

Considerar  $c := 18$

La profundidad del bloque a compresión

$$a := \beta_1 \cdot c \quad a = 13.5$$

La fuerza de compresión en el concreto

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot a \cdot b \quad C = 826.2$$

Esfuerzo en el acero a compresión

$$f_{sp} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c - d_p}{c} \quad f_{sp} = 74.917 < f_y = 75$$

$$f_{s1} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c - d_1}{c} \quad f_{s1} = 41.083 < f_y = 75$$

$$f_{s2} := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{c - d_2}{c} \quad f_{s2} = 7.25 < f_y = 75$$

Esfuerzo en el acero a tensión

$$f_s := \epsilon_u \cdot E_s \cdot \frac{d - c}{c} \quad f_s = 26.583 < f_y = 75$$

La fuerza de compresión en el concreto

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot a \cdot b \quad C = 826.2$$

La fuerza de compresión en el acero

$$C_s := A_{sp} \cdot (f_{sp} - 0.85 \cdot f_c) \quad C_s = 326.742$$

$$C_{s1} := A_{s1} \cdot (f_{s1} - 0.85 \cdot f_c) \quad C_{s1} = 112.268$$

$$C_{s2} := A_{s2} \cdot f_{s2} \quad C_{s2} = 22.62$$

La fuerza de tensión en el acero

$$T := A_s \cdot f_s \quad T = 124.41$$

La carga axial  $P_n$

$$P_n := C + C_s + C_{s1} + C_{s2} - T \quad P_n = 1163.42$$

El momento  $M_n$

$$M_n := C \cdot \left( \frac{h}{2} - \frac{a}{2} \right) + C_s \cdot \left( \frac{h}{2} - d_p \right) + C_{s1} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_1 \right) + C_{s2} \cdot \left( \frac{h}{2} - d_2 \right) + T \cdot \left( d - \frac{h}{2} \right)$$

$$\frac{M_n}{12} = 851.218$$

Excentricidad correspondiente

$$e := \frac{M_n}{P_n} \quad e = 8.78$$

d) La resistencia axial de la columna, si está cargada concéntricamente  $c=\infty$  y  $e=0$

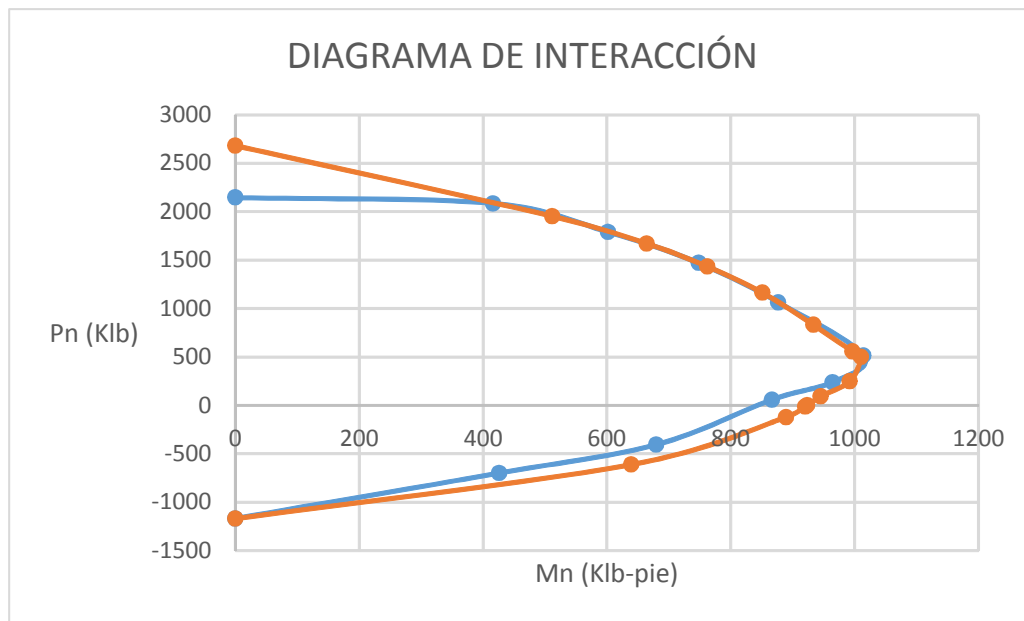
$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot b \cdot h \quad C = 1591.2$$

$$C_s := (2 \cdot A_s + 2 \cdot A_{s1}) \cdot f_y \quad C_s = 1170$$

$$P_n := C + C_s \quad P_n = 2761.2$$

$$C := 0.85 \cdot f_c \cdot (b \cdot h - 2 \cdot A_s - 2 \cdot A_{s1}) \quad C = 1511.64$$

$$P_n := C + C_s \quad P_n = 2681.64$$



En el diagrama mostrado, la curva con ordenadas ligeramente menores, corresponde al diagrama obtenido en SAP2000, la otra curva corresponde a los resultados representados en la solución del ejercicio (otros puntos en el diagrama fueron determinados siguiendo la misma metodología del ejercicio). En el caso de la ordenada máxima en compresión, el resultado de SAP está reducido al 0.8 (de acuerdo con el ACI), lo cual no está considerado en los resultados del ejercicio desarrollado. De igual manera, en ambos diagramas, las ordenadas no han sido reducidas por el factor  $\phi$ , tanto para carga axial, como para momento flexionante.