Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño

Notas del Curso

Circuitos Electrónicos

Ingeniería Electrónica

3er. Semestre

Miguel Enrique Martínez Rosas
Manuel Moisés Miranda Velasco
Carlos Gómez Agis
José Antonio Michel Macarty

Ensenada, Baja California, Agosto de 2016.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Sistema Internacional de Unidades y prefijos griegos

1.1. Sistema Internacional de Unidades

La Oficina Internacional de Pesos y Medidas, el BIPM, fue establecida en el artículo 1 de la Convención de Metro, de 20 de Mayo de 1875, y está encargada de proporcionar las bases para que un único sistema coherente de medidas se utilice en todo el mundo. El sistema métrico decimal, que data de la época de la revolución francesa, se basaba en el metro y el kilogramo. Bajo los términos de la Convención de 1875, se fabricaron nuevos prototipos del metro y del kilogramo y se adoptaron formalmente por la primera Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) en 1889. Este sistema fue desarrollándose a lo largo del tiempo, de modo que ahora incluye siete unidades básicas. En 1960, en la 11ª CGPM, se decidió que se debería llamar Sistema Internacional de Unidades SI. El SI no es estático, sino que evoluciona para responder a las crecientes demandas de medida, en todos los niveles de precisión y en todas las áreas de la ciencia, la tecnología y el empeño humano.

Vale la pena mencionar que el SI (Sistema Internacional de Unidades) consta de siete magnitudes elementales, las cuales se describen con distintas unidades y símbolos (ver la Tabla **??**.

1.2. Prefijos griegos

La 11va CGPM adoptó una serie de nombres y símbolos de prefijos para formar los nombres y símbolos de los múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades del SI desde 10^{12} hasta 10^{-12}. Los prefijos para 10^{-15} y 10^{-18} fueron añadidos en la 12ª CGPM, y para 10^{15} y 10^{18} en la 15ª CGPM. Asimismo, los prefijos para 10^{21}, 10^{24}, 10^{-21} y 10^{-24} se añadieron en la 19ª CGPM.

La Tabla **??** muestra los nombres y símbolos de los prefijos aprobados por la CGPM.

MAGNITUD	UNIDAD	SIMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Corriente eléctrica	Ampere	A
Temperatura termodinámica	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	mole	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Tabla 1.1: Sistema Internacional de Unidades.

MULTIPLOS			SUBMULTIPLOS		
FACTOR	NOMBRE	SIMBOLO	FACTOR	NOMBRE	SIMBOLO
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecta	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	Peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	Exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	Zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	Yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Tabla 1.2: Prefijos del Sistema Internacional de Unidades

1.3. Introducción a la Electricidad.

1.3.1. Voltaje y Potencia.

Voltaje: Es la energía o trabajo para mover un electrón en una dirección en particular, se requiere transferir una cierta cantidad de trabajo o energía. Dicho trabajo se realiza por una fuerza electromotriz (emf), típicamente representada por una batería. Esta *emf* también es conocida como voltaje o diferencia de potencial.

El voltaje V_{ab} entre dos puntos a y b en un circuito electrónico es la energía (o trabajo) requerida para mover una unidad de carga de a y b.

$$V_{ab} = \frac{dw}{dq}$$

$$V_{ab} = -V_{ba}$$

$$\text{Volt} = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \frac{\text{Newton metro}}{\text{Coulomb}}$$

Potencia: La potencia es la razón de entrega o absorción de energía con respecto al tiempo y se mide en Watts (W). Cuando una corriente directa de I amperes esta fluyendo en un circuito eléctrico y el voltaje a través del circuito es V volts, entonces, la potencia (en Watts) esta dada por:

$$P = V \cdot I$$

Tip: Es necesario calcular los valores instantáneos para conocer la evolución de la potencia de las señales.

Energia: La energía es la capacidad para realizar trabajo y se mide en Joules. Para el caso de circuitos eléctricos, la energia correspondiente se expresa por medio de:

$$\text{Energía} = \text{Potencia} \cdot \text{Tiempo [Joules]}$$

Aunque la unidad de la energía en el Joule, cuando se trabaja con grandes cantidades de energía, la unidad utilizada es el kilowatt hora (KWh) en donde:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kWh} &= 1000 \text{ Watt hora} \\ &= 1000 \cdot 3600 \text{ Watt} \cdot \text{seg (o Joules)} \\ &= 3\,600\,000 \text{ Joules} \end{aligned}$$

Problema 1: Una fuente de voltaje de 5V proporciona una corriente de 3A por 10 minutos. ¿Cuánta energía es entregada en este tiempo?

$$\begin{aligned} \text{W} &= (15\text{W})(10\text{min})\left(\frac{60 \text{ seg}}{1 \text{ min}}\right) \\ &= (150\text{W})(60\text{seg}) \\ &= 9000 \text{ W}\cdot\text{s} \\ &= 9000 \text{ Joules} \end{aligned}$$

Problema 2: Un calentador eléctrico consume 1.8 MJ cuando se conecta a una alimentación de 250 V durante 30 minutos. Calcule la especificación de potencia del calentador y la corriente que toma de la fuente de alimentación.

$$E = V \cdot I \cdot T$$
$$I = \frac{E}{V * T}$$

$$I = \frac{E}{V * T} = \frac{1.8x10^6}{(250V)(1800seg)}$$

$$\frac{1.8x10^6}{(2.5x10^2V)(1.8x10seg)} = \frac{10J}{(2.5V * seg)} = \underline{4A}$$

Problema 3: ¿Cuánto tiempo debe fluir una corriente de 0.1A para transferir una carga de 30C?

$$\begin{aligned} \text{I} &= \frac{\text{Q}}{\text{T}} \\ 0.1 \text{ A} &= \frac{30 \text{ C}}{t} \\ \text{t} &= \frac{30 \text{ C}}{0.1A} = 300 \text{ s} \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}\right) \\ &= 5 \text{ minutos} \end{aligned}$$

Problema 4: 450 J de energía son convertidos en calor durante 1 minuto. ¿Cuánta potencia se disipa?

$$P = \frac{E}{T} = \frac{450 \text{ J}}{60 \text{ seg}} = 7.5 \text{ Watts}$$

Convencion de signos pasiva: Se satisface cuando la corriente entra a través de la terminal positiva de un elemento y $P{=}VI$. Si la corriente entra a través de la terminal negativa el resultado de la operacion será negativa.

1.4. Elementos de circuitos

Existen dos tipos de elementos básicos en un circuito eléctrico los elementos pasivos y los elementos activos. Un elemento pasivo puede absorber, pero NO generar energía, mientras que un elemento activo SI es capaz de generar energía.

Los elementos activos mas importantes son las fuentes de voltaje y corriente, las cuales pueden dividirse en: *fuentes independientes y fuentes dependientes.*

Una fuente independiente ideal es aquella que proporciona voltaje y corriente infinita.

1.5. Ley de Ohm

Esta ley establece que "el voltaje en los extremos de un resistor es directamente proporcional a la corriente que fluye en sus extremos, o a través de el".

$$\mathrm{R} = \rho \frac{L}{A} \tag{1.1}$$

en donde:

ρ (rho) : Resistividad

L: Longitud del conductor

A: Área de la sección transversal

Si el área de conducción es pequeña, la resistividad es alta y en caso de que circule una corriente elevada por dicho conductor, éste se calentará por el efecto Joule.

Ejemplo: Para líneas de alta potencia (por ejemplo los alimentadores para trenes eléctricos), es común encontrar conductores rectangulares. Determine la resistencia en los extremos de una barra de aluminio que tiene las siguientes dimensiones: alto (h) 150 mm, ancho (w) 6 mm y su longitud (L) es de 270 m, sabiendo además que la temperatura es de 20 grados C y la ρ del Aluminio a esa temperatura es 2.8 $\times 10^{-8} \Omega$m.

sustituyendo valores en formula:

$$\mathrm{A}=(150\mathrm{mm})(6\mathrm{mm})=(0.15\mathrm{m})(0.006\mathrm{m})=9 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$$

$$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{(2.8 \times 10^{-8}\Omega\ \mathrm{m})(270\ \mathrm{m})}{9 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}$$

$$R = \underline{\ 8.4\ \Omega}$$

Ejemplo: Calcule la resistencia de 200 pies de un alambre de cobre con calibre 16 (AWG) a 20 grados C. ¿Qué valor de resistencia tiene un alambre del mismo tipo si su longitud es de 100m?

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \pi \cdot r^2 = 3.1416(0.645)^2 = 1.3 \times 10^{-6}\mathrm{m}^2 \\ \rho &= 1.72 \times 10^{-8}\ \Omega\ \mathrm{m} \\ \mathrm{L} &= 200\ \mathrm{ft}\left(\frac{0.3048\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{ft}}\right) \approx 61\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

$$R = \frac{(1.72 \times^{-8}\ \Omega\ \mathrm{m})(61\ \mathrm{m})}{1.3\ 10^{-6}\ \mathrm{m}^2}$$

$$R = \underline{0.802\ \Omega}$$

Problema: Si un alambre de cobre AWG14 puede soportar una corriente de 15 A, determine la capacidad esperada de corriente para alambres AWG24 y AWG8 a 20 grados C.

$$\frac{\text{AWG14}}{\text{AWG24}} = (1.12)^{10} = \underline{3.11 \text{ A}}$$
$$\frac{\text{AWG8}}{\text{AWG14}} = (1.12)^{6} = \underline{1.97 \text{ A}}$$

Una cantidad útil para el análisis de circuitos es el recíproco de la resistencia, llamada conductancia y denotado por G.

$$G = \frac{1}{R} \longrightarrow [\text{Siemens}]$$

La conductancia es la habilidad de un elemento para conducir la corriente eléctrica y se mide en mhos o Siemenes.

$$i(t)\frac{dq(t)}{dt} \qquad \longrightarrow \qquad q(t) = \int_{-\infty}^{t} i(x)\,dx \tag{1.2}$$

1.5.1. Convención de energía

Los circuitos eléctricos estudiados cumplen con la ley de conservación de la energía.

Teorema de Tellegen: *La potencia que se suministra debe de ser igual a la potencia que se absorbe.*

1.6. Nodos, Ramas y Lazos

Es necesario entender algunos conceptos básicos de topología de redes. En topología de redes se estudian las propiedades que relacionan la ubicación de elementos en la red, así como la configuración de la misma. Cuando se trabaja con topología de redes se mencionan redes en lugar de circuitos. Entre los elementos que conforman las redes se encuentran: **ramas, nodos y lazos.**

Rama: Una rama representa simplemente un elemento, tal como una fuente de voltaje o un resistor.

Nodo: Un nodo es el punto de conexión entre 2 o mas ramas.

Lazo: Un lazo es cualquier trayectoria cerrada en un circuito.

Una red con b ramas, n nodos y l lazos independientes satisface el teorema fundamental de topología de redes:

$$b = l + n - 1 \tag{1.3}$$

Capítulo 2

Leyes de Ohm y de Kirchhoff

2.1. Ley de Ohm

Los materiales en general poseen el comportamiento característico de oponerse al paso del flujo eléctrico. esta propiedad física, o capacidad para resistir a la corriente se conoce como *resistencia* y se representa con el símbolo R. esta depende de su longitud, área y de que esta fabricado, se puede representar la siguiente ecuación:

$$R = \rho \frac{l}{A} \tag{2.1}$$

Resistividad de materiales comunes		
Material	Resistividad (Ω m)	uso
Plata	$1.64{\times}10^{-8}$	Conductor
Cobre	$1.72{\times}10^{-8}$	Conductor
Aluminio	$2.8{\times}10^{-8}$	Conductor
Oro	$2.45{\times}10^{-8}$	Conductor
Carbón	$4{\times}10^{-5}$	Semiconductor
Germanio	$47\ {\times}10^{-2}$	Semiconductor
Silicio	$6.4{\times}10^{2}$	Semiconductor
papel	10^{10}	Aislante
Mica	$5{\times}10^{11}$	Aislante
Vidrio	10^{12}	Aislante
Teflón	$3{\times}10^{12}$	Aislante

Tabla 2.1: Valores de resistividad (ρ) de materiales comunes.

La **ley de Ohm** establece que la tensión v a lo largo de una resistor es directamente proporcional a la corriente i que fluye a través del resistor. Esto es:

$$v \propto i \tag{2.2}$$

La constante de proporcionalidad para obtener la igualdad es R y se conoce como *Resistencia*.

$$v = R \cdot i \tag{2.3}$$

La ecuación **??** es la forma matemática de la ley de Ohm. R en la ecuación se mide en la unidad designada como ohm su símbolo se denota como Ω. Otra manera de escribir su expresión es:

$$R = \frac{v}{i} \tag{2.4}$$

De modo que:

$$1\Omega = 1\text{V/A}$$

Cabe destacar que en el llamado *corto circuito* la resistencia del circuito es cero, en cambio en el denominado *circuito abierto* la resistencia se eleva al infinito.

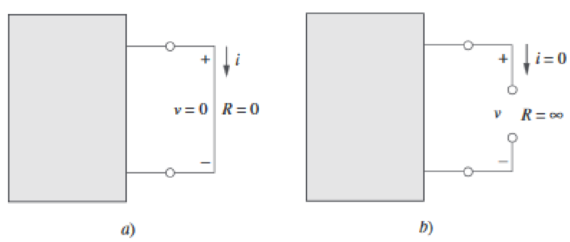


Figura 2.1: a) corto circuito, b) circuito abierto.

La ley de Ohm no es suficiente en sí misma para analizar circuitos. Pero cuando se le une con las dos leyes de Kirchhoff, hay un conjunto suficiente y eficaz de herramientas para analizar gran variedad de circuitos eléctricos. Las leyes de Kirchhoff las introdujo en 1847 el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887). Se les conoce formalmente como la ley de la corriente de Kirchhoff (LCK) y la ley de voltaje de Kirchhoff (LVK). La primera ley de Kirchhoff se basa en la ley de la conservación de la carga, de acuerdo con la cual la suma algebraica de las cargas dentro de un sistema no puede cambiar.

2.2. Ley de Corrientes de Kirchhoff (LCK)

Primera ley de Kirchhoff Se basa en la ley de conservación de carga que establece que *la suma algebraica de las cargas dentro de un sistema no puede cambiar.*

Establece que la suma algebraica de las corrientes que entran en un nodo (o área cerrada) es equivale a cero (0).

$$\sum_{n=1}^{N} I_n = 0 \tag{2.5}$$

en donde

N : Es el número de ramas conectadas al nodo.

I_n**:** Es la enésima corriente que entra al (o sale del) nodo.

Por efecto de esta ley, las corrientes que entran a un nodo pueden considerarse positivas, mientras que las corrientes que salen del nodo llegan a considerarse negativas, o viceversa. Para facilitar el análisis se tiene que establecer una convención de corrientes, la cual indica el sentido de las corrientes, que en este caso sera positivo (+) si entra al nodo y si sale del nodo será negativo (-).

2.3. Ley de Voltajes de Kirchhoff (LVK)

Segunda ley de Kirchhoff esta se basa e la ley de conservación de la energía. Establece que la suma algebraica de todos los voltajes en un lazo cerrado es equivalente a cero(0).

$$\sum_{m=1}^{M} V_m = 0 \tag{2.6}$$

En resumen, la ley de tensión de Kirchhoff no tiene nada que ver con la ganancia o pérdida de energía de los componentes electrónicos (Resistores, capacitores, etc.). Es una ley que está relacionada con el campo potencial generado por fuentes de tensión. En este campo potencial, sin importar que componentes electrónicos estén presentes, la ganancia o pérdida de la energía dada por el campo potencial debe ser cero cuando una carga completa un lazo.

Estas dos leyes junto con la ley de Ohm son leyes fundamentales para la resolución de circuitos eléctricos.

Aplicando la LVK en la malla obtenemos:
Convención = sentido de las manecillas del reloj.

$$-10V + V_1 - 8V - V_2 = 0$$

Por ley de Ohm:

$$V_1 = (4\Omega)iV_2 = -(2\Omega)i$$

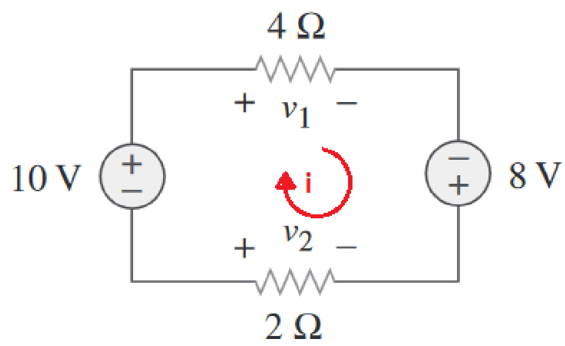


Figura 2.2: Utilización de la ley de voltaje de kirchhoff para resolver el circuito.

Sustituyendo:

$$-18V + V_1 - V_2 = 0$$

$$-18V + 4i - (-2i) = 0$$

$$-18V + 6i = 0$$

lo que obtenemos como i

$$i = \frac{18}{6} = 3A$$

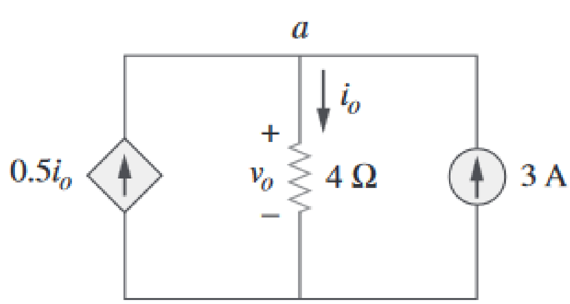


Figura 2.3: Utilización de las leyes de kirchhoff para resolver el circuito

Aplicando la LCK e el nodo a:

$$0.5i_0 - i_0 + 3A = 0$$

$$(0.5 - 1)i_0 + 3A = 0$$
$$-0.5i_0 + 3A = 0$$
$$-0.5i_0 = -3A$$
$$i_0 = \frac{-3A}{-0.5\Omega}$$

$$i_0 = 6A$$

Aplicando ley de Ohm:

$$V_0 = (4\Omega)i_0$$
$$V_0 = (4\Omega)(6A)$$

$$V_0 = 24V$$

Ejemplo 3:

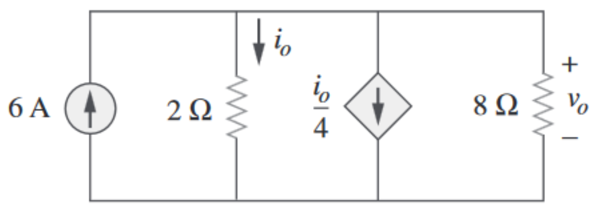


Figura 2.4: Cálculo de los valores de V_0 e i_0 en el circuito mostrado.

Aplicando la LCK con convección entra (+):

$$6A - i_0 - \frac{i_0}{4} + i_x = 0$$

$$i_= - \frac{V_0}{8}$$

$$6A - i_0 - \frac{i_0}{4} - \frac{V_0}{8} = 0$$

$$\frac{5}{4}i_0 + \frac{V_0}{8} = 6A \tag{2.7}$$

Recordado que el voltaje de 2 nodos es el mismo. para todos los elementos conectados en dichos nodos y alicando ley de Ohm.

$$V_0 = i_0(2\Omega)$$

$$\frac{5}{4}i_0 + \frac{2\Omega}{8\Omega}i_0 = 6A$$

$$i_0 = 4A$$

$$V_0 = (2\Omega)i_0$$

$$V_0 = (4A)2\Omega$$

$$V_0 = 8V$$

2.3.1. Divisor de voltaje y corriente.

La necesidad de combinar resistores en serie o en paralelo es tan frecuente que justifica especial atención. Un divisor de tensión es una configuración de circuito eléctrico que reparte la tensión de una fuente entre una o más impedancias conectadas en serie. el divisor de voltaje o tensión se puede expresar como:

$$V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_T.....V_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}V_T$$

Así para n resistencias conectadas en serie:

$$V_n = \frac{R_n}{R_1 + R_2 + ...R_n}$$

La resistencia equivalente en serie se denota con la formula:

$$R_{equi} = R_1 + R_2 + R_3 + ...R_n$$

Un divisor de corriente es una configuración presente en circuitos eléctricos que puede fragmentar la corriente eléctrica de una fuente entre diferentes resistencias o impedancias conectadas en paralelo.

se establece como:

$$i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i .....i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i$$

Asi para n resistencias conectadas en paralelo:

$$i_n = \frac{G_n}{G_1 + G_2 + G_3 + ...G_n} i$$

Donde G es impedancia o sea:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} ......G_2 = \frac{1}{R_2}$$

Resistencia equivalente en paralelo:

$$\frac{1}{R_{eq_p}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ...\frac{1}{R_n}$$

2.3.2. Resistencia equivalente

Cuando en un circuito hay varias resistencias conectadas, resulta útil para calcular las corrientes que pasan por el circuito y las caídas de tensión que se producen, encontrar una resistencia que pueda sustituir a otras, de forma que el comportamiento del resto del circuito sea el mismo. Esta resistencia equivalente, se sabe que existe, y para configuraciones en que las resistencias a sustituir están en paralelo o en serie, son fáciles de calcular como verás en las próximas secciones.

