2016

Señales y Sistemas Ingeniero en Electrónica FIAD

Juan de Dios Sánchez López

Apuntes de la materia de Señales y Sistemas

UABC-FIAD
01/01/2016

Contenido

UNIDAD I

CLASIFICACIÓN DE SEÑALES Y SISTEMAS

Señales

Las señales pueden describir una variedad muy amplia de fenómenos físicos, y aunque se pueden representar de muchas formas, en todo caso la información dentro de una señal está contenida en un patrón de variaciones de alguna forma.

Por ejemplo, el mecanismo vocal humano produce el habla mediante la creación de fluctuaciones de la presión acústica. Así, los diferentes sonidos corresponden a diferentes patrones en las variaciones de la presión acústica, y el sistema vocal humano produce una voz inteligible generando secuencias diferentes de esos patrones. Las variaciones de presión acústica se convertirán después en señal eléctrica.

Es decir, una señal no va a ser más que una función de una o unas variables independientes que contiene información acerca de la naturaleza o comportamiento de algún fenómeno. Así, por ejemplo, la señal de voz se representa de forma matemática por la presión acústica como una función del tiempo.

Hay dos tipos básicos de señales, de tiempo continuo y de tiempo discreto.

En el caso de las señales de tiempo continuo la variable independiente es continua y entonces estas señales están definidas para una sucesión continua de valores de la variable independiente.

De otra parte, las señales de tiempo discreto están sólo definidas en tiempos discretos y en consecuencia para estas señales, la variable independiente toma solo un conjunto de valores discretos.

Ejemplo de señales de tiempo continuo es una señal de voz como función del tiempo y la presión atmosférica como función de la altitud.

Para distinguir entre las señales de tiempo continuo y las de tiempo discreto se usarán los símbolos t y n respectivamente. Además, para las señales de tiempo continuo la variable independiente se encerrará entre paréntesis y para las de tiempo discreto se usará el corchete.

Una señal o secuencia de tiempo discreto $x[n]$ puede representar un fenómeno para el cual la variable independiente es inherentemente discreta. También puede representar muestras sucesivas de un fenómeno para el cual la variable independiente es continua.

Por ejemplo, el procesamiento de la voz en una computadora digital requiere del uso de una secuencia discreta que represente los valores de la señal de voz de tiempo continuo en puntos discretos en el tiempo.

Sin embargo, no importa cual sea el origen de los datos, la señal $x[n]$ está definida solo para valores enteros de n.

Ejemplo 1.

La temperatura promedio diaria en la ciudad de Ensenada, medida en una semana, es una función de variable discreta y se puede representar gráficamente, veamos: Supongamos que la función está descrita por la siguiente secuencia: {20,25,23,26,24,21,25}.

A continuación representamos gráficamente la función.