- La **resistencia equivalente** de cualquier número de resistores conectados en **serie** es la suma de las resistencias individuales.

- La **resistencia equivalente** de dos resistores en **paralelo** es igual al producto de sus resistencias dividido entre su suma.

La resistencia de 6Ω esta en paralelo con la de 3Ω :

$$6\Omega || 3\Omega = \frac{(6\Omega)(3\Omega)}{6\Omega + 3\Omega} = 2\Omega$$

Observando 1Ω y 5Ω estan en serie:

$$1\Omega + 5\Omega = 6\Omega$$

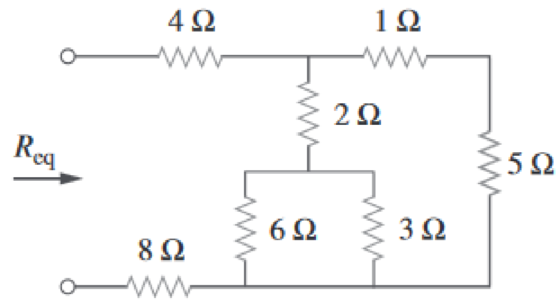


Figura 2.5: Resistencia equivalente del circuito mostrado.

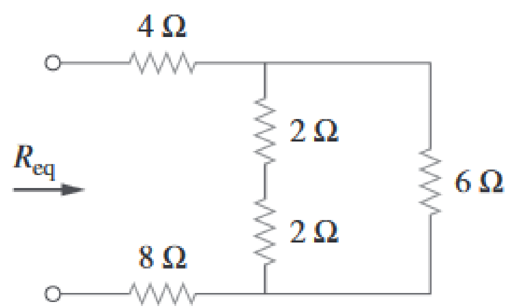


Figura 2.6: Resistencia equivalente.

obtenemos como circuito el siguiente:

Analizando el circuito os damos cuenta de que las dos resistencias de 2Ω estan en serie:

$$2\Omega + 2\Omega = 4\Omega$$

Y esta a su vez esta en paralelo con la de 6Ω por lo tanto obtenemos:

$$6\Omega||4\Omega = \frac{(6\Omega)(4\Omega)}{6\Omega + 4\Omega} = 2.4\Omega$$

Por ultimo obtenemos un circuito simple:

Y observamos que las resistencias están en serie lo que da por:

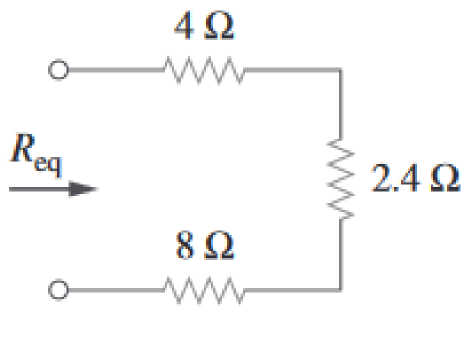


Figura 2.7: Resistencia equivalente.

$$R_{equi} = 4\Omega + 8\Omega + 2.4\Omega$$

$$R_{equi} = 14.4\Omega$$

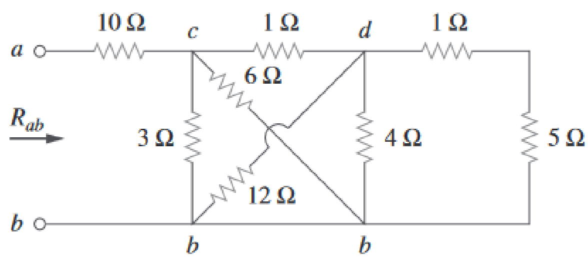


Figura 2.8: Resistencia equivalente del circuito mostrado.

las resistencias de 3Ω y 6 Ω están en paralelo ya que están unidos a los mismos nodos b y c por lo que obtenemos:

$$3\Omega||6\Omega = \frac{(6\Omega)(3\Omega)}{6\Omega + 3\Omega} = 2\Omega$$

De igual manera los resistores de 4Ω y 12Ω estan en paralelo por estar en los mismos nodos:

$$4\Omega||12\Omega = \frac{(4\Omega)(12\Omega)}{4\Omega + 12\Omega} = 3\Omega$$

Así mismo la resistencia de 1Ω y la de 5Ω están en serie y obtenemos:

$$1\Omega + 5\Omega = 6\Omega$$

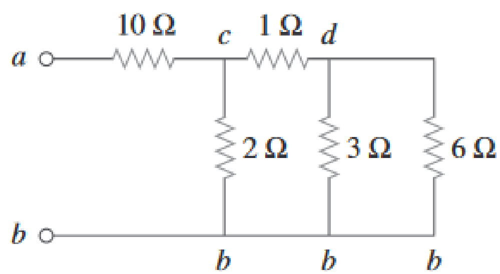


Figura 2.9: Resistencia equivalente del circuito mostrado.

Reduciendo el circuito podemos ver que la configuración de 6Ω y 3Ω en paralelo es 2Ω

$$6\Omega || 3\Omega = 2\Omega$$

Y al estar la resistencia de 1Ω en serie da como resultado 3Ω.

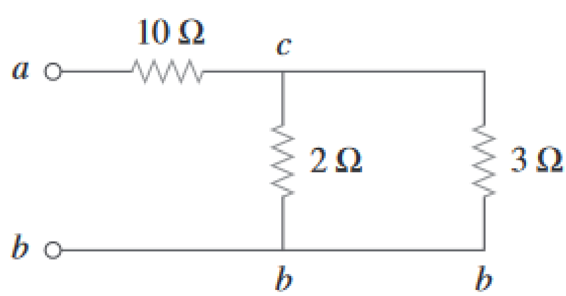


Figura 2.10: Resistencia equivalente del circuito mostrado.

La configuración de 2Ω y 3Ω en paralelo es:

$$3\Omega || 2\Omega = \frac{(2\Omega)(3\Omega)}{2\Omega + 3\Omega} = 1.2\Omega$$

Por ultimo la resistencia de 1.2Ω esta en serie con la de 10Ω lo cual obtenemos:

$$R_{equi} = 10 + 1.2 = 11.2\Omega$$

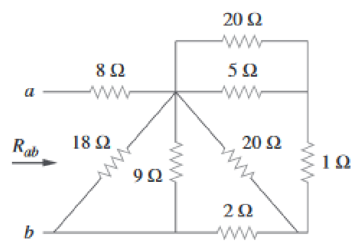


Figura 2.11: Resistencia equivalente del circuito mostrado.

Al vizualizar el circuito podemos observar que la reistencia de 20Ω esta en parallelo con la de 5Ω y obtenemos:

$$20\Omega||5\Omega = \frac{(20\Omega)(5\Omega)}{20\Omega + 5\Omega} = 4\Omega$$

Y la resistencia resultante de 4Ω esta en serie con la resistencia de 1Ω por lo que da 5Ω

$$4\Omega + 1\Omega = 5\Omega$$

5Ω esta en paralelo con 20Ω y este resultado es 4Ω.

$$\frac{(20\Omega)(5\Omega)}{20\Omega + 5\Omega} = 4\Omega$$

4Ω esta en serie con 2Ω por lo que da 6Ω.

$$4\Omega + 2\Omega = 6\Omega$$

6Ω esta en paralelo con 9Ω y este resultado es 3.6Ω.

$$\frac{(9\Omega)(6\Omega)}{9\Omega + 6\Omega} = 3.6\Omega$$

y esta resistencia esta en paralelo con la de 18Ω

$$\frac{(18\Omega)(3.6\Omega)}{18\Omega + 3.6\Omega} = 3\Omega$$

Por ultimo la resistencia de 3Ω esta en serie con 8Ω por lo que da como 11Ω

$$R_{equi} = 11 + 3 = 11\Omega$$

2.4. Nodos, Ramas y Lazos

Los elementos básicos de un circuito pueden interconectarse en diversas formas y por tanto es necesario entender algunos conceptos básicos.

Rama: representa simplemente un elemento tal como una fuente de voltaje o resistor.

Nodo: es el punto de conexión entre 2 o mas ramas.

Lazo: es cualquier trayectoria cerrada en un circuito.

Una red con b ramas, n nodos y l lazos independientes satisface el teorema fundamental de topología de redes.

$$b = l + (n - 1) \tag{2.8}$$

$$l = b - (n + 1) \tag{2.9}$$

Capítulo 3

Métodos de Nodos y de Mallas

3.1. Método de nodos

Proporciona un método general para analizar circuitos empleando los voltajes de los nodos como variables del circuito. Al elegir los voltajes individuales, se reduce el número de ecuaciones simultaneas a resolver.

3.1.1. Pasos para el método de nodos:

A continuación se indican los pasos que deben seguirse para utilizar el método de Nodos en la solución de Circuitos Eléctricos.

1. Elegir el nodo de referencia.
2. Se asignan los voltajes de nodo: $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$.
3. Aplicar LCK en cada $n-1$ nodos. (a excepción de la referencia).
4. Se expresan las corrientes en términos de los voltajes de los nodos (Ley de Ohm).
5. Se resuelven las $n-1$ ecuaciones simultáneas.

$$i = \frac{(V_H - V_L)}{R}$$

Ejemplo:

El nodo 0 es el nodo de referencia. Se utiliza la convencion si entra es positivo.

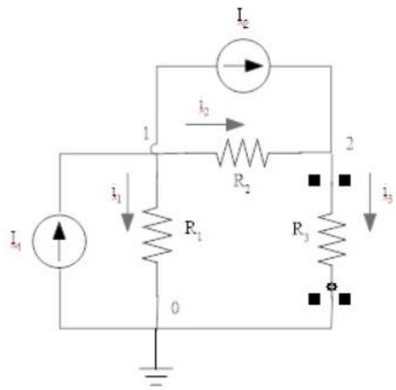


Figura 3.1: Ejemplo 1.

Nodo 1:

$$I_1 - i_2 - i_1 - I_2 = 0$$

Nodo 2:

$$i_2 - i_3 + I_2 = 0$$

Por ley de Ohm:

$$i_1 = \frac{(V_1 - 0)}{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$
$$i_2 = \frac{(V_1 - V_2)}{R_2}$$
$$i_3 = \frac{(V_2 - 0)}{R_3} = \frac{V_2}{R_3}$$

Ejercicio: Calcular los voltajes de nodos.

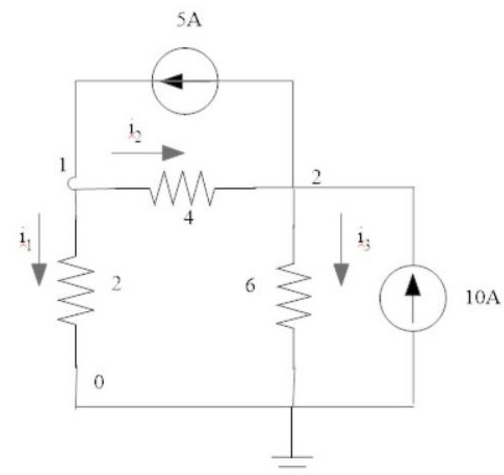


Figura 3.2: Ejercicio 1.

El nodo 0 es el nodo de referencia. Se utiliza la convencion si entra es positivo.

Nodo 1:

$$5A - i_1 - i_2 = 0 ... i_1 + i_2 = 5A$$

Nodo 2:

$$i_2 - i_3 + 10A - 5A = 0 ... - i_2 + i_3 = 5A$$

Por ley de Ohm:

$$i_1 = \frac{(V_1 - 0)}{2\Omega} = \frac{V_1}{2\Omega}$$
$$i_2 = \frac{(V_1 - V_2)}{4\Omega}$$
$$i_3 = \frac{(V_2 - 0)}{6\Omega} = \frac{V_2}{6\Omega}$$

Ahora, se expresan las corrientes en terminos de los voltajes de los nodos.

$$[\frac{V_1}{2\Omega} + \frac{(V_1 - V_2)}{4\Omega} = 5A](4\Omega)$$

Se multiplica por 4 para simplificar la ecuación.

$$3V_1 - V_2 = 20v$$

Se repite para el nodo 2.

$$[\frac{-(V_1 - V_2)}{4\Omega} + \frac{V_2}{6\Omega} = 5A](12\Omega)$$

$$-3(V_1 - V_2) + 2V_2 = 60v$$

$$-3V_1 + 5V_2 = 60v$$

Ya que son ecuaciones con las mismas variables se aplican ecuaciones simultáneas (V_1 y V_2).

$$4V_2 = 80v...$$
$$V_2 = 20V$$

Se sustituye el voltaje obtenido en la ecuación anterior, en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener V_1.

$$-3(V_1) + 5(20v) = 60v$$
$$3(V_1) = 100v - 60v$$

$$3V_1 \;=\; 40V...V_2 = 13.3V$$

Ya que se obtuvieron los voltajes, con estos mismos se obtienen las corrientes.

$$i_1 = \frac{13.3v}{2\Omega} = \boxed{6.6\text{A}}$$
$$i_2 = \frac{(13.3v - 20v)}{4\Omega} = \boxed{-1.6\text{A}}$$
$$i_3 = \frac{20v}{6\Omega} = \boxed{3.3\text{A}}$$

*Como dio negativa la segunda corriente, nos damos cuenta que teníamos mal planteada la dirección de i_2.

Ejercicio: Calcular los voltajes de nodo en el circuito siguiente.

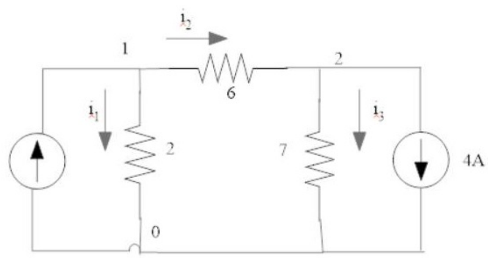


Figura 3.3: Ejercicio 2.

El nodo 0 es el nodo de referencia. Se utiliza la convencion: si entra es positivo.

Nodo 1:

$$-i_1 - i_2 + 1A = 0 ... i_1 + i_2 = 1A$$

Nodo 2:

$$i_2 - i_3 - 4A = 0 ... - i_2 - i_3 = 4A$$

Por ley de Ohm:

$$i_1 = \frac{(V_1 - 0)}{2\Omega} = \frac{V_1}{2\Omega}$$
$$i_2 = \frac{(V_1 - V_2)}{6\Omega}$$

$$i_3 = \frac{(V_2 - 0)}{7\Omega} = \frac{V_2}{7\Omega}$$

Ahora, se expresan las corrientes en terminos de los voltajes de los nodos.

$$[\frac{V_1}{2\Omega} + \frac{(V_1 - V_2)}{6\Omega} = 1A](6\Omega)$$
$$4V_1 - V_2 = 6v$$

Se repite para el nodo 2.

$$[\frac{(V_1 - V_2)}{6\Omega} + \frac{V_2}{7\Omega} = 4A](42\Omega)$$

$$7V_1 - 7V_2 - 6V_2 = 168v$$

$$7V_1 - 13V_2 = 168v$$

Ya que son ecuaciones con las mismas variables se aplican ecuaciones simultáneas.

$$7V_1 - 13V_2 = 168V$$
$$-(4V_1 - V_2 = 6V)(13)$$

$$\begin{array}{rcl} ... - 45V_1 & = & 90V... \\ V_1 & =- & 2V \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{rcl} ...4(-2V) - V_2 & = & 6v... \\ V_2 & = & -14v \end{array}$$

Ejercicio:

Calcular los voltajes de nodo en el circuito siguiente.
El nodo 0 es el nodo de referencia. Se utiliza la convención: si entra es positivo. LCK en cada nodo.

Nodo 1:

$$4A - i_1 - i_2 - i_3 = 0...i_1 + i_2 + i_3 = 4A$$

Nodo 2:

$$-i_4 + i_2 - 4A + 10A - (-2A) = 0... - i_2 + i_4 = 8A$$

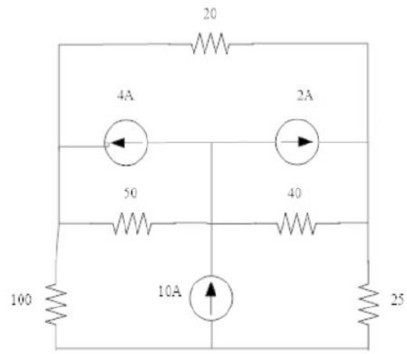


Figura 3.4: Ejercicio 3.

Nodo 3:

$$i_1 - i_5 + i_4 + (-2A) = 0...i_1 - i_5 + i_4 = 2A$$

Por ley de Ohm:

$$i_1 = \frac{(V_1 - V_3)}{20\Omega}$$

$$i_2 = \frac{(V_1 - V_2)}{50\Omega}$$

$$i_3 = \frac{(V_1)}{100\Omega}$$

$$i_4 = \frac{(V_2 - V_3)}{40\Omega}$$

$$i_5 = \frac{(V_3)}{25\Omega}$$

Ahora, se expresan las corrientes en terminos de los voltajes de los nodos.

$$[\frac{(V_1 - V_3)}{20\Omega} + \frac{(V_1 - V_2)}{50\Omega} + \frac{(V_1)}{100\Omega} = 4A](100\Omega)$$

$$5(V_1 - V_3) + 2(V_1 - V_2) + V_1 = 400v$$
$$8V_1 - 2V_2 - 5V_3 = 400v$$

$$[-\frac{(V_1 - V_2)}{50\Omega} + \frac{(V_2 - V_3)}{40\Omega} = 8A](200\Omega)$$

$$-4(V_1 - V_2) + 5(V_2 - V_3) = 1600v$$
$$-4V_1 + 9V_2 - 5V_3 = 1600v$$

$$[\frac{(V_1 - V_3)}{20\Omega} + \frac{(V_2 - V_3)}{40\Omega} - \frac{V_3}{25\Omega} = 2A](200\Omega)$$
$$10(V_1 - V_3) + 5(V_2 - V_3) - 8V_3 = 400v$$
$$10V_1 + 5V_2 - 23V_3 = 400v$$

$$\begin{pmatrix} 400 \\ 1600 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -5 \\ -4 & 9 & -5 \\ 10 & 5 & -23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Por lo tanto:

$$V_1 = 264.3V$$

$$V_2 = 397.42V$$

$$V_3 = -196.78$$

Ejercicio: Calcular el valor de la resistencia equivalente utilizando el método de nodos, todas las resistencias valen R.

El nodo 0 es el nodo de referencia. Se utiliza la convención: si entra es positivo. LCK en cada nodo.

Nodo 1:

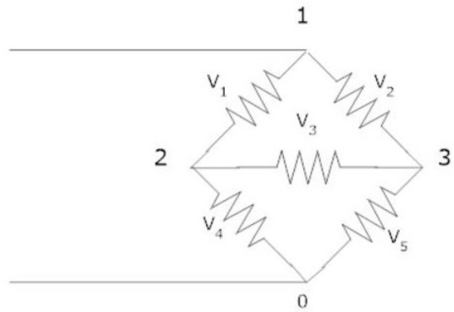


Figura 3.5: Ejercicio 4.

$$I - i_1 - i_2 = 0$$

Nodo 2:

$$i_1 - i_3 - i_4 = 0$$

Nodo 3:

$$i_2 + i_3 - i_5 = 0$$

Por ley de Ohm:

$$i_1 = \frac{(V_1 - V_2)}{R}$$
$$i_2 = \frac{(V_1 - V_3)}{R}$$
$$i_3 = \frac{(V_2 - V_3)}{R}$$
$$i_4 = \frac{(V_2)}{R}$$
$$i_5 = \frac{(V_3)}{R}$$

Ahora, se expresan las corrientes en terminos de los voltajes de los nodos.

$$[\frac{(V_1 - V_2)}{R} + \frac{(V_1 - V_3)}{R} = I](R)$$

$$2V_1 - V_2 - V_3 = (I)(R)$$

$$[-\frac{(V_1-V_2)}{R}-\frac{(V_2-V_3)}{R}-\frac{V_2}{R}=0]$$

$$(\frac{1}{R})[V_1-3V_2+V_3]=0$$

$$\frac{(V_1-V_3)}{R}+\frac{(V_2-V_3)}{R}-\frac{V_3}{R}=0$$

$$(\frac{1}{R})[V_1-3V_3+V_2]=0$$

$$\begin{pmatrix} RI \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

$$\boxed{\text{determinante=8}}$$

$$V_1=\begin{matrix} RI & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{matrix}$$

$$(R)(I)\frac{[(-3)(-3)-(1)(1)]}{8}$$

$$\begin{aligned} V_1 &= (R)(I)... \\ R_{eq} &= \tfrac{V_1}{I} \\ &= R \end{aligned}$$

3.1.2. Supernodo

Para este caso las fuentes de voltaje que se conectan entre un par de nodos, hacen que estas terminales se conviertan en lo que se denomina un ”supernodoz a la ecuación entre estos dos nodos está dada por el voltaje de la fuente conectada entre ellos.

Ejemplo:

Nodo 1:

$$3A-i_1-i_2=0$$

$$i_1+i_2=3A$$

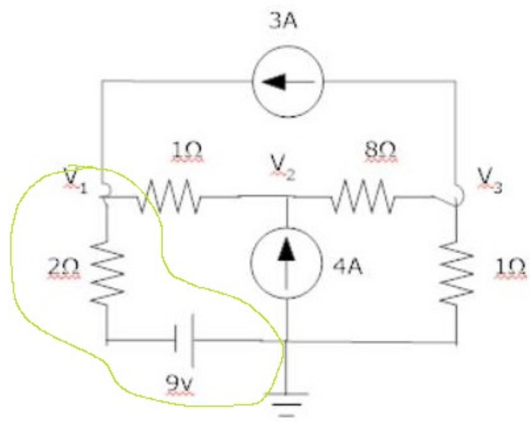


Figura 3.6: Ejercicio 1.

LVK en el supernodo:

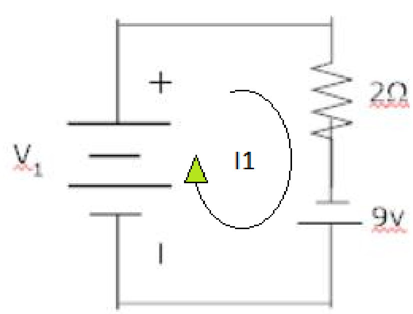


Figura 3.7: Supernodo.

$$-V_1 + i(2\Omega) - 9v = 0$$
$$i(2\Omega) = V_1 + 9v$$
$$i_2 = \frac{(V_1 + 9v)}{2\Omega}$$
$$i = i_2$$

Nodo 2:

$$i_1 - i_3 + 4A = 0$$
$$-i_1 + i_3 = 4A$$

Nodo 3:

$$i_3 - i_4 - 3A = 0$$
$$i_3 - i_4 = 3A$$

Ahora, se expresan las corrientes en terminos de los voltajes de los nodos.

$$[\frac{(V_1 - V_2)}{1\Omega} + \frac{(V_1 + 9v)}{2\Omega} = 3A](2\Omega)$$
$$2(V_1 - V_2) + V_1 + 9A = 6A$$
$$3V_1 - 2V_2 = -3A$$

$$[-\frac{(V_1 - V_2)}{1\Omega} + \frac{(V_2 - V_3)}{8\Omega} = 4A](8\Omega)$$
$$8(V_1 - V_2) + V_2 - V_3 = 32A$$
$$-8V_1 + 9V_2 - V_3 = 32A$$

$$[\frac{(V_2 - V_3)}{8\Omega} - \frac{(V_3)}{1\Omega} = 3A](8\Omega)$$
$$(V_2 - V_3) - 8V_3 = 24A$$
$$V_2 - 9V_3 = 24A$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 32 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 3 & -2 & 0 \\ = & -8 & 9 & -1 \\ & 0 & 1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

3.2. Método de mallas

El método de analisis de mallas es muy utilizado para resolver circuitos resistivos (circuitos con solo resistencias) lineales (este metodo, un poco mas ampliado, se aplica a tambien a circuitos resistivos reactivos). Resolver en este caso significa obtener los valores que tienen las corrientes en todas las resistencias que haya en el circuito.

Otro procedimiento general para analizar circuitos utilizando corrientes como las variables desconocidas del circuito.
En este metodo se <u>buscan corrientes</u>, ya que en el de nodos se <u>buscaban voltajes</u>.

Un lazo cerrado no pasa mas de una vez por un nodo.

Malla: Es un lazo que no tiene lazos internos.

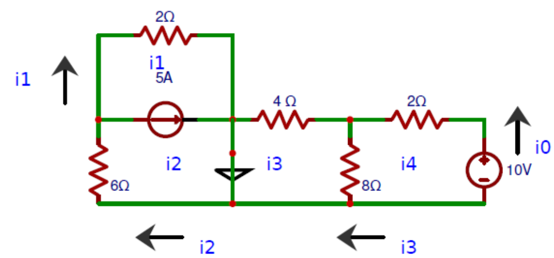


Figura 3.8: Malla 1.

Pasos para determinar las corrientes de malla

1.- Se asignan las corrientes de mallas $i_1, i_2, ..., i_n$ a las n malllas.

2.- Se aplica LVK a cada una de las n mallas. Se utiliza Ley de Ohm para expresar voltajes.

3.- Se resuelven las n ecuaciones simultaneas resultantes para conseguir las corrientes de malla.

Ejemplo: Calcular $i_1 e i2$ en el circuito siguiente.

CIRCUITO

CIRCUITO

CIRCUITO

Paso 1.- Ya se muestran las direcciones de $i_1 e i_2$, es conveniente utilizar por facilidad la direccion en el sentido en que giran las manecillas del reloj.

Paso 2.- Se aplica LVK a cada malla.

Del circuito anterior...

Aplicando LVK en malla 1

$$-V_1 + R_1 * i_1 + R_3 * i_1 - R_3 * i_2 = 0$$

$$-V_1 + R_1 * i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

Aplicando LVK en malla 2

$$V_1 + R_3 * i_2 - R_3 * i_1 + R_2 * i_2 = 0$$

$$V_2 + (R_2 + R_3) * i_2 - R_3 * i_1 = 0$$

$$R_3 * i_1 + (R_2 + R_3) * i_2 = -V_2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Problema: Calcule el valor de V_0 utilizando el método de mallas.

Aplicando LVK en malla 1

$$10V + 2K\Omega * i_1 + 3K\Omega * i_1 + 4K\Omega * i_1 - 4K\Omega * i_2$$

$$3K\Omega * i_1 - 3K\Omega * i_3 + 8V = 0$$

$$12K\Omega * i_1 - 4K\Omega * i_2 - 3K\Omega * i_3 = 2V \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

Aplicando LVK en malla 2

$$4K\Omega * i_1 + (6K\Omega + 4K\Omega + 4K\Omega) * i_2 - 6K\Omega * i_3 - 12V$$

$$4K\Omega * i_1 + 14K\Omega * i_2 - 6K\Omega * i_3 = 12V \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$

Aplicando LVK en malla 3

$$-8V - 3K\Omega * i_1 - K\Omega * i_2 + (3K\Omega + 6K\Omega + 6K\Omega)i_3 = 0$$

$$-3K\Omega * i_1 - 6K\Omega * i_2 + 15K\Omega * i_3 = 8V \quad \longrightarrow \quad \mathbf{3}$$

$$\begin{pmatrix} 2V \\ 12V \\ 8V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12K\Omega & -4K\Omega & -3K\Omega \\ -4K\Omega & 14K\Omega & -6K\Omega \\ -3K\Omega & -6K\Omega & 15K\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{Determinante\ :}1.578x10^{12}$$

$$i_1 = 1.483mA$$

$$i_2 = 1.8251mA$$

$$i_3 = 1.493mA$$

$$V_0 = (1.493mA)(6K\Omega) = \underline{8.95V}$$

Análisis de mallas con fuentes de corriente

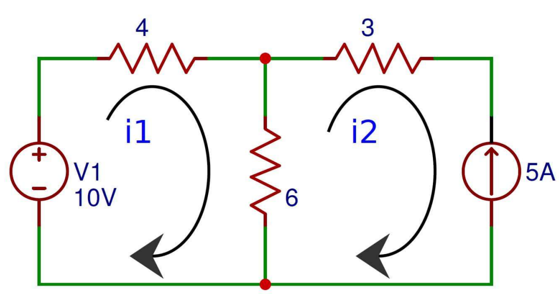


Figura 3.9

Aplicando LVK en malla 1

$$-10V + (4\Omega + 6\Omega)i_1 - 6\Omega * i_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

Aplicando LVK en malla 2

$$i_2 = -5A \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$

Sustituir ecuación **2 en 1**

$$10\Omega * i_1 - 6\Omega(-5A) = 10V$$

$$10\Omega * i_1 + 30V = 10V$$

$$\underline{i_1 = -2A}$$

Cuando existe una fuente de corriente entre dos mallas se crea una **supermalla**

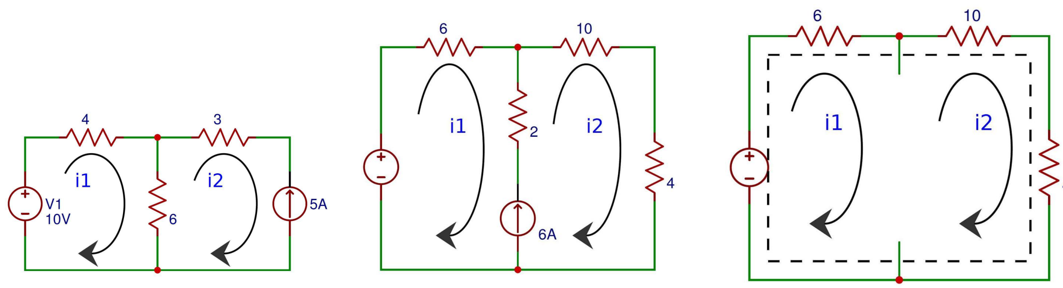


Figura 3.10

Como se excluyen las fuentes de enmedio se usa LVK en malla **1**

$$-20V - (6\Omega + 2\Omega) * i_1 - 2\Omega * i_2 + V_{F_I} = 0$$

LVK en malla **2**

$$-V_{F_I} - 2\Omega * i_1 + (2\Omega + 10\Omega + 4\Omega)i_2 = 0$$

$$Como\ no\ se\ conoce\ la\ variable\ V_{F_I}$$

$$\underline{Aplicando\ LVK\ en\ "supermalla"}$$

$$-20V + 6\Omega * i_1 + (10\Omega + 4\Omega) - i_2 = 0$$

$$6\Omega * i_1 + 14\Omega * i_2 = 20V \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

Se utiliza LCK en la rama excluida

Convención entra positivo

$$i_1 - i_2 + 6A = 0$$

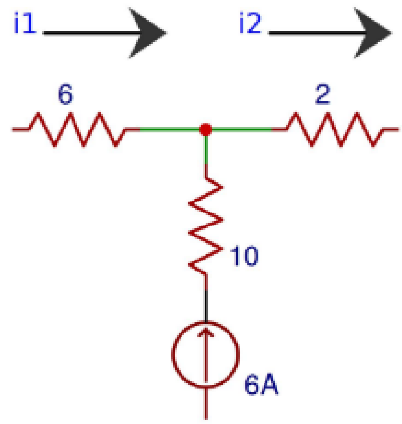


Figura 3.11

$$1\Omega * [i_1 - i_2 = -6A] \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$
$$1\Omega * i_1 - 1\Omega * i_2 = -6V \quad \longrightarrow \quad \mathbf{3}$$

$$\underline{Poner\ ecuacion\ 2\ y\ 3}$$

$$6\Omega * i_1 + 14\Omega * i_2 = 20V$$
$$(-6) * [1\Omega * i_1 - 1\Omega * i_2 = -6V]$$

$$0 + 20\Omega * i_2 = 50V$$

$$i_2 = \frac{56V}{20\Omega} \quad \longrightarrow$$
$$\underline{i_2 = 2.8A}$$

Por lo tanto, para tener i_1 se hace:

$$i_1 = i_2 - 6A$$

$$i_1 = (2.8 - 6)A$$

i_1=-3.2A

Super Malla

Esta herramienta es utilizada al tener una fuente de corriente compartida.

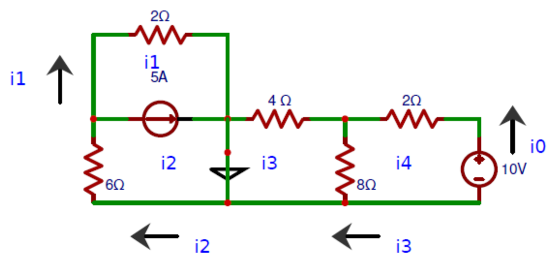


Figura 3.12

Ejercicio 1.-

$$-8_{\Omega} * i_3 + (8_{\Omega} + 2_{\Omega}) * i_4 + 10v = 0$$

$$-8_{\Omega} * i_3 + (10_{\Omega}) * i_4 = -10v \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

Aplicando LVK a la super malla

$$2_{\Omega} * i_1 + (6_{\Omega}) * i_2 + (4_{\Omega} + 8_{\Omega}) * i_3 - 8_{\Omega} * i_4 = 0$$

$$2_{\Omega} * i_1 + (6_{\Omega}) * i_2 + 12_{\Omega} * i_3 - 8_{\Omega} * i_4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$

Obtenemos las ecuaciones de enlace aplicando LCK en nodo (P y Q) de la rama con fuente compartida.

***P**

$$-i_1 + i_2 - 5A = 0$$

$$-i_1 + i_2 = 5A \quad \longrightarrow \quad \mathbf{3}$$

$$(-i_1 + i_2 - 5A = 0) * \frac{1}{\Omega}$$

$$-1_{\Omega} * i_1 + 1_{\Omega} * i_2 + 0_{\Omega} * i_3 + +0_{\Omega} * i_4 = 5v \quad \longrightarrow \quad \mathbf{4}$$

$$(-i_2 + i_3 + 3i_0 = 0) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{5}$$

Se observa que.-

$$i_0 = -i_6) \quad \longrightarrow \quad \mathbf{5}$$

***Q**

$$-i_2 + i_3 + 3(-i_4) = 0$$

$$(-i_2 + i_3 + 3i_4 = 0) * \frac{1}{\Omega}$$

$$0_{\Omega} * i_1 - 1_{\Omega} * i_2 + 1_{\Omega} * i_3 - 3_{\Omega} * i_4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{7}$$

Acomodando las ecuaciones 1,2,4 y 7 ,para proceder a calcular las corrientes .

$$-8_{\Omega} * i_3 + (10_{\Omega}) * i_4 = -10v \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

$$2_{\Omega} * i_1 + (6_{\Omega}) * i_2 + 12_{\Omega} * i_3 - 8_{\Omega} * i_4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$

$$-1_{\Omega} * i_1 + 1_{\Omega} * i_2 + 0_{\Omega} * i_3 + +0_{\Omega} * i_4 = 5v \quad \longrightarrow \quad \mathbf{4}$$

$$0_{\Omega} * i_1 - 1_{\Omega} * i_2 + 1_{\Omega} * i_3 - 3_{\Omega} * i_4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{7}$$

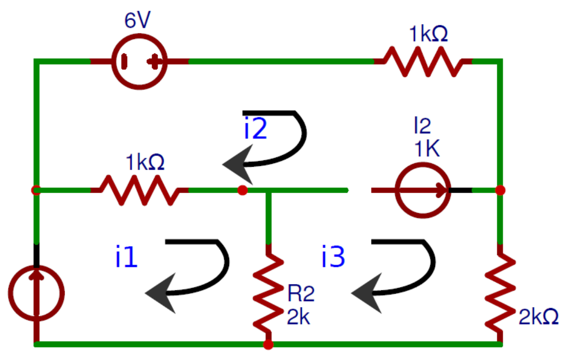


Figura 3.13

Ejercicio 2.-
Aplicando LCK para obtener las ecuaciones de enlace en la Super Malla.

$$-i_2 + i_3 = 4mA \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

$$i_1 = 2mA \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$

$$-3k_{\Omega} * i_1 + 2k_{\Omega} * i_2 + 4k_{\Omega} * i_3 = 6v$$

$$1k_{\Omega} * i_2 + 2k_{\Omega} * i_3 + 2k_{\Omega} * i_3 - 2k_{\Omega} * i_1 + 1k_{\Omega} * i_2 - 1k_{\Omega} * i_1 = 6v \quad \longrightarrow \quad \mathbf{3}$$

Sustituyendo 2 en 3.

$$2k_{\Omega} * i_2 + 4k_{\Omega} * i_3 = 12v \quad \longrightarrow \quad \mathbf{4}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones con 1 y 4.

$$[-i_2 + i_3 = 4mA](2k_{\Omega})$$

$$-2k_{\Omega} * i_2 + 2k_{\Omega} * i_3 = 8v$$

$$2k_{\Omega} * i_2 + 4k_{\Omega} * i_3 = 12v$$

$$\begin{pmatrix} 12V \\ 8V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2K\Omega & 2K\Omega \\ 4K\Omega & 2K\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ i_3 \end{pmatrix}$$

$$i_1 = 2mA$$

$$i_2 = -0.67mA$$

$$i_3 = 3.33mA$$

Metodo de Inspección

Ejercicio 1.-
Aplicando LCK en: Nodo 1. convención, entra positivo.

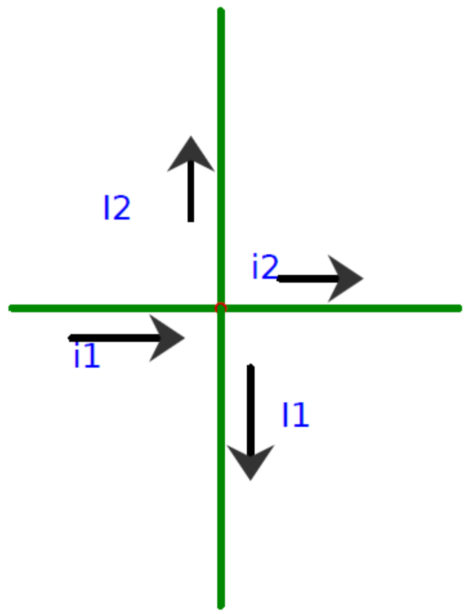


Figura 3.14

$$i_1 + i_2 = I_1 - I_2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{1}$$

Nodo 2.

$$i_2 - i_3 = -I_2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{2}$$

Aplicando Ley de Ohm.

$$i_1 = G_1 V_1 = \frac{1}{R_1 V_1} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{3}$$

$$i_2 = G_2(V_1 - V_2) = \frac{1}{R_2(V_1 - V_2)} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{4}$$

$$i_3 = G_3 V_2 = \frac{1}{R_3 V_2} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{5}$$

Agregando 3 y 4 en 1.

$$G_1 V_1 + G_2(V_1 - V_2) = I_1 - I_2$$

$$(G_1 + G_2)V_1 - G_2 - V_2) = I_1 - I_2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{6}$$

Agregando 4 y 5 en 2.

$$G_2(V_1 - V_2) - G_3 V_2 = -I_2$$

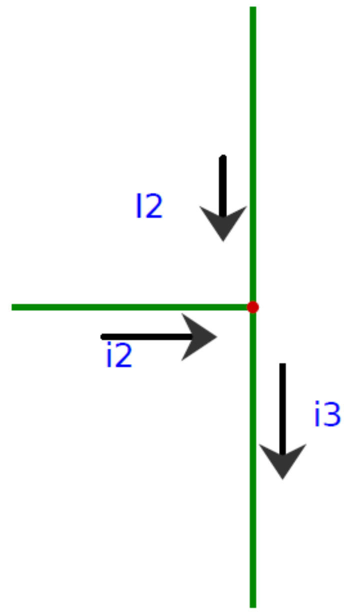


Figura 3.15

$$G_2 - V_1 - (G_3 + G_2)V_2 -) = -I_2$$
$$-G_2 - V_1 + (G_3 + G_2)V_2 -) = -I_2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{7}$$

Se puede visulaizar que

$$\begin{pmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 + G_2(sumaderamasenelnodo) & -G_2(compartido) \\ -G_2(compartido) & G_2 + G_3(sumaderamasenelnodo) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 nodo1 \\ v_2 nodo2 \end{pmatrix}$$

Matriz que se pudo ver obtenido por simple inspeccion demostrado anteriormente.

Ejercicio 2.-

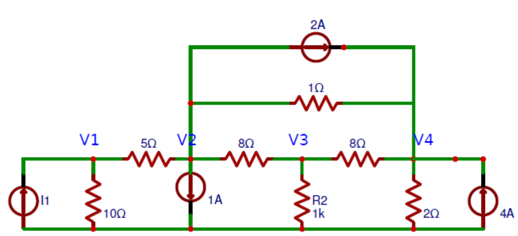


Figura 3.16

Por metodo de inspeccion obtenemos]

$$\begin{pmatrix} 30A \\ -120A \\ 0 \\ 48A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3_\Omega & -2_\Omega & 0_\Omega & 0_\Omega \\ -8_\Omega & 53_\Omega & -5_\Omega & -40_\Omega \\ 0_\Omega & -1_\Omega & 4_\Omega & -1_\Omega \\ 0_\Omega & -8_\Omega & -1_\Omega & 13_\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Matriz que se pudo ver obtenido por simple inspeccion demostrado anteriormente.
Ejercicio 3.-

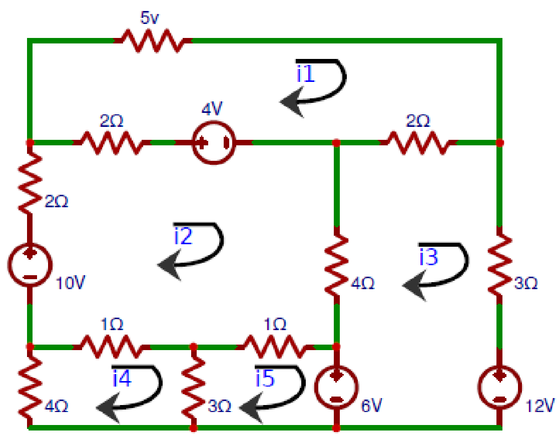


Figura 3.17

Por metodo de inspección obtenemos]

$$\begin{pmatrix} 4V \\ 6V \\ -6V \\ 0 \\ -6V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9_\Omega & -2_\Omega & -2_\Omega & 0_\Omega & 0_\Omega \\ -2_\Omega & 10_\Omega & -4_\Omega & -1_\Omega & -1_\Omega \\ -2_\Omega & -4_\Omega & 9_\Omega & 0_\Omega & 0_\Omega \\ 0_\Omega & -1_\Omega & 0_\Omega & 8_\Omega & -3_\Omega \\ 0_\Omega & -1_\Omega & 0_\Omega & -3_\Omega & 4_\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{pmatrix}$$

Capítulo 4

Teoremas de Circuitos:

4.1. Transformación de fuentes

Un teorema muy importante para la resolución y simplificación de circuitos eléctricos es la transformación de fuentes. Una *transformación de fuentes* es el proceso de reemplazar una fuente de voltaje $\boldsymbol{Vs}$ en serie con un resistor $\boldsymbol{R}$ por una fuente de corriente $\boldsymbol{Is}$ en paralelo con el mismo resistor $\boldsymbol{R}$ en paralelo o viceversa.