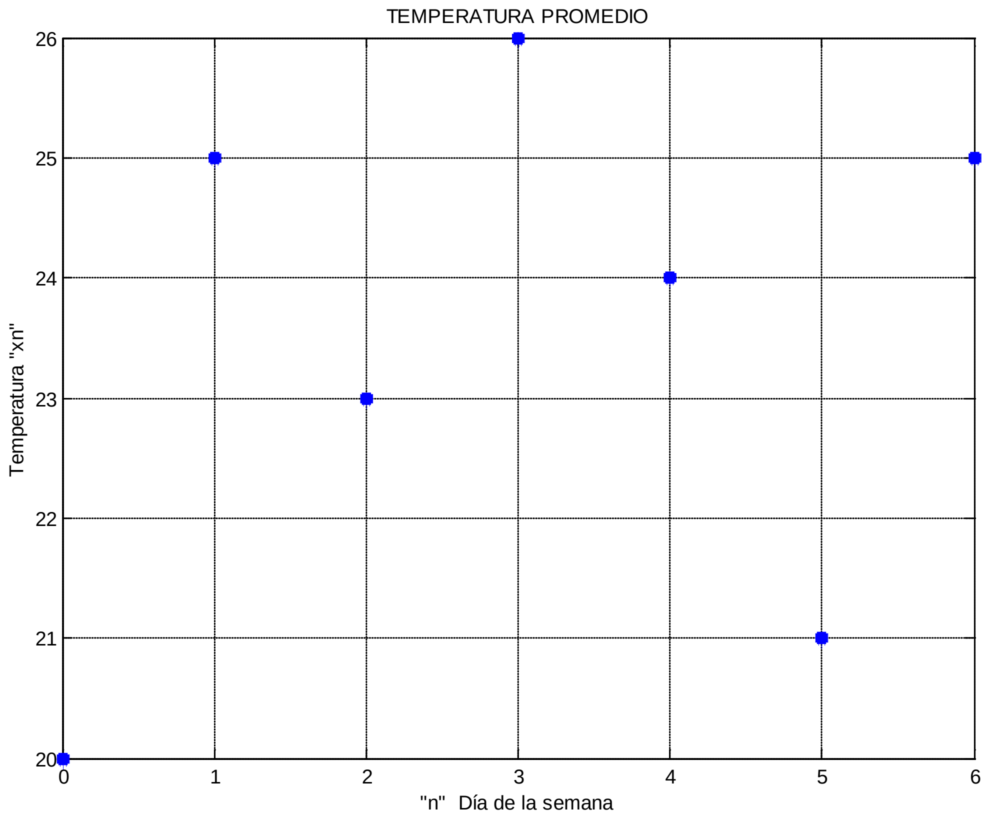


Figura No 1 Ejemplo de señal discreta

Transformaciones de la variable independiente

En muchas situaciones es importante considerar señales relacionadas mediante una modificación de la variable independiente. Por ejemplo, como se muestra en la figura siguiente, la señal $x[-n]$ se obtiene a partir de $x[n]$ mediante una reflexión alrededor de $n = 0$.

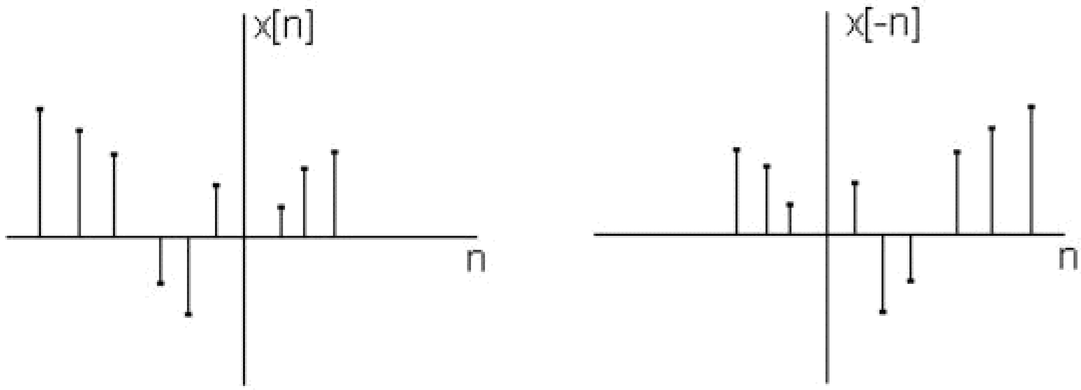


Figura No 2. Inversión en el Tiempo (Señal de Tiempo discreto)

Similarmente, en la figura siguiente, $x(-t)$ se obtiene a partir de $x(t)$ mediante una reflexión alrededor de $t = 0$. Esto es, si $x(t)$ representa una señal de audio en una grabadora de cinta, entonces $x(-t)$ es la misma grabación pero representada en sentido contrario.