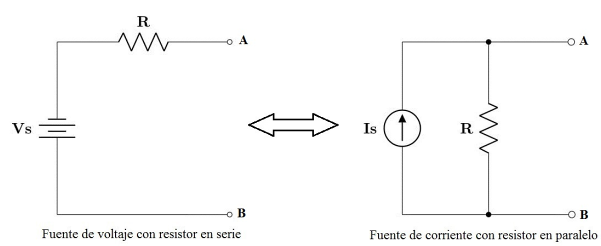


Figura 4.1: Transformación de fuentes independientes.

Para que el principio se cumpla, la relación de voltaje y corriente entre las terminales (A,B) debe ser la misma, lo que las vuelve equivalentes. Podemos comprobar dicha relación porque al momento de apagar las fuentes la resistencia entre A-B será R para ambos circuitos.
Entonces se debe de cumplir que:

$$\boxed{Vs = Is \cdot R} \; \boxed{Is = \frac{Vs}{R}}$$

Hay dos condiciones importantes que se tienen que tener en cuenta:

·Al transformar una fuente de voltaje, la felcha de la corriente debe apuntar hacia el lado positivo de dicha fuente de voltaje.

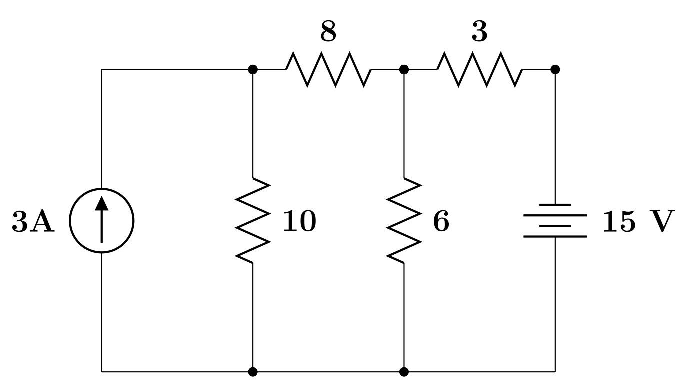
·Cuando se analizan fuentes de voltaje y corriente ideales la transformación no es posible, pues se indefinen las ecuaciones.

Esta transformación no afecta al resto del circuito que está conectado en las terminales A-B, por lo que resulta una herramienta eficaz para manipular circuitos y analizarlos más fácilmente en las situaciones cuando es aplicable. También se puede utilizar para reducir fuentes dependientes, sin embargo se tiene que tener especial cuidado con la variable dependiente. En el análisis de circuitos, nos encontramos con que la transformación de fuentes tiene aplicaciones especiales en situaciones que se describen en otros teoremas de circuitos, los teoremas de ***Thévenin y Norton***.

Partiendo del principio de la transformación de fuentes dependientes, cada teorema establece lo siguiente:

- El teorema de Norton establece que cualquier red de dos terminales puede reducirse a una fuente ideal de corriente y a una resistencia en paralelo.
- El teorema de Thévenin establece que cualquier red de dos terminales puede reducirse a una fuente ideal de tensión y a una resistencia en serie.

Ejemplo de dicho teorema, se tiene el siguiente circuito el cual queremos simplificar a su forma más reducida:



Entonces, aplicando la transofrmación en la fuente de corriente **I=3A** y nuestra resistencia con valor de 10 ohms, tendremos una transformacion de la forma:

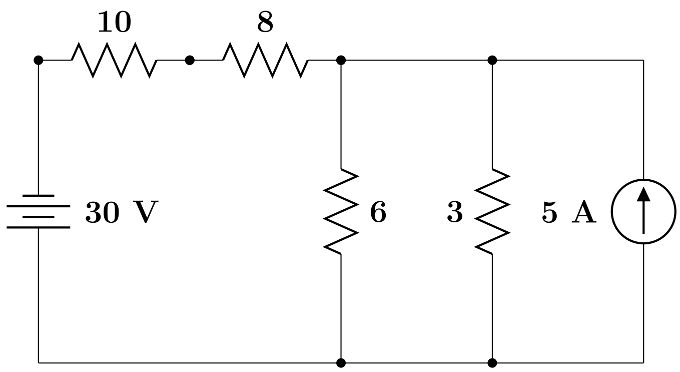
$$\begin{aligned} Vs &= Is \cdot R \\ Vs &= 3A \cdot 10 \\ Vs &= 30V \end{aligned}$$

(Conectada en serie con la misma resistencia de 10 Ohms)

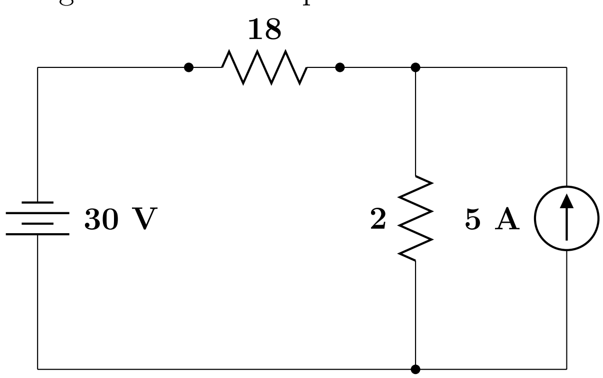
Pero de la misma manera tendremos una transformacion en **V=15** del lado derecho, con la forma:

$$\begin{aligned} Is &= \frac{Vs}{R} \\ Is &= \frac{15}{3} \\ Is &= 15/3 \text{(conectada en paralelo con la resistencia de 3 ohms)} \end{aligned}$$

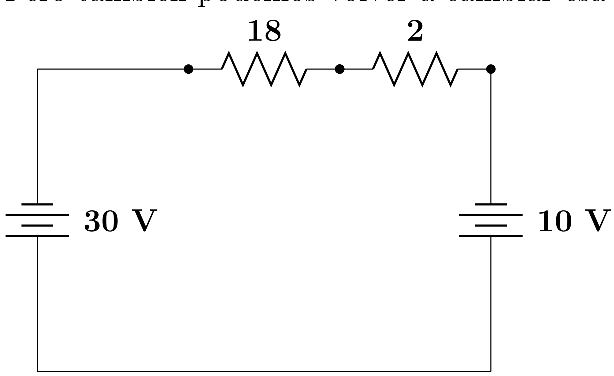
Entonces el circuito quedaría de la siguiente manera:



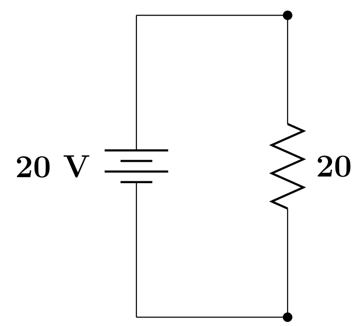
Ahora facilmente podemos sumar resistencias equivalentes en serie y paralelo para tener el siguiente circuito equivalente:



Pero también podemos volver a cambiar esa fuente de corriente:



Entonces sumando la resistencia equivalente en serie y una simple resta de voltaje de las fuentes pues están en sentido contrario con la de la corriente:



Ahora simplemente utilizando la ley de Ohm podemos ver que la corriente del circuito equivalente que tenemos será igual a **1A**.

4.2. Teoremas de Circuitos

4.2.1. Teorema de Thévenin

En la teoría de circuitos eléctricos, el teorema de Thévenin establece que si una parte de un circuito eléctrico lineal está comprendida entre dos terminales A y B, esta parte en cuestión puede sustituirse por un circuito equivalente que esté constituido únicamente por un generador de voltaje en serie con una resistencia, de forma que al conectar un elemento entre los dos terminales A y B, el voltaje que cae en él y la intensidad que lo atraviesa son las mismas tanto en el circuito real como en el equivalente.

El teorema de Thévenin fue enunciado por primera vez por el científico alemán Hermann von Helmholtz en el año 1853, pero fue redescubierto en 1883 por el ingeniero de telégrafos francés Léon Charles Thévenin (1857?1926), de quien toma su nombre. El teorema de Thévenin es el semejante del teorema de Norton.

Ya que en la práctica es común utilizar circuitos o sistemas donde los compenentes sean variables, resulta poco práctico realizar todos los cálculos para encontrar los valores de los elementos del circuito con el que se está trabajando, por eso con éste teorema se proporciona una técnica mediante la cual la parte fija del circuito se remplaza por un circuito equivalente con las siguientes características:

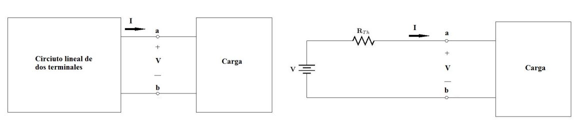


Figura 4.2

Para calcular la tensión de Thévenin, Vth, se desconecta la carga (es decir, la resistencia de la carga) y se calcula V_{AB}. Al desconectar la carga, la intensidad que atraviesa

Rth en el circuito equivalente es nula y por tanto la tensión de Rth también es nula, por lo que ahora $V_{AB} = V_{th}$ por la segunda ley de Kirchhoff.

Debido a que la tensión de Thévenin se define como la tensión que aparece entre los terminales de la carga cuando se desconecta la resistencia de la carga también se puede denominar tensión en circuito abierto.

Para calcular la resistencia de Thévenin, se desconecta la resistencia de carga, se cortocircuitan las fuentes de tensión y se abren las fuentes de corriente. Se calcula la resistencia que se ve desde los terminales AB y esa resistencia R_{AB} es la resistencia de Thevenin buscada $R_{th} = R_{AB}$

Siguiendo esos pasos se deben considerar dos situaciones al querer calcular la resistencia de Thévenin en el circuito:

1. Si el circuito contiene únicamente fuentes independientes, éstas simplemente se apagan y se obtiene el valor de R_{th} al calcular la resistencia entre las terminales $a - b$.

2. Si el circuito contiene fuentes dependientes, se"apagan"todas las fuentes independientes, pero no se pueden "apagar"las fuentes dependientes ya que están controladas por variables del circuito. Para solucionar este problema se conecta una fuente de voltaje V_o entre a-b y se determina el valor de i_o. Entonces, para calcular R_{th} simplemente se hace la operación $R_{th} = \frac{V_o}{i_o}$. Ambos procedimientos dan el mismo resultado. En general se elige una fuente de voltaje $V_o = 1V$ ó una fuente de corriente $i_o = 1A$ para facilitar los cálculos.

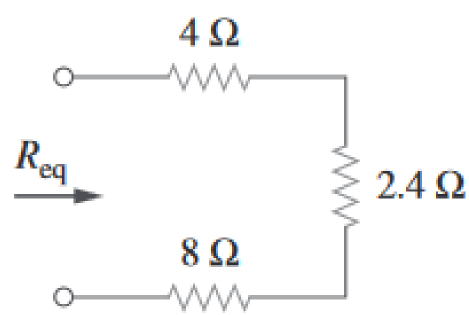
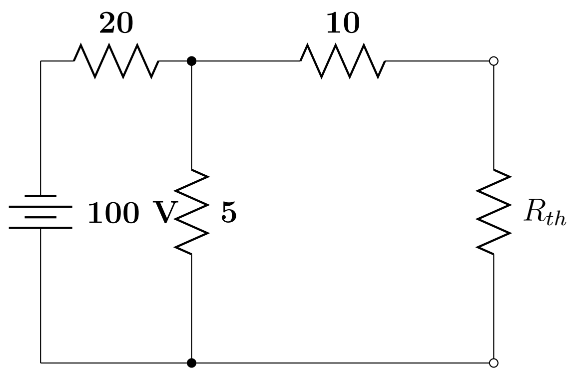
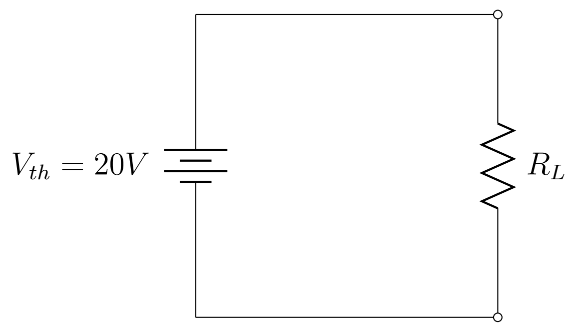


Figura 4.3

·Ejemplo de como se encuentra un circuito equivalente de Thévenin:



$Estecircuitosetransformaalsiguiente:$



En primer lugar, calculamos el voltaje de Thévenin entre los terminales A y B de la carga; para ello, desconectamos R_L del circuito (queda un circuito abierto entre A y B). Una vez hecho esto, podemos observar que la resistencia de 10 ohms está en circuito abierto y no circula corriente a través de ella, con lo que no produce ninguna caída de voltaje. En estos momentos, el circuito que necesitamos estudiar para calcular el voltaje de Thévenin está formado únicamente por la fuente de voltaje de 100 V en serie con dos resistencias de 20 ohms y 5 ohms. Como la carga R_L está en paralelo con la resistencia de 5 ohms (recordar que no circula intensidad a través de la resistencia de 10 ohms), la diferencia de potencial entre los terminales A y B es igual que la voltaje que cae en la resistencia de 5 ohms, con lo que la tensión de Thévenin resulta:

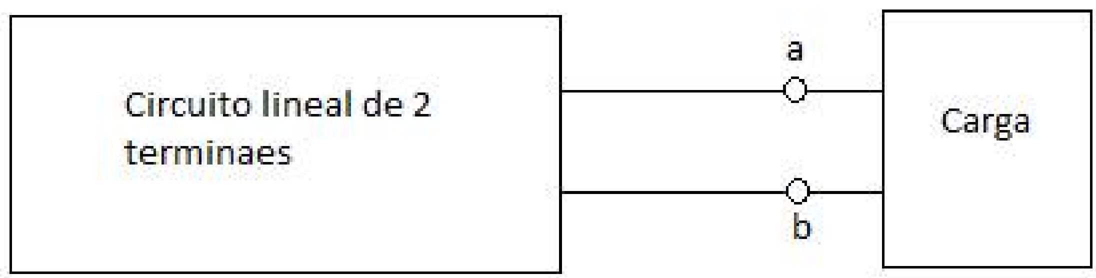
$$V_{th} = \frac{5}{20+5} \cdot 100V = 20V$$

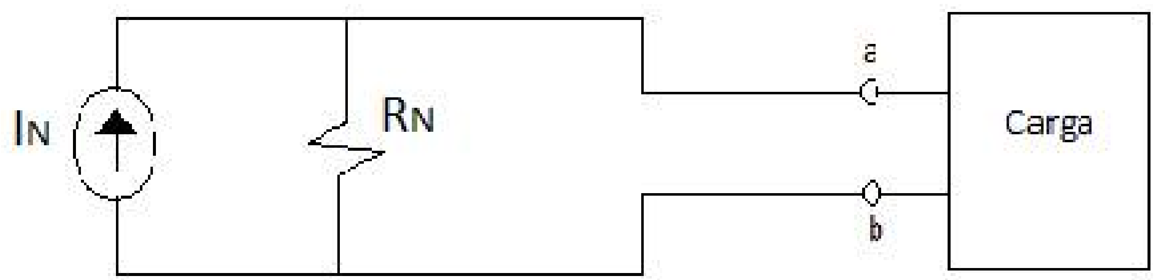
Para calcular la resistencia de Thévenin, desconectamos la carga R_L del circuito y anulamos la fuente de tensión sustituyéndola por un cortocircuito. Si colocásemos una fuente de tensión (de cualquier valor) entre los terminales A y B, veríamos que las tres resistencias soportarían una intensidad. Por lo tanto, hallamos la equivalente a las tres: las resistencias de 20 ohms y 5 ohms están conectadas en paralelo y estas están conectadas en serie con la resistencia de 10 ohms, entonces:

$R_{th} = \frac{20 \cdot 5}{20+5}\Omega + 10\Omega = 14\Omega$

4.2.2. Teorema de Norton

En 1926 el ingeniero E.L. Norton de la compañia Bell propuso un teorema similar a Thevenin conocido como el Teorema de Norton. El teorema de Norton establece que un circuito lineal de 2 terminales puede ser reemplazado por un circuito equivalente concistente de una fuente de corriente In es la corriente de "corto circuito" medido atraves de las terinales y Rn es la resistencia de entrada equivalente entre las terminales cuando las fuentes independientes estan apagadas.





Es fácil observar que $R_N = R_{TH}$ ya que se utiliza el mismo procedimiento para calcularlas.

Para calcular I_N, se determina la corriente como "corto circuito"que circula en las terminales $a - b$.

$$I_N = I_{se}$$

Al comparar las relaciones de Thévenin y Norton se observa que:

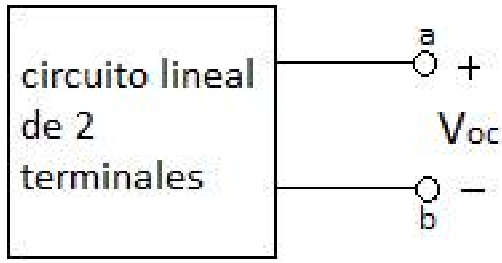
$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}}$$

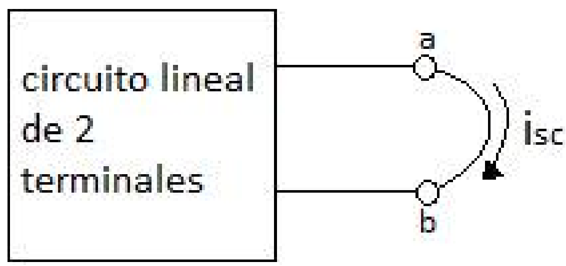
En otras palabras se trata de una transformación de fuentes.

Puesto que V_{TH}, I_N y R_{TH} están relacionados, para calcular el equivalente de Thévenin o Norton se requiere:

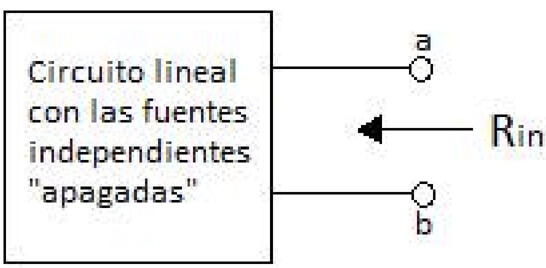
- El voltaje de "circuito-abierto" V_{oc} a través de las terminales $a - b$.

- La corriente de “corto-circuito” i_{sc} en las terminales $a-b$.
- La resistencia equivalente de entrada R_{in} entre las terminales a-b cuando todas las fuentes independientes están apagadas.





$V_{TH} = V_{oc}$ $\qquad$ $I_{TH} = i_{sc}$



$R_{TH} = R_{in}$

Se debe considerar los 2 mismos casos contemplados al calcular la resistencia de Norton R_N.

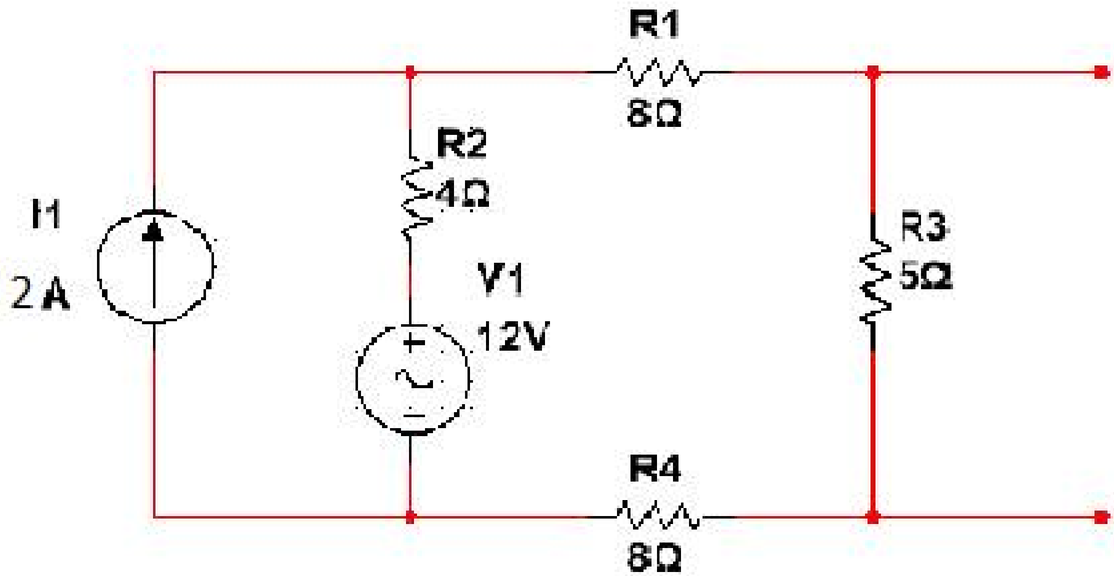
Las pruebas de “circuito-abierto” y “corto-circuito” son suficientes para encontrar cualquier equivalente de Thevenin o Norton.