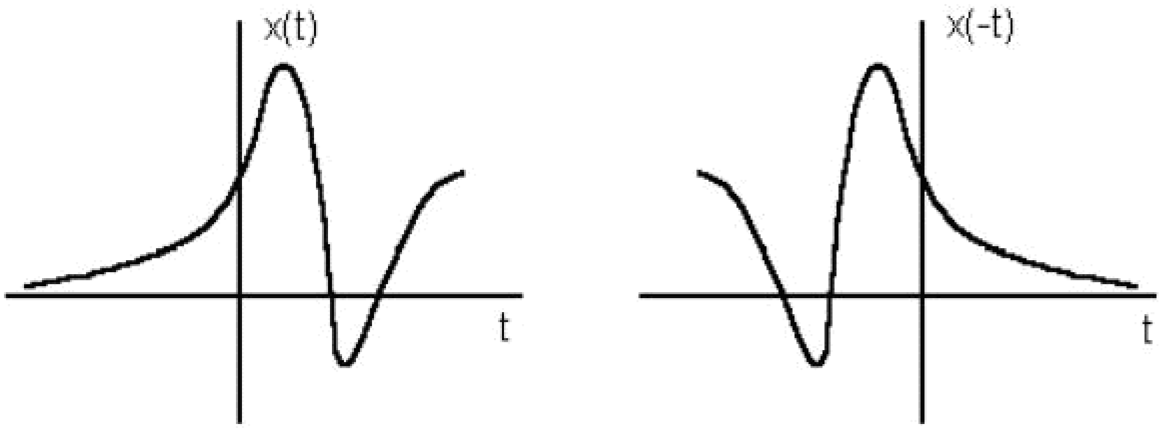


Figura No 3. Inversión en el Tiempo (Señal de Tiempo continuo)

Igualmente, $x(2t)$ seria la grabación reproducida al doble de velocidad y $x(t/2)$ la grabación reproducida a media velocidad.

Otro ejemplo es una transformación en la que se tienen dos señales $x[n]$ y $x[n-n_0]$ que son idénticas en forma pero que están desplazadas o corridas una con respecto a la otra. De forma similar $x(t-t_0)$ representa una versión de $x(t)$ desplazada en el tiempo.

Una señal $x(t)$ o $x[n]$ es una señal **par** si es idéntica a su reflexión alrededor del origen, es decir, si:

$$x(-t) = x(t) \quad \text{ó} \quad x[-n] = x[n]$$

Una señal es **impar** si:

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{ó} \quad x[-n] = -x[n]$$

Un hecho importante es que cualquier señal se puede separar en la suma de dos señales, una de las cuales es par y la otra es impar. Así :

$$x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \qquad\qquad x(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

Donde la primera expresión es una señal par y la segunda expresión es una señal impar.

Nos limitaremos en este capítulo a señales en tiempo discreto.

Sistemas.

Un sistema se puede ver como cualquier proceso que produce una transformación de señales. Entonces un sistema tiene una señal de entrada una señal de salida la cual está relacionada con la entrada a través de la transformación del sistema.

Nos interesan tanto sistemas en tiempo continuo como en tiempo discreto.

Un sistema de tiempo continuo es aquel en el que las señales de entrada de tiempo continuo son transformadas en señales de salida de tiempo continuo. Tales sistemas se señalan en forma gráfica como:

Figura No 4. Representación a bloques de un sistema de tiempo continuo

De forma similar, un sistema de tiempo discreto, transforma entradas de tiempo discreto en salidas de tiempo discreto, así:

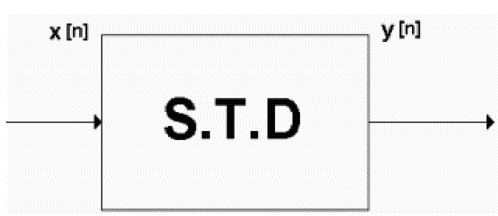


Figura No 5 Representación a bloques de un sistema de tiempo discreto

Los sistemas se pueden conectar en serie, en paralelo, o en serie – paralelo como en los diagramas siguientes:

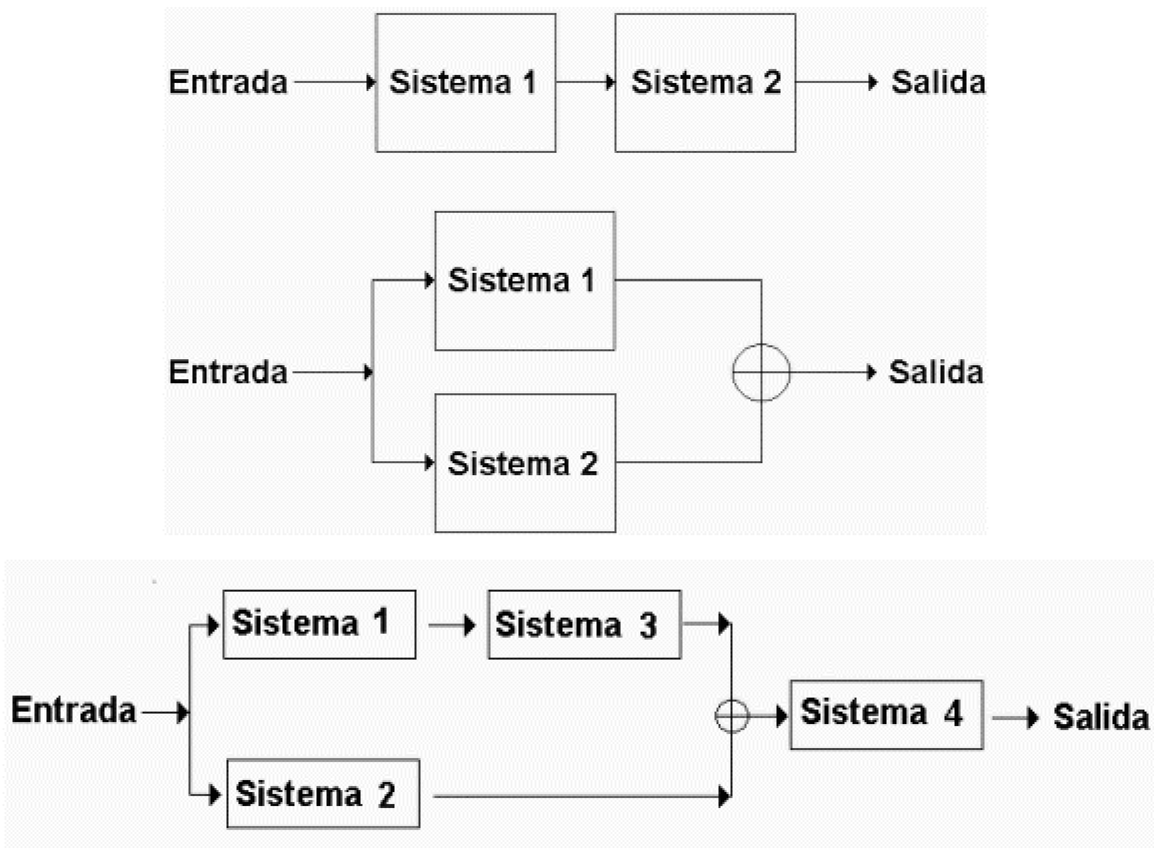
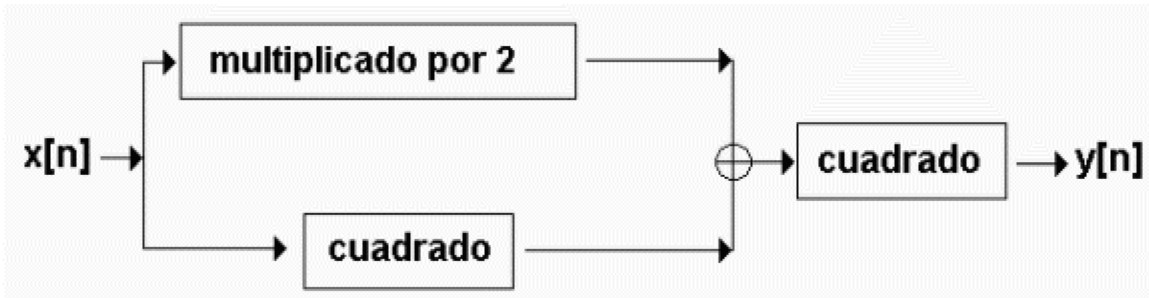


Figura No 6. a) Sistemas en paralelo; sistemas combinados en cascada/paralelo

El símbolo denota que la suma o adición es la suma de la salida de los sistemas.