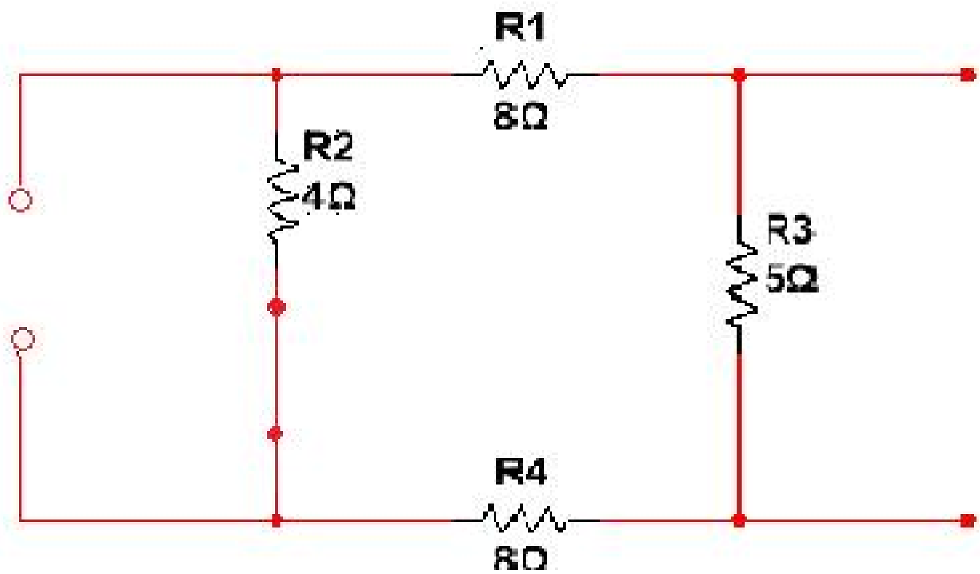
$$V_{TH} = V_{oc}$$

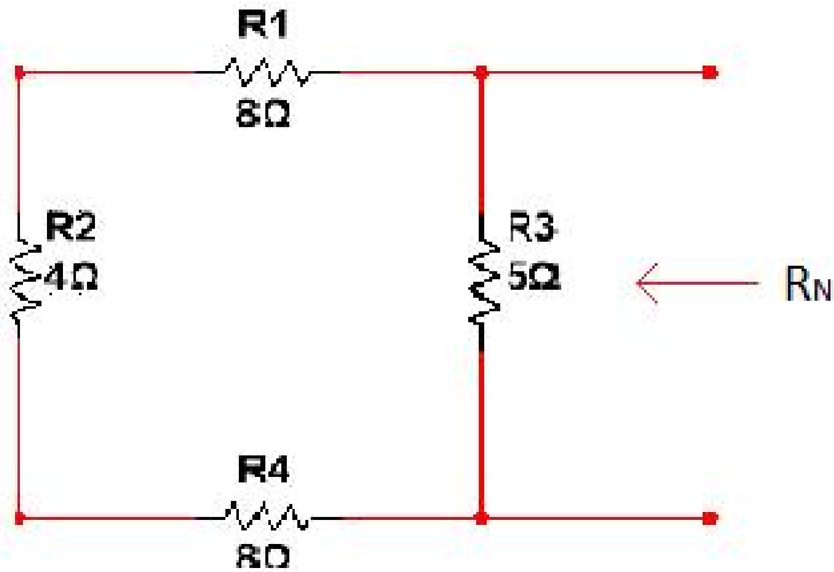
$$I_N = i_{sc}$$

$$R_{TH} = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = R_N$$

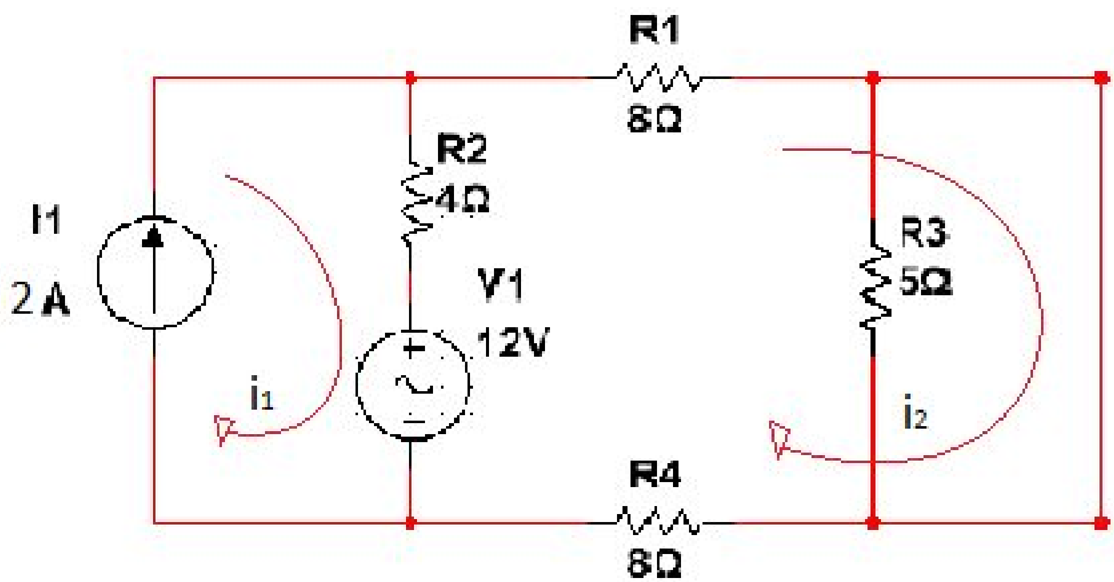
Ejemplo: Calcule el equivalente de Norton en el siguiente circuito.


R1
8Ω
R2
4Ω
I1
2 A
V1
12V
R3
5Ω
R4
8Ω


R1
8Ω
R2
4Ω
R3
5Ω
R4
8Ω



$R_N = (4+8+8)\Omega // 5\Omega = 30\Omega // 6\Omega = \frac{(20\Omega)(5\Omega)}{20\Omega+5\Omega} = \frac{100\Omega}{25\Omega} = 4\Omega$
Para calcular I_N se utiliza analisis de mallas:



$i_1 = 2A \qquad \longrightarrow \qquad 1$

$-12v - 4i_1 + (4+8+8)i_2 = o \qquad \longrightarrow \qquad 2$

$-4i_1 + 20i_2 = 12v \qquad \longrightarrow \qquad 3$

Sustituyendo 1 en 3:

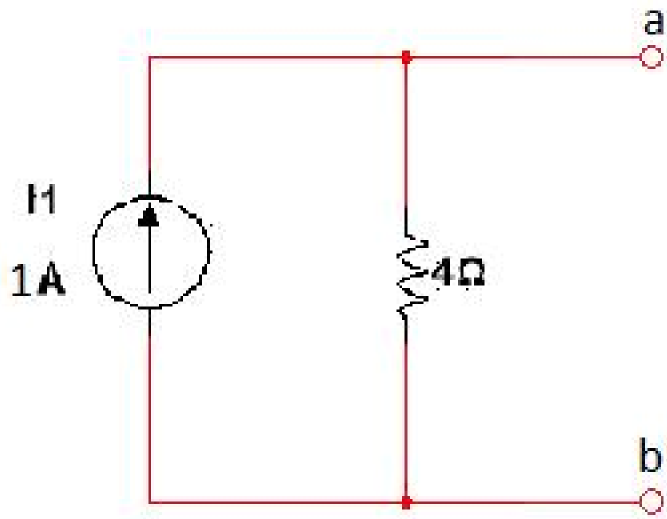
$-4i(2A) + 20i_2 = -8v + 20i_2 = 12 \qquad \longrightarrow$

$20i_2 = 12v + 8v$

$20i_2 = 20v$

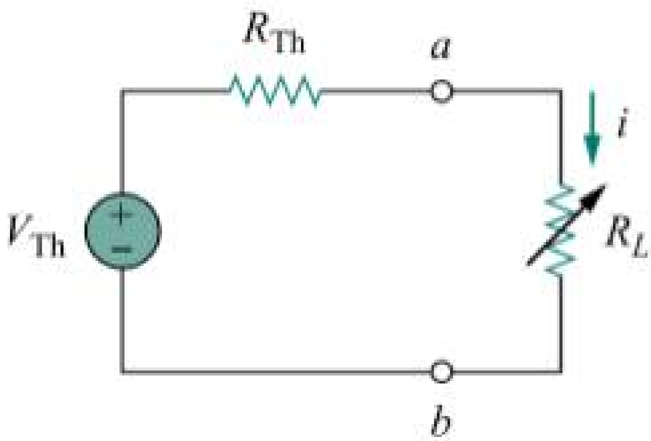
$i_2 = 1A$

Y como $i_2 = i_{sc} = I_N$
El circuito equivalente de Norton es:



4.3. Máxima Transferencia de Potencia

En muchas aplicaciones practicas, un circuito se diseña para proporcionar potencia a una caja, a mismo tiempo se busca reducir las perdidas en el proceso de transmisión y distribución debido a las criticas condiciones de eficiencia y economía. Existen otras aplicaciones en areas tales como las telecomunicaciones, en donde es deseable maximizar la potencia entregada a una carga. En esta ocasión se tratara el problema de entregar la maxima potencia a una carga para un sistema en donde se conoce las perdidas internas. Es importante resaltar que se tendrán perdida internas mayores o iguales a la potencia entregada a la carga. El equivalente de Thévenin es util para calcular la potencia maxima que un circuito lineal puede entregar a una carga. Suponiendo que se puede ajustar a la resistencia de carga R_L. Si el circuito completo se remplaza por su equivalente de Thévenin (excepto la carga), como se muestra en la figura siguiente:



La potencia entregada a la carga esta dada por:

$$P_L = i^2 * R_L$$
$$i = \frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L}$$
$$P_L = (\frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L})^2 * R_L$$

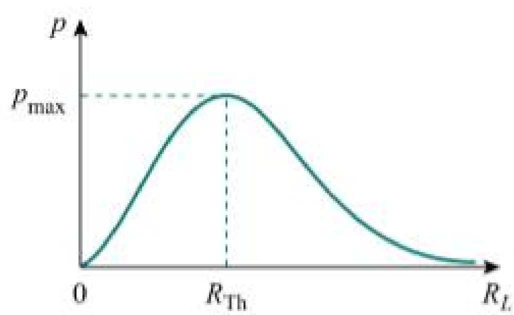


Figura 4.4: Gráfica de potencia entregada en función del valor de R_L.

La potencia entregada a la carga varia de la forma mostrada en la grafica.
Se observa que la potencia es pequeña tanta para valore pequeños como grandes de R_L pero su valor maximo de enuentra para un valor especifico de R_L (entre 0 y ∞).
Esto se conoce como el teorema Maxima Transferencia de Potencia.

La transferencia maxima de potencia a la carga cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de Thevenin ($R_L = R_{TH}$).

A continuacion se demostrara para que valor de R_L se tine la maxima transferencia de potencia.

Recordando que la potencia que se transfiere a la carga esta dada por:

$$P_L = (\frac{V_{TH}}{R_{TH} + R_L})^2 * R_L$$

Empleando el metodo de maximos y minimos:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{(R_{TH} + R_L)^2 * \frac{d}{dR_L}(V_{TH}^2 * R_L) - (V_{TH}^2 * R_L) * \frac{d}{dR_L}(R_{TH} + R_L)^2}{(R_{TH} + R_L)^4}$$

$$= \frac{(R_{TH} + R_L)^2 * V_{TH}^2 - 2(R_{TH} + R_L)(V_{TH}^2 * R_L)}{(R_{TH} + R_L)^4}$$

$$= \frac{(R_{TH} + R_L) * V_{TH}^2 - 2V_{TH}^2 * R_L}{(R_{TH} + R_L)^3}$$

$$= \frac{V_{TH}^2 * (R_{TH} - R_L)}{(R_{TH} + R_L)^3}$$

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{V_{TH}^2 * (R_{TH} - R_L)}{(R_{TH} + R_L)^3}$$

Para calcular las raíces se hace $\frac{dP_L}{dR_L} = 0$

$$\frac{V_{TH}^2 * (R_{TH} - R_L)}{(R_{TH} + R_L)^3} = 0$$

$$V_{TH}^2 * (R_{TH} - R_L) = 0$$

$$R_{TH} - R_L = 0$$

$\boxed{R_{TH} = R_L}$

Sustituyendo el valor de R_L en la ecuación de potencia entregada, se obtiene:

$$P_{L_{max}} = (\frac{V_{TH}}{R_L + R_L})^2 * R_L = \frac{V_{TH}^2}{4R_L^2} * R_L = \frac{V_{TH}^2}{4R_L} = \frac{V_{TH}^2}{4R_{TH}}$$

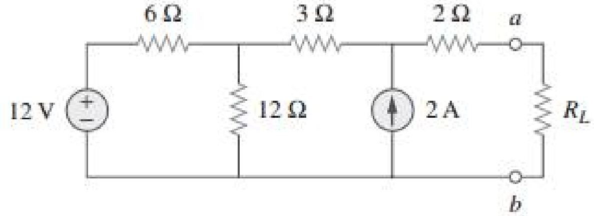
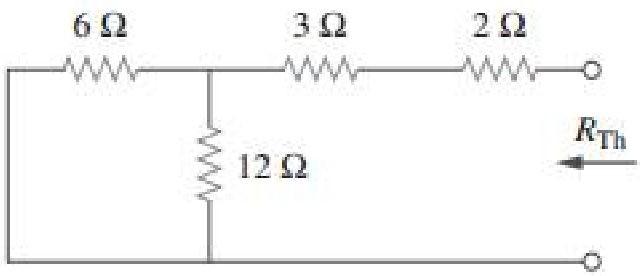


Figura 4.5: Circuito del ejemplo.

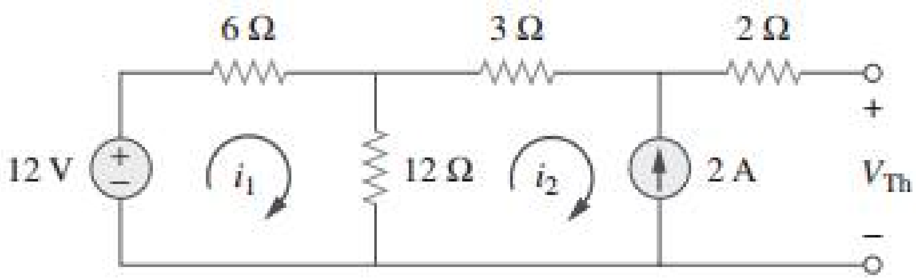
Ejemplo: Calcule el valor de R_L para maxima transferencia de potencia en el circuito siguiente (calcule también el valor de la potencia).

En primer lugar se requiere calcular el valor de R_{TH} y V_{TH} para obtener R_{TH}, se deja "*abierto*" el circuito entre los puntos "a" y "b" y se sustituyen las fuentes por sus impedancias internas ideales: fuente de voltaje $\longrightarrow$ 0Ω y fuente de corriente $\longrightarrow$ $\infty\Omega$



$$R_{TH} = 6//(12+3+2)\Omega = (4+5)\Omega = 9\Omega$$

Para calcular el voltaje de Thévenin se emplea el circuito mostrado a continuación:



Empleando analisis de mallas:

$-12v + (6+12)\Omega i_1 - 12\Omega i_2 = 0 \qquad\qquad i_2 = -2A$

$$18i_1 - 12\Omega(-2A) = 12v$$

$$18i_1 + 24v = 12v$$

$$18i_1 = 12v - 24v$$

$$i_1 = -\frac{12v}{18\Omega} = -\frac{2}{3}A$$

Empleando el lazo exterior para obtener V_{TH}, da como resultado:

$$-12v + 6\Omega i_1 + 3\Omega i_2 + V_{TH} = 0$$

$$V_{TH} = 12v - 6\Omega(-\frac{2}{3}A) - 3\Omega(-2A)$$

$$V_{TH} = 12v + 4v + 6v$$

$$V_{TH} = 22v$$

$R_L = R_{TH} = 9\Omega$

$P_{L_{max}} = \frac{V_{TH}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4(9\Omega)} = 13.44W$

Capítulo 5

Elementos que almacenan energía

5.1. Elementos reactivos

Un tipo muy importante de elementos lineales pasivos son los capacitores e inductores. A diferencia de los resistores (resistencias) que disipan energía, los capacitores e inductores almacenan energía (no la disipan) que puede utilizarse posteriormente. Por esta razón se les conoce como elementos almacenadores o reactivos.

5.2. Capacitores

Un capacitor es un elemento diseñado para almacenar energía en su campo eléctrico. Junto con los resistores, los capacitores son los componentes eléctricos más comunes y son ampliamente utilizados en electrónica, comunicaciones, computadoras y sistemas de potencia. Un capacitor esta construido como se muestra en la siguiente figura:

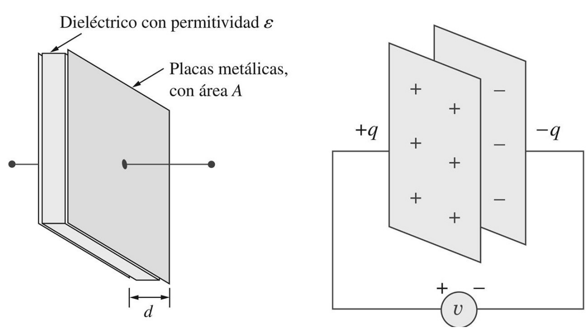


Figura 5.1: Un capacitor consiste de dos placas conductoras separadas por un aislante (o dieléctrico).

En muchas prácticas las placas son láminas de aluminio, mientras que el dieléctrico puede ser aire, cerámica, papel o mica.

Cuando se conecta una fuente de voltaje V al capacitor, la fuente deposita carga positiva $+q$ en una placa y carga negativa $-q$ en la otra placa. Se dice que el capacitor almacena la carga eléctrica. La cantidad de carga almacenada se represente por q y es directamente proporcional al voltaje aplicado V, por lo que:

$$q = C \cdot V$$

> La capacitancia es la razón de carga en una placa de un capacitor con respecto a la diferencia de voltaje entre las dos placas y esta medida en farads(F).

En realidad la capacitancia no depende de q ni de V, sino más bien de las dimensiones físicas del capacitor. Por ejemplo, para el capacitor de placas paralelas la capacitancia esta dada por:

$$C = \epsilon \cdot \frac{A}{d}$$

en donde:

- A: Area de superficie de cada placa
- d: Distancia entre las placas
- ϵ: Permitividad del material dieléctrico entre las placas.

En general tres factores determinan el valor de la capacitancia:

- 1. El área de superficia de las placas, a mayor área, mayor capacitancia.
- 2. El espacio entre las placas, a menor distancia entre placas, mayor capacitancia.
- 3. La permitividad del material, a mayor permitividad, mayor capacitancia.

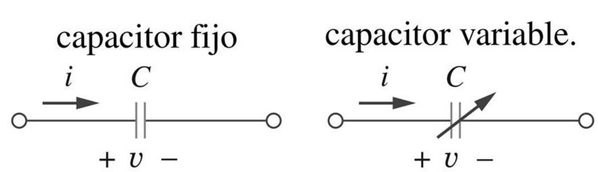


Figura 5.2: Simbolo del capacitor.

Existen múltiples valores comerciales de capacitancias y sus valores normalmente se expresan en picofarads (pF) a microfarads (μF).

Las relaciones voltaje-corriente del capacitor se muestra a continuación:

Derivando q con respecto a t

$$q = C \cdot V \longrightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot [C \cdot V] = C \cdot \frac{dv}{dt} \text{Recordando que:}$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

se tiene:

$$i_c(t) = C \cdot \frac{dv_c(t)}{dt} \tag{1}$$

Para obtener $v_c(t)$ se integran ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\int i_c(t)dt = \int C \cdot dv_c(t) \quad \longrightarrow \quad \int_{v_c(0)}^{v_c(t)} dv_c = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_c(\tau)\, d\tau$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_{t_0}^t i_c(\tau)\, d\tau + v_c(t_0) \tag{2}$$

La potencia instantánea es:

$$P = v_c \cdot i_c = v_c \cdot C \cdot \frac{dv_c}{dt} \tag{3}$$

y por lo tanto, la energía es:

$$P = \frac{dw}{dt} \longrightarrow w = \int_{t_0}^t p\, d\tau = \int_{t_0}^t C \cdot v_c\, dv_c = \frac{1}{2} C \cdot V_c^2(t)$$

5.2.1. Propiedades de un capacitor

Un capacitor tiene las siguientes propiedades:

- Cuando el voltaje a través de un capacitor no varía con respecto al tiempo, la corriente a través del capacitor es cero.
- Un capacitor es un "circuito abierto" para *c.d.*
- Si se conecta una batería (*c.d.*) al capacitor, este se carga al nivel del voltaje de la batería.
- El voltaje en un capacitor debe ser continuo. El voltaje e un capacitor no puede cambiar abruptamente.
- La corriente en el capacitor si puede cambiar instantáneamente.
- Un capacitor ideal no disipa energía, toma energía del circuito, almacena energía en su campo eléctrico, pero posteriormente la regresa.
- Un capacitor real (no ideal) incluye una resistencia de fuga en paralelo. El valor de dicha resistencia puede ser del orden de 100 MΩ y se considera despreciable para la mayoría de las aplicaciones.