Se pueden diseñar sistemas para, por ejemplo, calcular expresiones aritméticas complicadas, como el que ilustra el siguiente diagrama para el cálculo de:

$$y[n] = \left(2x[n] - x[n]^2\right)^2 \quad \text{así :}$$



Otro tipo de sistema es la interconexión de retroalimentación como en la siguiente figura.

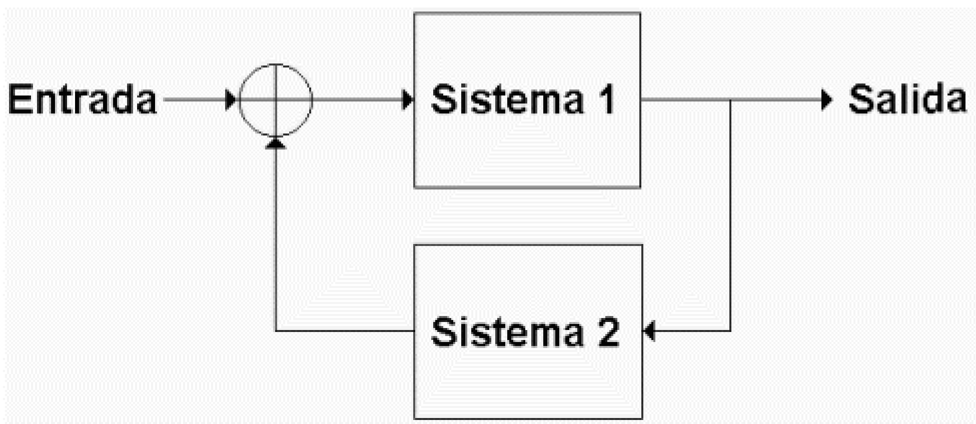


Figura No 7 Sistema con realimentación

Acá la salida del sistema 1 es la entrada al sistema 2, mientras que la salida del sistema 2 se retroalimenta y se suma a la entrada externa para producir la entrada actual al sistema 1.

Sistemas con y sin memoria.

Se dice que un sistema es sin memoria si su salida para cada valor de su variable independiente depende sólo de la entrada en ese mismo instante de tiempo. Por ejemplo el sistema que ilustra la ecuación:

$$y[n] = \left(2x[n] - x[n]^2\right)^2$$

es sin memoria, ya que el valor de $y[n]$ en un instante n depende sólo del valor de $x[n]$ en ese mismo instante.

Un resistor es un sistema sin memoria, así la relación entrada - salida es de la forma:

$$y(t) = R \cdot x(t)$$

Donde R es resistencia, $x(t)$ es corriente y $y(t)$ es voltaje.

Un ejemplo de un sistema con memoria es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

Otro ejemplo es: $y(t) = x(t-1)$

Un capacitor es otro ejemplo de un sistema con memoria, ya que

$$y(t) = \frac{q}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Donde C es capacitancia, $x(t)$ es corriente y $y(t)$ es voltaje.

Invertibilidad.

Se dice que un sistema es invertible si distintas entradas producen distintas salidas. Dicho de otra forma, un sistema es invertible si al observar su salida podemos determinar la entrada.

Por ejemplo, $y(t) = 2x(t)$, entonces su sistema inverso es $z(t) = \frac{1}{2}y(t)$.

Al interconectarlos en serie se obtiene la entrada original como salida.

Otro ejemplo de sistema invertible es el dado por la ecuación:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

Para este sistema, la diferencia entre dos valores sucesivos de salida es precisamente el último valor de entrada. Por tanto, en este caso el sistema inverso es:

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

$$x[n] \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \longrightarrow z[n] = y[n] - y[n-1] \longrightarrow z[n] = x[n]$$

Causalidad.

Un sistema es causal si su salida en cualquier instante de tiempo depende sólo de los valores de la entrada en el tiempo presente y en el pasado. Tal sistema es llamado no anticipativo, ya que la salida no anticipa valores futuros de la entrada.

El movimiento de un automóvil es causal ya que no anticipa acciones futuras del conductor.

$$y(t) = x(t-1)$$

y

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

Son sistemas causales.

$$y[n] = x[n] - x[n+1]$$

y

$$y(t) = x(t+1)$$

No son sistemas causales.

Estabilidad.