5.2.2. Conexión paralelo y serie de capacitores

Para obtener el valor de la capacitacia equivalente de un arreglo de capacitores en paralelo, se tiene:

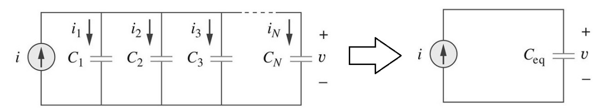


Figura 5.3: Circuito equivalente de capacitores en paralelo.

Aplicando la LCK.

$$i = i_1 + i_2 + \cdots + i_N \tag{1}$$

Pero como

$$i_k = C_k \cdot \frac{dv_k}{dt}$$

entonces

$$i = C_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} + C_2 \cdot \frac{dv_2}{dt} + \cdots C_N \cdot \frac{dv_N}{dt} \tag{2}$$

y como

$$v = v_1 = v_2 = \cdots = v_N$$

$$i = C_1 \cdot \frac{dv}{dt} + C_2 \cdot \frac{dv}{dt} + \cdots + C_N \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$i = \left(\sum_{k=1}^{N} C_k \right) \cdot \frac{dv}{dt} = C_{eq} \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$C_{eq} = \sum_{k=1}^{N} C_k$$

La capacitancia equivalente de N capacitores conectados en paralelo es igual a la suma de de las capacitancias individuales.

Para el caso de capacitores conectados en serie, la capacitancia equivalente se calcula de la manera mostrada a continuación:

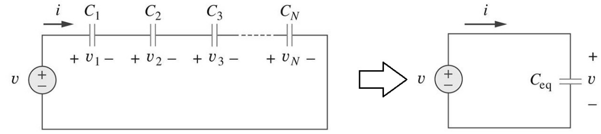


Figura 5.4: Circuito equivalente de capacitores en serie.

Aplicando la LVK.

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_N \tag{1}$$

Recordando que:

$$v_k = \frac{1}{C_k} \cdot \int_{t_0}^{t} i_k(\tau)\, d\tau + v_k(t_0)$$

$$v = \frac{1}{C_1} \cdot \int i_1\, dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2} \cdot \int i_2\, dt + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N} \cdot \int i_N\, dt + v_N(t_0)$$

puesto que

$$i = i_1 = i_2 = \cdots = i_N$$

$$v = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right) \cdot \int i\, dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0)$$

$$v = \left(\frac{1}{C_{eq}}\right) \cdot \int_{t_0}^{t} i\, d\tau + v(t_0)$$

en donde:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{C_k}$$

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) = \sum_{k=1}^{N} v_k(t_0)$$

La capacitancia equivalente de un arreglo de capacitores conectados en serie es igual al inverso de la suma de los inversos de las capacitancias individuales.

5.3. Inductores

Un inductor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo magnético. La aplicación de los inductores es muy extensa en los circuitos eléctricos y electrónicos En principio cualquier conductor de corriente eléctrica tiene propiedades inductivas y puede tomarse como inductor, sin embargo, para mejorar el efecto inductivo un inductor práctico normalmente se forma con un embobinado cilíndrico con muchas vueltas de alambre conductor, como se muestra en la siguiente figura:

Si se hace circular una corriente a través de un conducto, se sabe que el voltaje a través del inductor es directamente proporcional a la razón de cambio de la corriente

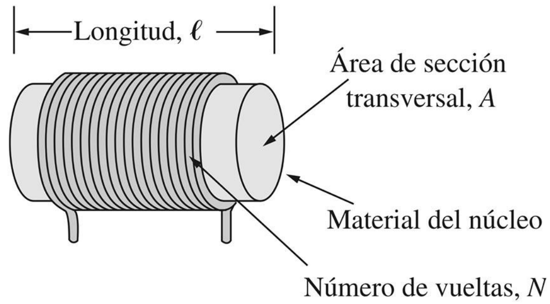


Figura 5.5: Un inductor consiste de un embobinado de alambre conductor.

con respecto al tiempo, es decir:

$$v \propto \frac{di}{dt} \longrightarrow v = L \cdot \frac{di}{dt} \tag{5.1}$$

La constante de proporcionalidad L es llamada la *Inductancia* del inductor y sus unidades son los Henrys (H), llamadas así en honor al inventor norteamericano Joseph Henry (1797-1878). De la ec (1) se puede deducir que 1H equivale a $1\left[\frac{V \cdot s}{A}\right]$.

La inductancia es la propiedad por la que un inductor exhibe oposición al cambio de la corriente que fluye a través de dicho inductor y se mide en Henrys (H)

De manera similar a la capacitancia en los capacitores, la inductancia depende de las dimensiones físicas y construcción de los inductores. las fórmulas para calcular la inductancia se derivan de la teoría electromagnética y se pueden encontrar en manuales y libros de ingeniería eléctrica.

Para el caso del inductor típico se tiene que la inductancia se expresa de la manera siguiente:

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu \cdot A}{\ell}$$

en donde:
N: Número de vueltas
ℓ: Longitud
A: Area de sección vertical transversal
μ: Permeabilidad del núcleo

La inductancia puede aumentarse incrementando el número de vueltas del embobinado, utilizando un material para el núcleo con mayor permeabilidad, incrementando el área de la sección transversal o reduciendo la longitud del embobinado.

Como en el caso de los capacitores, existen inductores comerciales con valores que van desde los microhenrys (μH) como en el caso de los sistemas de telecomunicaciones hasta decenas de Henrys para sistemas de distribución de potencia. El núcleo de los inductores se puede construir de hierro, acero, plástico o aire. Otros nombres que se dan comunmente a los inductores son: bobina o choque.

Los símbolos típicos para un inductor se muestran a continuación, se puede observar que se utiliza la convención de signos pasivos.

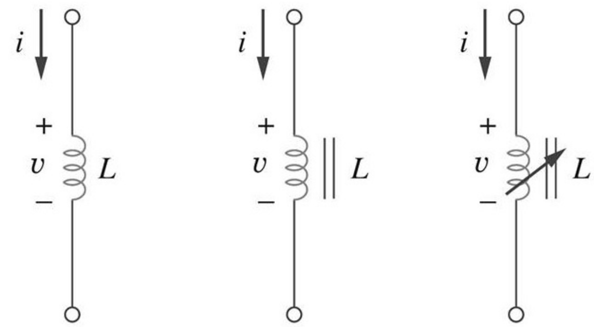


Figura 5.6: Simbolo del inductor.

la relación i-v (corriente-voltaje) se obtiene de la manera siguiente:

$$di = \frac{1}{L} \cdot v \cdot dt$$

Integrando ambos lados

$$\int_{i(t_0)}^{i()} di = \frac{1}{L} \cdot \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \cdot \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau$$

$$i_l(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau + i_l(t_0)$$

En realidad la corriente se evalúa desde -∞ a t pero para $t \in \begin{bmatrix} -\infty & t_0 \end{bmatrix}$ se maneja de manera práctica que i(-∞) = 0 ya en un tiempo (muy prolongado) previo a la medición, no había ninguna corriente en el inductor.

Puesto que el inductor almacena energía en su campo magnético, el valor de la energía almacenada se puede obtener como se muestra a continuación:

$$p = v \cdot i = \left(L \cdot \frac{di}{dt}\right) \cdot i$$

Y como

$$p = \frac{dw}{dt}$$

$$w = \int_{-\infty}^{t} p\,dt = \int_{-\infty}^{t} \big(L \cdot \frac{di}{dt}\big)\,dt = L \int_{-\infty}^{t} i\,di = \frac{1}{2} \cdot L\ i^2 \Big]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{2} L\ i^2(t)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot L\ i^2(t)$$

5.3.1. Propiedades del Inductor.

Se puede anotar las siguientes propiedades de un inductor:

- El voltaje a través de un inductor es cero cuando la corriente es constante
- Un inductor actúa como un corto circuito para c.d.
- Un inductor se opone al cambio de la corriente que fluye por el
- La corriente a través de un inductor no puede cambiar instantáneamente.
- Como en el caso del capacitor ideal, un inductor ideal no disipa energía, la almacena para entregarla posteriormente.
- Un inductor práctico tiene un componente resistivo, debido principalmente al material conductor (por ejemplo el cobre) que tiene una resistividad intrínseca. Esta resistencia es llamada resistencia de embobinado R_W (del inglés winding) y aparece en serie con la inductancia. La presencia de R_W provoca una disipación de energía, sin embargo, en muchos casos R_W es muy pequeña y su valor se desprecia. También se presenta una capacitancia de embobinado C_W cuyo valor también es pequeño y en general también se desprecia su efecto, excepto a altas frecuencias.

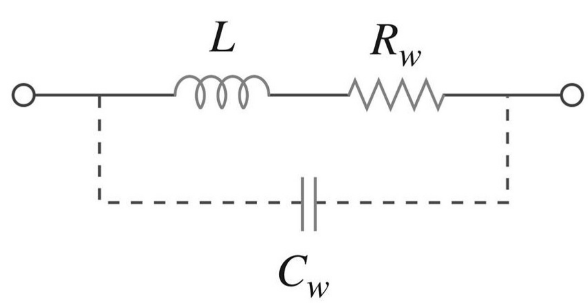


Figura 5.7: Circuito del modelo para un inductor práctico.

5.3.2. Inductores en serie y paralelo.

Al agregar a los inductores a la lista de elementos pasivos, es necesario obtener los circuitos equivalente de conexiones en seria y en paralelo.

5.3.2.1. Conexión en serie.

En un circuito serie, la corriente es la misma a través de todos los elementos.

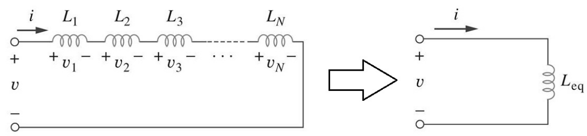


Figura 5.8: Inductores en paralelo.

Aplicando LVK al lazo

$$v = v_1 + v_2 \cdots + v_N \tag{1}$$

Recordando que:

$$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

Sustituyendo en (1):

$$v = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \cdots + L_N \cdot \frac{di_N}{dt} = L_1 \cdot \frac{di}{dt} + L_2 \cdot \frac{di}{dt} \cdots + L_N \cdot \frac{di}{dt}$$

$$v = \big(L_1 + L_2 + \cdots + L_n\big) \cdot \frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} L_k\right) \cdot \frac{di}{dt} = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = \sum_{k=1}^{N} L_k$$

La inductancia equivalente de inductores conectados en serie es la suma de inductancias individuales.

5.3.2.2. Conexión en paralelo

En un circuito en paralelo el voltaje a través de todos los elementos es el mismo.

$$i = i_1 + i_2 \cdots + i_N \tag{1}$$

recordando que:

$$i_L = \int_{t_0}^{t} v_L \, dt + i_L(0)$$

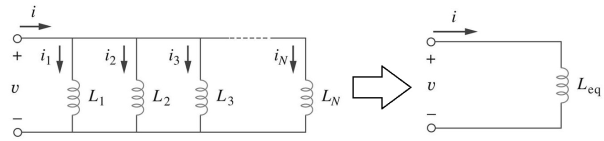


Figura 5.9: Inductores en serie.

sustituyendo en la ecuación anterior

$$i = \frac{1}{L_1} \cdot \int_{t_0}^{t} v_1 \, dt + i_1(0) + \frac{1}{L_2} \cdot \int_{t_0}^{t} v_2 \, dt + i_2(0) + \cdots + \frac{1}{L_N} \cdot \int_{t_0}^{t} v_N \, dt + i_N(0)$$

$$i = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N} \right) \cdot \int_{t_0}^{t} v \, dt + i_1(0) + i_2(0) + \cdots + i_N(0)$$

$$\frac{1}{L_{eq}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{L_k}$$

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0)$$

La inductancia equivalente de inductores conectados en paralelo es igual al inverso de la suma de los inversos de las inductancias individuales.

Capítulo 6

Circuitos de primer orden

6.1. Forma general de las ecuaciones de respuesta

Las soluciones de la respuesta de circuitos transitorios de 1^{er} orden (i.e. encontrar los voltajes o corrientes) requieren de resolver una ecuación diferencial de 1^{er} orden de la forma siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} + a \cdot x(t) = f(t) \tag{1}$$

Aunque existen varias técnicas para resolver dicha ecuación se mostrará una solución general, que se utilizará para el análisis transitorio. Un teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales establece que si $x(t) = x_p(t)$ es una solución de (1) y $x(t) = x_c(t)$ es una solución de la ecuación homogénea:

$$\frac{dx(t)}{dt} + a \cdot x(t) = 0 \tag{2}$$

entonces:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \tag{3}$$

Es una solución de la ecuación original (1). El término $x_p(t)$ es llamado "la solución integral particular.º respuesta forzada y $x_c(t)$ es llamada "la solución complementaria.º respuesta natural.

Si por el momento se considera $f(t) = A$ (i.e. una constante). La solución de la ecuación diferencial consiste de 2 partes que se obtienen al resolver las 2 ecuaciones:

$$\frac{x_p(t)}{dt} + a \cdot x_p(t) = A \tag{4}$$

$$\frac{x_p(t)}{dt} + a \cdot x_p(t) = 0 \tag{5}$$

Como el lado derecho de (4) es una constante, es razonable suponer que la solución también será una constante:

$$x_p(t) = K_1 \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (4) se tiene que:

$$K_1 = \frac{A}{a} \tag{7}$$

de 5 observamos que:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -a \cdot x_c(t) \longrightarrow \frac{dx_c(t)}{dt} = -a \cdot dt \tag{8}$$

$$\int \frac{dx_c(t)}{dt} = \int -a \cdot dt \longrightarrow \ln\left[x_c(t)\right] = -a \cdot t + c$$

$$e^{\ln\left[x_c(t)\right]} = e^{(-a \cdot t + c)} = x_c(t) = e^{-a\ t} \cdot e^c = k_2 \cdot e^{-a \cdot t} \tag{9}$$

Por lo tanto, la solucion de (1) es:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) = \frac{A}{a} + k_2 \cdot e^{-a\ t} \tag{10}$$

lo cual puede expresarse como:

$$x(t) = k_1 + k_2 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{11}$$

Para la solucion (11), algunos elementos reciben los siguientes nombres (comunes en ingeniería eléctrica).

- **K:**
  Solución de estado estable (steady-state solution) que corresponde cuando el valor de la variable $x(t)$ cuando t $\to \infty$ y el 2^o término se vuelve despreciable. $\boldsymbol{\tau}$ Se conoce como la constante de tiempo del circuito, observe que el 2^o término de (11) decae exponencialmente (siempre que τ sea mayor que 0), vale k_2 para t=0 y vale 0 cuando $t \to \infty$.

  La razón de decaimiento está determinada por el valor de la constante de tiempo τ.

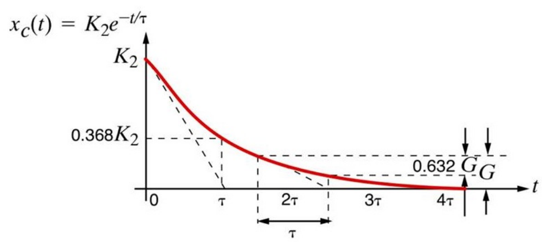


Figura 6.1: Decaimiento de la señal en función de la constante de tiempo.

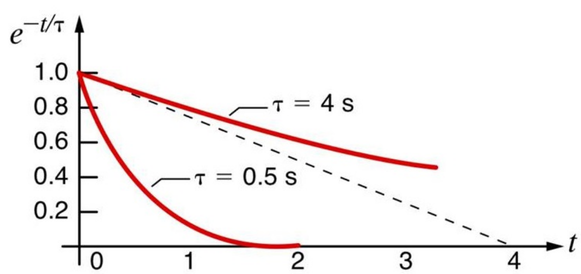


Figura 6.2: Constantes de tiempo lenta (4 s) y rápida (0.5 s).

6.2. Técnicas de análisis

6.2.1. Método de ecuaciones diferenciales

Puesto que la solución representada por la ecuación (11) describe una corriente o voltaje desconocidos en cualquier parte de la red, una manera en que se puede llegar a dicha solución es resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de dicha red empleando el llamado método de “variables de estado”, en donde se resuelven las ecuaciones que describen el voltaje a través de un capacitor y/o la ecuación de corriente en un inductor. Debe recordarse que dichas cantidades no cambian de manera instantánea (oposición a los cambio debido a los elementos reactivos).

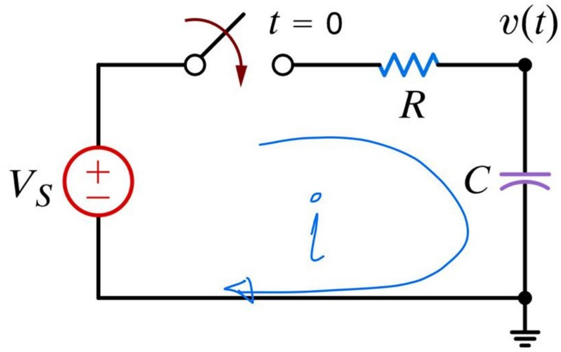


Figura 6.3: Circuito RC.

Ejemplo: Para el circuito de la figura 1, en el tiempo t = 0 se cierra el interruptor.
Empleando la LVK que describe el voltaje del capacitor para t > 0, se tiene:

$$-v_s + v_r + v_c = 0 \longrightarrow -v_s + i \cdot R + v(t)$$

recordando que para un capacitor

$$i_c = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

Y como la corriente es la misma para los elementos en serie:

$$i = i_c$$

$$-v_s + R \cdot C \cdot \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R\ C} = \frac{V_s}{R\ C}$$

La solución para dicha ecuación diferencial es de la forma:

$$v(t) = k_1 + k_2 \cdot e^{-t/\tau}$$

Sustituyendo la solución en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{-k_2}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{k_1}{R\ C} + \frac{k_2}{R\ C} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{v_s}{R\ C} \longrightarrow \frac{k_1}{R\ C} + \frac{k_2}{R\ C} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{v_s}{R\ C} + \frac{k_2}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$

igualando los terminos constantes y los terminos exponenciales se obtiene:

$$k_1 = V_s$$
$$\tau = R \cdot C$$

Por lo tanto:

$$v(t) = v_s + k_2 \cdot e^{-t/\tau}$$

En donde v_s es el valor en "estado establez RC es la constante de tiempo de la red. k_2 está determinada por la condición inicial del capacitor. Por ejemplo, si el capacitor esta descargado inicialmente (esto es, el voltaje a través del capacitor es cero en t = 0), entonces:

$$0 = v_s + k_2$$

Por lo tanto la solución completa para el voltaje v(t) es:

$$v(t) = v_s - v_s \cdot e^{-t/RC}$$

Para el circuito mostrado e continuación, se puede proceder de forma similar:

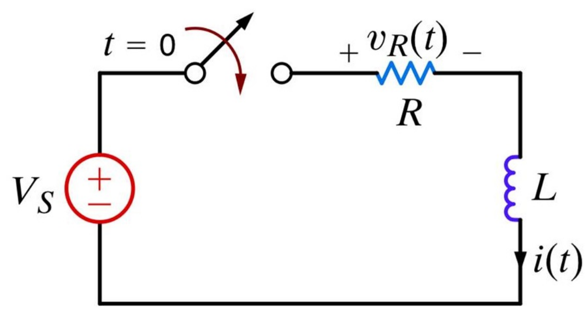


Figura 6.4: Circuito RL

Empleando de nueva cuenta la LVK para t>0, se tiene

$$-v_s + v_R + v_L = 0$$
$$-v_s + i \cdot R + L \cdot \frac{di_L}{dt} = 0$$
$$\therefore L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = v_s$$

Empleando el mismo desarrollo del problema previo

$$i(t) = \frac{v_s}{R} + k_2 \cdot e^{-(R/L) \cdot t}$$

en donde V_s/R es el valor en estado estable y L/R es la constante de tiempo del circuito. Si no hay corriente inicial en el inductor, entonces en t=0.

$$0 = \frac{v_s}{R} + k_2 \rightarrow k_2 = \frac{-v_s}{R}$$

por tanto:

$$i(t) = \frac{v_s}{R} + \frac{v_s}{R} \cdot e^{(-R/L) \cdot t}$$

y como

$$v_R = R \cdot i(t)$$

$$v_R(t) = v_s(1 - e^{-(R/L) \cdot t})$$

Para el circuito en la figura (5), $i(t) = 4\big(2 - e^{-10t}\big)$ mA.
Si $i_2(0)$ = -1 mA, encuentre:

1. $i_1(0)$;
2. $v_(t)$, $v_1(t)$ y $v_2(t)$;
3. $i_1(t)$ y $i_2(t)$

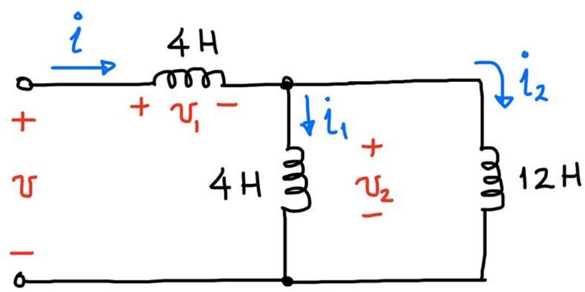


Figura 6.5: Circuito RL.

Solución

$$i(0) = 4mA$$

puesto que

$$i = i_1 + i_2 \longrightarrow i_1(0) = i(0) - i_2(0) = 4mA - (-1mA) = 5mA$$

b) la inductancia equivalente es:

$$L_{eq} = \big[4 + 4//12\big]H = \left[4 + \frac{4 \times 12}{4 + 12}\right]H = \left[4 + \frac{48}{16}\right]H = \big[4 + 3\big]H = 7H$$

entonces:

$$v(t) = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt} = 7(4)(-1)(-10) \cdot e^{-10t} mV = 280 \cdot e^{-10t} mV$$

puesto que $v = v_1 + v_2$

$$v_2(t) = v(t) - v_1(t) = e^{-10t} \cdot [280 - 80]\ mV = 200 \cdot e^{-10t}\ mV$$

c) la corriente i_1 se obtiene por medio de:

$$i_1(t) = \frac{1}{4} \int_0^t v_2(t)\, dt + i_1(0) = \frac{200}{4} \cdot \int_0^t e^{-10t}\, dt + 5mA$$

$$i_1 = -5 \cdot e^{-10t} \Big]_0^t + 5mA = -5 \cdot e^{-10t} + 5mA + 5mA = 10 - 5 \cdot e^{-10t}$$

Similarmente

$$i_2(t) = \frac{1}{12} \cdot \int_0^t v_2(t)\, dt + i_2(0) = \frac{200}{12} \cdot \int_0^t e^{-10t}\, dt - 1mA$$

$$i_2 = \frac{-5}{3} \cdot e^{-10t} \Big]_0^t - 1mA = \frac{-5}{3} \cdot e^{-10t} + \frac{5}{3} mA - 1mA = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot e^{-10t}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$1 \left[\frac{V \cdot s}{A}\right]$

$$I = \int_2^3 \frac{1}{x^2}\, dx \quad \longrightarrow \quad I = \frac{-2}{x^3} \Big]_2^3 \quad \longrightarrow \quad I = \frac{-2}{2^3} - \frac{-2}{3^3} \quad \longrightarrow \quad I = \frac{-19}{108}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$A = \int_A^B f(x)\, dx$$

6.3. Problemas de capacitores e inductores

Problema 1: Un capacitor de 1mF originalmente descargado presenta la corriente mostrada en la gráfica. Calcule el voltaje a través del capacitor para t=2ms y t=5ms.

Solución:

En primer lugar se define la función a partir de la función de voltaje de un capacitor:

$$v_c = \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t} i(\tau) d\tau + v_c(t_0)$$

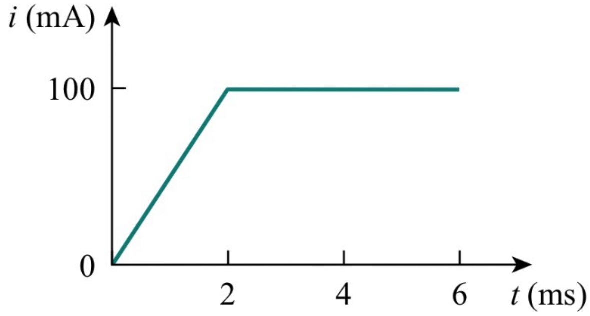


Figura 6.6

$$v_c(t) = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \longrightarrow i(t) = \begin{pmatrix} 0 \leq t \leq 2ms i(t) =?? \\ \\ 2ms \leq t \leq 6ms i(t) = 100ms \end{pmatrix}$$

$$y = mx + b \longrightarrow m = \frac{100-0}{2-0}[\frac{ms}{ms}] = 50\frac{A}{s} \longrightarrow i(t) = 50t$$

$$v_c(t) = \frac{1}{c}\int_{t_0}^{6ms} i(t)dt = \frac{1}{1mF}[\int_{0}^{2ms} 50tdt + \int_{2ms}^{6ms} 100mA \cdot dt] = \frac{50}{1mF}\frac{t^2}{2}|_{0}^{2ms} + 100t|_{2ms}^{6ms}$$

$$\frac{25t^2}{1mF}|_{0}^{2ms} + 100t|_{2ms}^{6ms} = \frac{25A}{1mF}[(2ms)^2 - (0)^2] + \frac{100mA}{1mF}[6ms - 2ms]$$

$$\frac{(25)(4ms^2)}{1mF} + \frac{100}{1F}[4ms] = \frac{100ms}{1F} + \frac{400ms}{1F} = \boxed{100mV + 400mV}$$

Problema 2: Calcular la energía almacenada en cada capacitor para el circuito siguiente (considere condiciones de c.d):

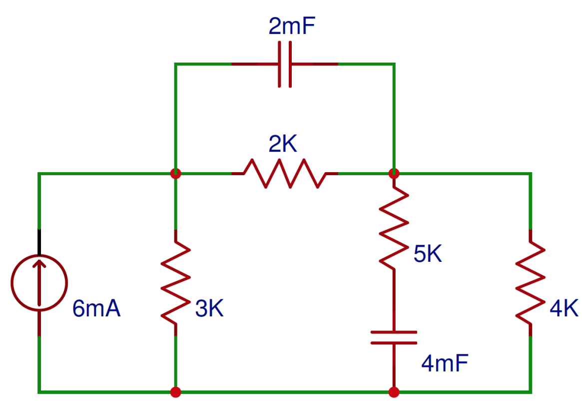
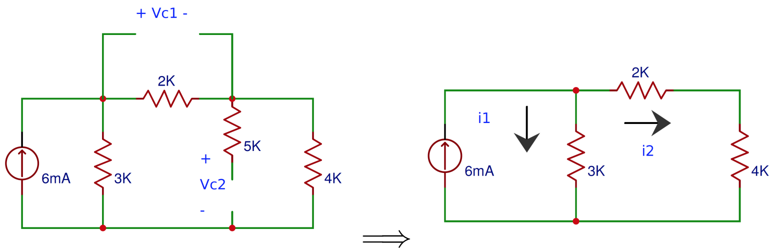


Figura 6.7



Por divisor de corriente:

$$i_2 = \frac{3k\Omega}{(3+2+4)k\Omega} \cdot 6mA = 2mA$$

$$v_{R_{2K}} = v_{c1} = (2K\Omega \cdot i_1) = ()2K\Omega)(2mA) = 4V$$

$$v_{R_{4K}} = v_{c1} = (4K\Omega \cdot i_1) = (4K\Omega)(2mA) = 8V$$

$$\therefore E_{c_1} = W_{c_1} = \tfrac{1}{2}c_1 v_{c_1}^2 = \tfrac{1}{2}(2mF)(4V)_2 = \boxed{16mJ}$$

$$E_{c_2} = W_{c_2} = \tfrac{1}{2}c_2 v_{c_2}^2 = \tfrac{1}{2}(4mF)(8V)_2 = \boxed{128mJ}$$

Problema 3: Calcular la energía almacenada en los capacitores(considere condiciones de c.d) para el circuito mostrado a continuación:

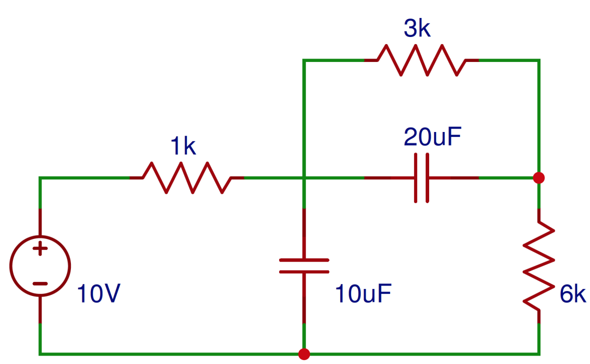
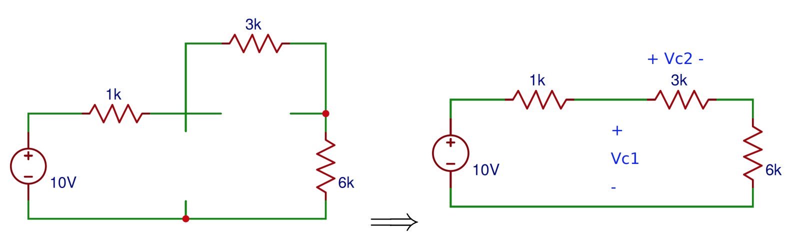


Figura 6.8



Por divisor de tensión:

$$v_{c_1} = \frac{(3+6)k\Omega}{(1+3+6)k\Omega} \cdot 10V = \frac{9}{10} \cdot 10V = 9V$$

$$v_{c_2} = \frac{3k\Omega}{(1+3+6)k\Omega} \cdot 10V == \frac{3}{10} \cdot 10V = 3V$$

$$W_{c_1} = \frac{1}{2}c_1 v_{c_1}^2 = \frac{1}{2}(10\mu F)(9V)_2 = \boxed{450\mu J}$$

$$W_{c_2} = \frac{1}{2}c_2 v_{c_2}^2 = \frac{1}{2}(20\mu F)(3V)_2 = \boxed{90\mu J}$$

Problema 4: Calcular la C_{eq} para el circuito siguiente:
Problema 5: Calcule el voltaje en cada capacitor del circuito siguiente:

Calculando primero C_{eq} :

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{20mF} + \frac{1}{30mF} + \frac{1}{(40+20)mF}} = \frac{1}{\frac{3+2+1}{60mF}} = \frac{60mF}{6} = 10mF$$

La carga total es:

$$q = C_{eq} \cdot V = (10mF)(30V) = 300mC = 0.3C$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$ si se tiene un circuito en serie, la corriente (y por lo tanto la carga) es la misma para todos los elementos en serie.

$$v_1 = \frac{q}{c_1} = \frac{0.3C}{20mF} = \boxed{15V}$$

$$v_2 = \frac{q}{c_2} = \frac{0.3C}{30mF} = \boxed{10V}$$

$$v_3 = \frac{q}{c_3 + c_4} = \frac{0.3C}{40mF + 20mF} = \boxed{5V}$$

Problema 6: Calcule el voltaje en cada capacitor del circuito siguiente:

Problema 7: Calcule la inductancia equivalente:

$$L_1 = 20mH + 40mH = 60mH$$

$$L_2 = \frac{30mH * L_1}{30mH + L_1} = \frac{(30) * (60)(mH)^2}{(30 + 60)(mH)} = \frac{1800mH}{90mH} = 20mH$$

$$L_3 = 100mH + L_2 = 100mH + 20mH$$
$$L_3 = 120mH$$

$$L_4 = \frac{40mH * L_3}{40mH + L_3} = \frac{(40)*(120)(mH)^2}{(40+120)(mH)} = \frac{4800mH}{160mH} = 30mH$$

$$L_5 = 20mH + L_4 = 20mH + 30mH$$
$$L_5 = 50mH$$

$$Leq = \frac{50mH * L_5}{50mH + L_5} = \frac{(50)*(50)(mH)^2}{(50+50)(mH)} = \frac{2500mH}{100mH} = 25mH$$

$$Leq = \boxed{25mH}$$

6.4. Circuitos de primer orden

6.4.1. Forma general de las ecuaciones de respuesta

Las soluciones de la respuesta de circuitos transitorios de 1^{er} orden (i.e. encontrar los voltajes o corrientes) requieren de resolver una ecuación diferencial de 1^{er} orden de la forma siguiente:

$$\frac{dx(t)}{dt} + a \cdot x(t) = f(t) \tag{1}$$

Aunque existen varias técnicas para resolver dicha ecuación se mostrará una solución general, que se utilizará para el análisis transitorio.
Un teorema fundamental de las ecuaciones diferenciales estaplece que si $x(t) = x_p(t)$ es una solución de (1) y $x(t) = x_c(t)$ es una solucion de la ecuación homogénea:

$$\frac{dx(t)}{dt} + a \cdot x(t) = 0 \tag{2}$$

entonces:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \tag{3}$$

Es una solución de la ecuación original (1). El término $x_p(t)$ es llamado "la solución integral particular.º respuesta forzada y $x_c(t)$ es llamada "la solución complementaria.º respuesta natural.

Si por el momento se considera $f(t) = A$ (i.e. una constante). La solución de la ecuación diferencial consiste de 2 partes que se obtienen al resolver las 2 ecuaciones:

$$\frac{x_p(t)}{dt} + a \cdot x_p(t) = A \tag{4}$$

$$\frac{x_p(t)}{dt} + a \cdot x_p(t) = 0 \tag{5}$$

Como el lado derecho de (4) es una constante, es razonable suponer que la solución también será una constante:

$$x_p(t) = K_1 \tag{6}$$

Sustituyendo (6) en (4) se tiene que:

$$K_1 = \frac{A}{a} \tag{7}$$

de 5 observamos que:

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = -a \cdot x_c(t) \longrightarrow \frac{dx_c(t)}{dt} = -a \cdot dt \tag{8}$$

$$\int \frac{dx_c(t)}{dt} = \int -a \cdot dt \longrightarrow \ln \left[x_c(t)\right] = -a \cdot t + c$$

$$e^{\ln \left[x_c(t)\right]} = e^{(-a \cdot t + c)} = x_c(t) = e^{-a \ t} \cdot e^c = k_2 \cdot e^{-a \cdot t} \tag{9}$$

Por lo tanto, la solución de (1) es:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) = \frac{A}{a} + k_2 \cdot e^{-a \ t} \tag{10}$$

lo cual puede expresarse como:

$$x(t) = k_1 + k_2 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} \tag{11}$$

Para la solución (11), algunos elementos reciben los siguientes nombres (comunes en ingeniería eléctrica). K : Solución de estado estable (steady-state solution) que corresponde cuando el valor de la variable $x(t)$ cuando $t \to \infty$ y el 2^o término se vuelve despreciable. $\boldsymbol{\tau}$: Se conoce como la constante de tiempo del circuito, observe que el 2^o término de (11) decae exponencialmente (siempre que τ sea mayor que 0), vale k_2 para $t = 0$ y vale 0 cuando $t \to \infty$.

La razón de decaimiento está determinada por el valor de la constante de tiempo τ.

6.5. Técnicas de análisis

6.5.1. Método de ecuaciones diferenciales

Puesto que la solución representada por la ecuación (11) describe una corriente o voltaje desconocidos en cualquier parte de la red, una manera en que se puede llegar a dicha solución es resolviendo las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento de dicha red empleando el llamado método de "variables de estado", en donde se resuelven las ecuaciones que describen el voltaje a través de un capacitor y/o la ecuación de corriente en un inductor. Debe recordarse que dichas cantidades no cambian de manera instantánea (oposición a los cambio debido a los elementos reactivos).

Ejemplo: Para el circuito de la figura 1, en el tiempo t = 0 se cierra el interruptor.
Empleando la LVK que describe el voltaje del capacitor para t > 0, se tiene:

$$-v_s + v_r + v_c = 0 \longrightarrow -v_s + i \cdot R + v(t)$$

recordando que para un capacitor

$$i_c = C \cdot \frac{dv_c}{dt}$$

Y como la corriente es la misma para los elementos en serie:

$$i = i_c$$

$$-v_s + R \cdot C \cdot \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = 0$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R\ C} = \frac{V_s}{R\ C}$$

La solución para dicha ecuación diferencial es de la forma:

$$v(t) = k_1 + k_2 \cdot e^{-t/\tau}$$

Sustituyendo la solución en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$\frac{-k_2}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} + \frac{k_1}{R\ C} + \frac{k_2}{R\ C} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{v_s}{R\ C} \longrightarrow \frac{k_1}{R\ C} + \frac{k_2}{R\ C} \cdot e^{-t/\tau} = \frac{v_s}{R\ C} + \frac{k_2}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$

igualando los términos constantes y los términos exponenciales se obtiene:

$$k_1 = V_s$$

$$\tau = R \cdot C$$

Por lo tanto:

$$v(t) = v_s + k_2 \cdot e^{-t/\tau}$$

En donde v_s es el valor en "estado establez RC es la constante de tiempo de la red. k_2 está determinada por la condición inicial del capacitor. Por ejemplo, si el capacitor esta descargado inicialmente (esto es, el voltaje a través del capacitor es cero en t = 0), entonces:

$$0 = v_s + k_2$$

Por lo tanto la solución completa para el voltaje $v(t)$ es:

$$v(t) = v_s - v_s \cdot e^{-t/RC}$$

Para el circuito mostrado a continuación, se puede proceder de forma similar:
Empleando de nueva cuenta la LVK para t>0, se tiene

$$-v_s + v_R + v_L = 0$$

$$-v_s + i \cdot R + L \cdot \frac{di_L}{dt} = 0$$

$$\therefore L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = v_s$$

Empleando el mismo desarrollo del problema previo

$$i(t) = \frac{v_s}{R} + k_2 \cdot e^{-(R/L) \cdot t}$$

en donde V_s/R es el valor en estado estable y L/R es la constante de tiempo del circuito. Si no hay corriente inicial en el inductor, entonces en $t = 0$.

$$0 = \frac{v_s}{R} + k_2 \rightarrow k_2 = \frac{-v_s}{R}$$

por tanto:

$$i(t) = \frac{v_s}{R} + \frac{v_s}{R} \cdot e^{(-R/L) \cdot t}$$

y como

$$v_R = R \cdot i(t)$$

$$v_R(t) = v_s(1 - e^{-(R/L) \cdot t})$$

Para el circuito en la figura (5), $i(t) = 4\,(2 - e^{-10t})$ mA.
Si $i_2(0)$ = -1 mA, encuentre:

1. $i_1(0)$
2. $v_(t)$, $v_1(t)$ y $v_2(t)$
3. $i_1(t)$ y $i_2(t)$

Solución

$$i(0) = 4mA$$

puesto que

$$i = i_1 + i_2 \longrightarrow i_1(0) = i(0) - i_2(0) = 4mA - (-1mA) = 5mA$$

b) la inductancia equivalente es:

$$L_{eq} = \big[4 + 4//12\big]H = \left[4 + \frac{4 \times 12}{4 + 12}\right]H = \left[4 + \frac{48}{16}\right]H = \big[4 + 3\big]H = 7H$$

entonces:

$$v(t) = L_{eq} \cdot \frac{di}{dt} = 7(4)(-1)(-10) \cdot e^{-10t} mV = 280 \cdot e^{-10t} mV$$

puesto que $v = v_1 + v_2$

$$v_2(t) = v(t) - v_1(t) = e^{-10t} \cdot [280 - 80]\ mV = 200 \cdot e^{-10t}\ mV$$

c) la corriente i_1 se obtiene por medio de:

$$i_1(t) = \frac{1}{4} \int_0^t v_2(t)\, dt + i_1(0) = \frac{200}{4} \cdot \int_0^t e^{-10t}\, dt + 5mA$$

$$i_1 = -5 \cdot e^{-10t} \Big]_0^t + 5mA = -5 \cdot e^{-10t} + 5mA + 5mA = 10 - 5 \cdot e^{-10t}$$

Similarmente

$$i_2(t) = \frac{1}{12} \cdot \int_0^t v_2(t)\, dt + i_2(0) = \frac{200}{12} \cdot \int_0^t e^{-10t}\, dt - 1mA$$

$$i_2 = \frac{-5}{3} \cdot e^{-10t} \Big]_0^t - 1mA = \frac{-5}{3} \cdot e^{-10t} + \frac{5}{3} mA - 1mA = \frac{2}{3} - \frac{5}{3} \cdot e^{-10t}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

6.6. Funciones singulares

Para auxiliar la comprensión del análisis transitorio es necesario tener un conocimiento básico de las funciones singulares, que se utilizan para describir la aplicación repentina de fuentes de voltaje o corriente. Las funciones singulares (también conocidas como funciones de conmutación) proporcionan una buena aproximación de las señales que surgen en los circuitos cuando se realizan operaciones de conmutación.

Las funciones singulares son discontinuas o tienen derivadas discontinuas. Las tres funciones singulares más ampliamente utilizadas en análisis de circuitos son las funciones *escalón, impulso unitario* y *rampa unitaria.* La función escalón *u(t)* es 0 para valores negativos de t y 1 para valores positivos de t.

En términos matemáticos.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La función escalón está definida en t = 0, en donde cambia abruptamente de 0 a 1. Es adimensional, como otras funciones matemáticas tales como el seno y el coseno. Si el cambio abrupto ocurre en $t = t_0$ (en donde $t_0 > 0$) en lugar de $t = 0$, la función escalón se vuelve:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ 1 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

que es equivalente a decir que u(t) se retraza t_0 segundos, para obtener la ecuación que representa esta función, simplemente se reemplaza t por $t - t_0$. Si el cambio es en $t = -t_0$, la función escalón se vuelve:

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < -t_0 \\ 1 & \text{si } t > -t_0 \end{cases}$$

La función escalón se utiliza para representar un cambio abrupto de voltaje o corriente, como los cambios que ocurren en los circuitos de sistemas de control y sistemas digitales, por ejemplo el voltaje:

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 \\ V_0 & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

Que puede ser expresada en términos de la función escalón como: $V(t) = V_0 \cdot u(t - t_0)$

Si se elige $t_0 = 0$, entonces $V(t)$ es simplemente el voltaje de escalón $V_0 \cdot u(t)$, como la mostrada en el diagrama siguiente.

Para una fuente de corriente se tiene:

Problemas

Exprese el impulso de voltaje mostrado en la figura con ayuda de la función escalón, calcule su derivada y dibuje las respuestas.

Esta función es llamada función compuerta y puede interpretarse como una función escalón que se enciende a un valor de t y se apaga en otro valor de t. Para el ejemplo se enciende en t = 2s y se apaga en t = 5s.

La señal corresponde a la suma de 2 funciones unitarias, como se muestra en la siguiente figura.

De esta ultima figura se desprende claramente que:

$$v(t) = 10 \cdot u(t-2) - 10 \cdot u(t-5) = 10[u(t-2) - u(t-5)]$$

Al tomar la derivada de esta expresión se obtiene

$$\frac{dv}{dt} = 10 \cdot [\delta(t-2) - \delta(t-5)]$$

6.6.1. Función impulso unitario

La derivada de la función escalón unitario $u(t)$ es la función impulso unitario $\delta(t)$.

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

La función **impulso unitario** $\delta(t)$ vale 0 siempre, excepto en $t = 0$ en donde esta indefinida.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \text{Indefinida} & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si} t > 0 \end{cases}$$

Se tiene por definición:

$$\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\, dt = 1$$

Se pueden tener retrasos o bien adelantos.

$$\int_a^b f(t) \cdot \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0)$$

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)\, dt = f(0)$$

La integración de la función escalón unitario $u(t)$ da por resultado la función rampa unitaria $r(t)$ y se escribe:

$$\int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda = t \cdot u(t)$$

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La función rampa unitaria vale 0 para valores negativos de t y tiene una pendiente unitaria para valores positivos de t.

$$r(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_0 \\ t - t_0 & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

$$r(t + t_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -t_0 \\ t + t_0 & \text{si } t \geq -t_0 \end{cases}$$

Las tres funciones singulares se relacionan por diferenciación.

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}, \quad u(t) = \frac{dr(r)}{dt}$$

O bien por integración:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda)\, d\lambda, \qquad r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\lambda)\, d\lambda$$

6.6.2. Circuito RC sin fuente

Este circuito modela el caso en el que una fuente de c.d. se desconecta del circuito RC en forma súbita. Para este caso se considera entonces que el capacitor tiene una carga inicial y por lo tanto presenta un voltaje inicial.

$$v(0) = v_0$$

Y su energía almacenada correspondiente es:

$$W(0) = \frac{1}{2} C {V_0}^2$$

Empleando la LCK en el nodo del circuito:

$$i_c + i_R = 0$$

$$ycomo:$$

$$i_c = C\ \frac{dv}{dt}$$

y además

$$i_R = \frac{v}{R}$$

$$C\ \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{RC}\ v = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de 1^{er} orden y al reacomodarla queda la manera siguiente:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}\ dt \longrightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\, dt$$

$$e^{Ln(\frac{v}{v_0})} = e^{-t/RC} \longrightarrow \frac{v}{v_0} = e^{-t/RC} \longrightarrow v = v_0 \cdot e^{-t/RC}$$

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-t/\tau} \qquad \text{(Respuesta Natural)}$$

en donde:
τ = RC: Constante de tiempo.

La respuesta natural de un circuito se refiere al comportamiento (en término de voltajes y corrientes) del circuito, sin fuentes externas de excitación.

El circuito tiene respuesta debido a la energía almacenada originalmente en el capacitor.

6.6.3. Circuito RL sin fuente

Ahora se tiene el caso de un circuito en donde se conectan en serie un inductor y un resistor y se pretende obtener la respuesta del circuito, que se asume será la corriente a través del inductor. Se selecciona la corriente del inductor ya que no puede cambiar instantáneamente, por lo que se supone que en $t = 0$ el inductor tendrá una corriente inicial I_0.

$$i(0) = I_0$$

Con la correspondiente energia

$$w(0) = \frac{1}{2} L{I_0}^2$$

Al aplicar la LVK

$$v_L + v_R = 0$$

pero:

$$v_L = L\frac{di}{dt}$$
$$v_R = i \cdot R$$

Se tiene que:

$$L \cdot \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

o sea:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

La reordenación de los términos y la integración dan como resultado:

$$\int_{I_0}^{i(t)} \frac{di}{i} = -\int_0^t \frac{R}{L}\,dt$$

$$Ln(i)\Big]_{I_0}^{i(t)} = -\frac{Rt}{L}\Big]_0^t \longrightarrow Ln(i) - Ln(I_0) = -\frac{Rt}{L} + 0$$

o sea:

$$Ln\left(\frac{i(t)}{I_0}\right) = -\frac{Rt}{L} \longrightarrow i(t) = I_0 \cdot e^{-Rt/L}$$

$$Entoncessetiene:$$

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

6.6.4. Respuesta al escalón unitaria de un circuito RC

La respuesta al escalón de un circuito RC es su comportamiento cuando la excitación es la función escalón (step), que puede ser una fuente de voltaje o corriente.

Como el voltaje del capacitor no puede cambiar de manera instantánea:

$$V(0^-) = V(0^+) = V_0$$

Aplicando la LCK el circuito del lado derecho.

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v - v_s u(t)}{R} = 0 \longrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{v_s u(t)}{RC}$$

para t>0 la ecuación diferencial es:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = \frac{v_s}{RC} \longrightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{v_s - v}{RC} = -\frac{(v - v_s)}{RC}$$

$$\frac{dv}{v-v_s}=\frac{-1}{RC}\cdot dt \longrightarrow \int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v-v_s}=\int_0^t\frac{-1}{RC}\,dt \longrightarrow Ln(v-v_s)\Big]_{v_0}^{v}=\frac{-1}{RC}t\Big]_0^t$$

$$Ln(v-v_s)-Ln(v_0-v_s)=-\frac{t}{RC}=Ln\left(\frac{v-v_s}{v_0-v_s}\right)\longrightarrow e^{[Ln(\frac{v-v_s}{v_o-v_s})]}=e^{-t/RC}$$

$$v-v_s=(v_0-v_s)\cdot e^{-t/RC}\longrightarrow v=v_s+(v_0-v_s)\cdot e^{-t/RC}$$

En términos matemáticos.

$$v(t)=\begin{cases} v_o & \text{si } t<0\\ v_s+(v_0-v_s)e^{-t/\tau} & \text{si } t>0\end{cases}$$

$$i(t)=C\frac{dv}{dt}=C\cdot\frac{d}{dt}\big[v_s+(v_0-v_s)e^{-t/\tau}\big]=-C\cdot V_se^{-t/\tau}\cdot-\frac{1}{\tau}\longrightarrow i(t)=\frac{v_s}{R}\cdot e^{-t/\tau}\cdot u(t)$$

(para t>0)

Un método más directo para encontrar la respuesta al escalón de un circuito RC ó RL es el siguiente:

$$v=v_f+v_n$$

$$v_f=v_s,\quad v_n=(v_0-v_s)\cdot e^{-t/\tau}$$

v_f: Respuesta forzada (producida por el circuito cuando se le aplica una excitación externa), también se le conoce como respuesta en estado estable, porque se mantiene mucho tiempo después de que el circuito excitado. v_n: Respuesta natural del circuito, esta parte de la respuesta decae hasta casi cero después de cinco constantes de tiempo. También se le conoce como respuesta transitoria porque es una respuesta temporal que desaparecerá con el tiempo.

La respuesta total del circuito es la suma de la respuesta natural y la respuesta forzada, es decir:

$$v(t)=v(\infty)+[v(0)-v(\infty)]\cdot e^{-t/\tau}$$

en donde:

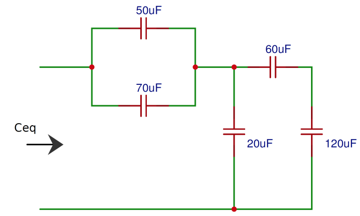
$v(0)$: voltaje inicial en $t=t(0^+)$ $v(\infty)$: voltaje final o de estado estable.

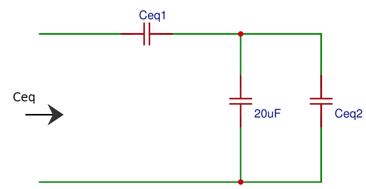
Para calcular la respuesta al escalón RC se requieren 3 cosas:

1. El voltaje inicial del capacitor $v(0)$
2. El voltaje final del capacitor $v(\infty)$
3. La constante de tiempo τ

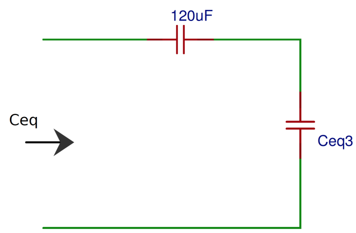
Si el interruptor cambia de posición en $t=t_0$ (en lugar de $t=0$), se utiliza:

$$v(t)=v(\infty)+[v(t_0)-v(\infty)]\cdot e^{-(t-t_0)/\tau}$$

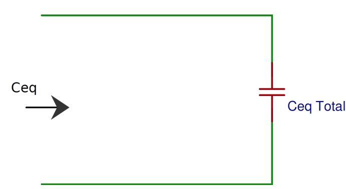




$$C_{eq1} = 50\mu F + 70\mu F \mid C_{eq2} = \frac{(60\mu F)(120)\mu f)}{(60{+}120)\mu F} = 40\mu F$$



$$C_{eq3} = 40\mu F + 20\mu F = 60\mu F$$



$$C_{eqTotal} = \frac{(60\mu F)(120)\mu f)}{(60{+}120)\mu F} = \boxed{40\mu F}$$

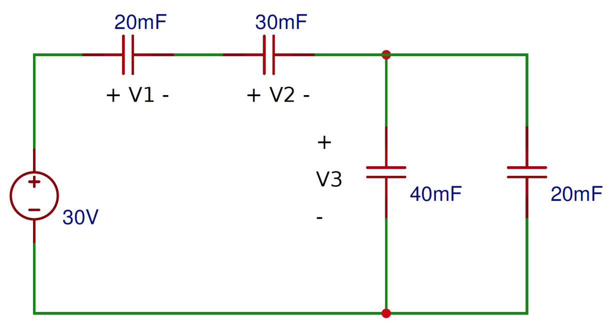
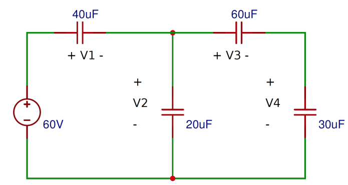
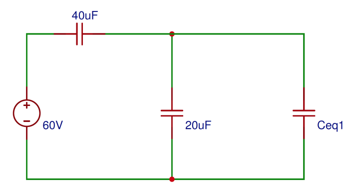
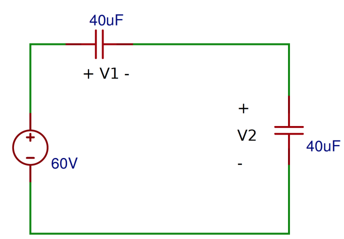


Figura 6.9





$$C_{eq1} = \frac{(30\mu F)(60\mu F)}{90\mu F} = 20\mu F$$

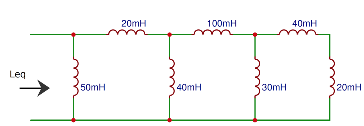


$$v_1 = v_2 = 30V$$

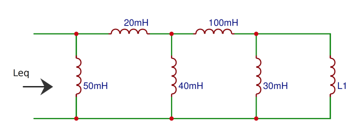
$$C_{eq} = \frac{(40\mu F)(40\mu F)}{80\mu F} = 20\mu F$$

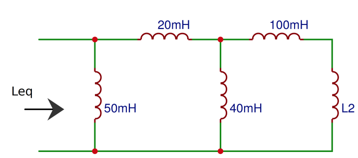
$$q = C_{eq} \cdot V = (20\mu F)(60V) = 1.2mC$$

$$v_1 = \frac{q}{c_1} = \frac{1.2mC}{40\mu F} = \boxed{30V}$$

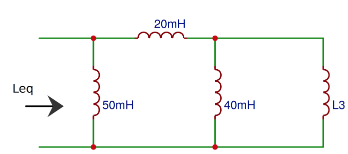


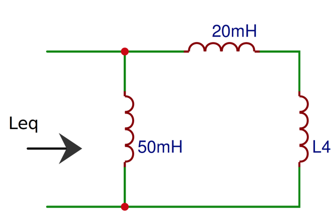
$\Rightarrow$



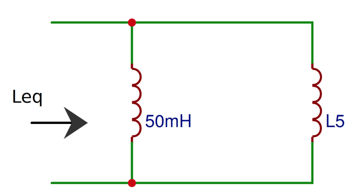


$\Rightarrow$

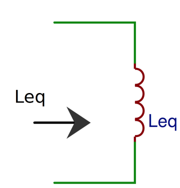




$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



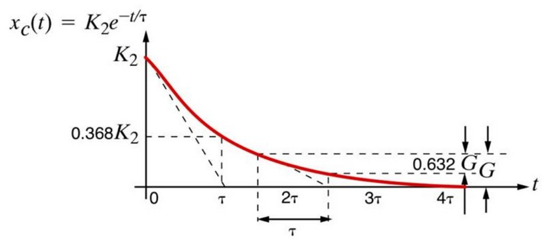


Figura 6.10: Decaimiento de la señal en función de la constante de tiempo.

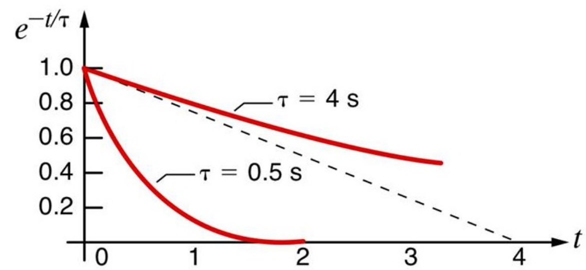


Figura 6.11: Constantes de tiempo lenta (4 s) y rápida (0.5 s).

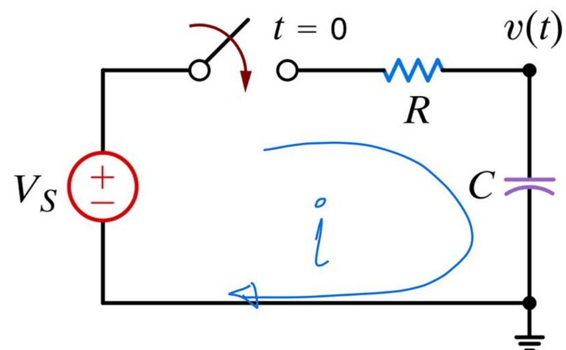


Figura 6.12: Circuito RC.

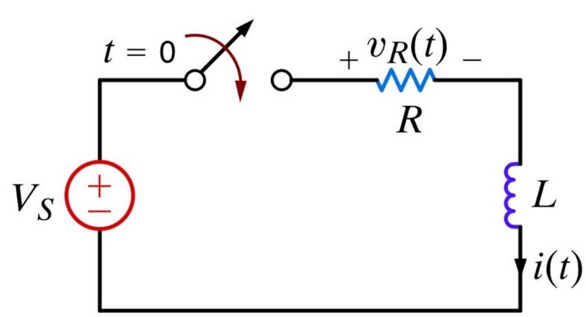


Figura 6.13: Circuito RL.

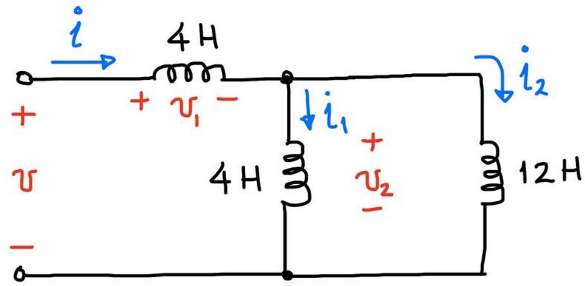


Figura 6.14: Circuito RL.

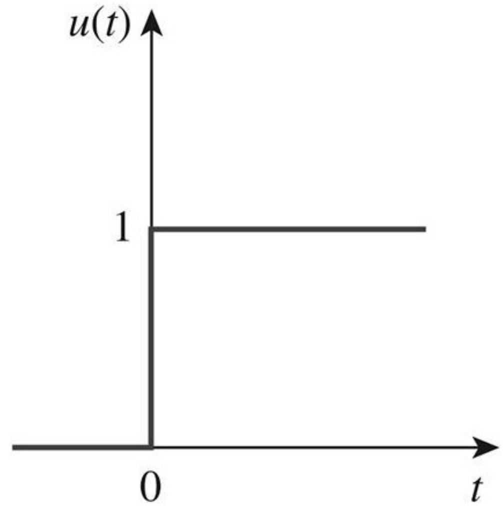


Figura 6.15: Función escalón unitario (función de Heaviside).

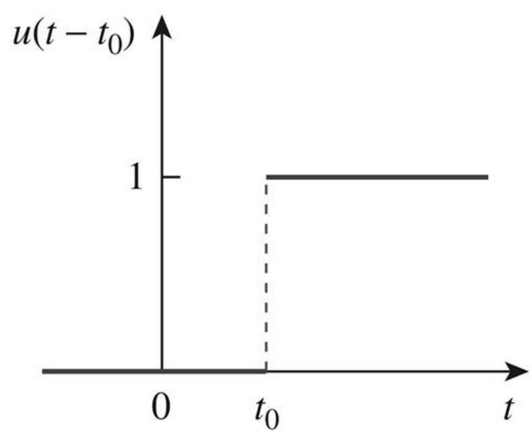


Figura 6.16: Función escalón desplazada t_0.

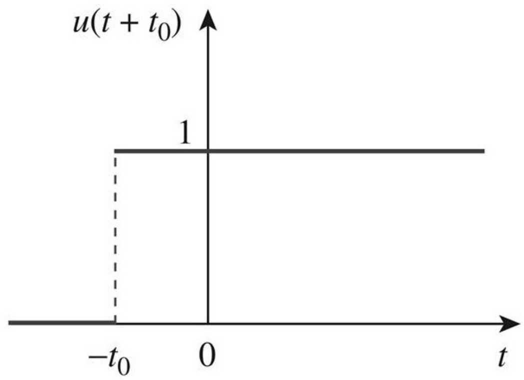


Figura 6.17: Función escalón adelantada en t_0.

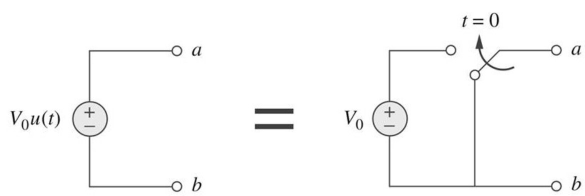


Figura 6.18: Función escalón con fuente de voltaje.

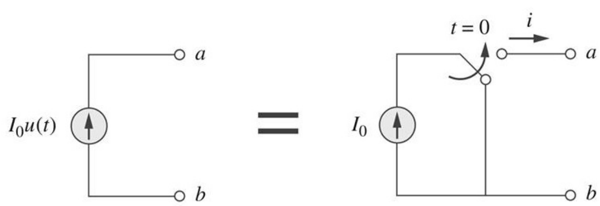


Figura 6.19: Función escalón con fuente de corriente.

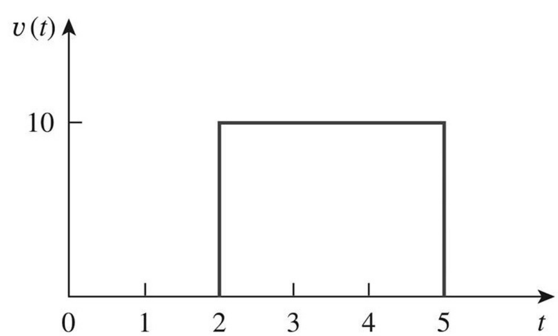


Figura 6.20: Función compuerta.

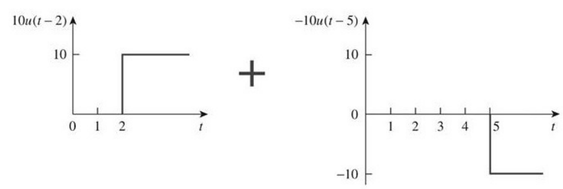


Figura 6.21: Función compuerta como suma de dos funciones escalón.