Intuitivamente, un sistema estable es aquel en el que entradas pequeñas conducen a respuestas que no divergen.

Es decir, si la entrada a un sistema es limitada, entonces la salida debe ser también limitada y por tanto no debe diverger.

El sistema descrito por $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ con $x[n]=u[n]$;

Por tanto $y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} u[k]=(n+1)u[n]$

es un sistema inestable

Es decir, $y[0]=1$, $y[1]=2$, $y[2]=3$ y $y[n]$ crece sin límite.

Invarianza en el tiempo.

Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento en tiempo de la señal de entrada causa un desplazamiento en tiempo de la señal de salida.

Es decir, si y[n] es la salida cuando x[n] es la entrada, entonces $y[n-n_0]$ es la salida cuando se aplica $x[n-n_0]$.

Ejemplo: sea y(t)=sen x(t)

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)= x_1(t - t_o)$ dos entradas desplazadas en el tiempo.

$$y_1(t) = \text{sen } x_1(t)$$

$$y_2(t) = \text{sen } x_2(t) = \text{sen } x_1(t - t_0)$$

$$y_1(t - t_0) = \text{sen } x_1(t - t_0)$$

O sea que $y_2(t) = y_1(t - t_0)$.

O sea que el sistema es invariante en el tiempo.

Ejemplo. Sea el sistema de tiempo discreto descrito por: $y[n] = nx[n]$

Y consideremos dos entradas $x_1[n]$ y $x_2[n]$ donde $x_2[n] = x_1[n - n_0]$.

$$y_1[n] = nx_1[n]$$

$$y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n - n_0]$$

$$y_1[n - n_0] = (n - n_0)x_1[n - n_0] \neq y_2[n]$$

Entonces el sistema es variante en el tiempo.

Linealidad.

Un sistema lineal en tiempo continuo o tiempo discreto, es aquel que posee la importante propiedad de superposición: Si una entrada consiste de la suma ponderada de varias señales, entonces la salida es sólo la superposición, esto es, la suma ponderada de las respuestas del sistema a cada una de estas señales.

Matemáticamente, el sistema es lineal si:

a) La respuesta a $x_1(t)+x_2(t)$ es $y_1(t)+y_2(t)$.

b) La respuesta a $ax_1(t)$ es $ay_1(t)$ donde *a* es una constante compleja.

Ejemplos: $y(t) = Rx(t)$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

Ejemplos de sistemas no lineales son los descritos por:

$$y(t) = x^2(t)$$

$$y(t) = \text{sen } x(t)$$

Por último, un sistema incremental lineal de tiempo continuo o discreto es aquel que responde de manera lineal a cambios de entrada.

Ejemplo: $y[n] = 2x[n] + 3$

Así, $y_1[n] - y_2[n] = 2(x_1[n] - x_2[n])$

Esto es, la diferencia entre las respuestas de un sistemas incremental lineal a cualquiera de dos entradas es una función lineal de la diferencia entre las dos entradas.

Hay que observar que y[n]=2x[n]+3 no es lineal.

Ejercicios

1. En el sistema descrito por z[n] = y[n] - y[n - 1], analizar:

a) LInealidad.
b) Invarianza en el tiempo.
c) Causalidad.

d) ¿El sistema tiene memoria?

e) Estabilidad.

2. En el sistema descrito por: $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ analizar los mismos aspectos del problema anterior.

3. En las siguientes secuencias, para que valores de la variable independiente la parte par de la señal es cero

a) $x[n] = u[n] - u[n-3]$

b) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$.

c) $x[n] = e^{-5n}u[n+2]$

4. Dada la señal discreta $x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k]$, determine los valores de los enteros M y n_0 de manera que x[n] se exprese como $x[n] = u[Mn - n_0]$.

5. Considere un sistema S con entrada x[n] y salida y[n] obtenido mediante la conexión en serie de $S_1 : y_1[n] = 2x_1[n] + 4x_1[n-1]$ y $S_2 : y_2[n] = x_2[n-2] + \frac{1}{2}x_2[n-3]$, donde $x_1[n]$ y $x_2[n]$ denotan señales de entrada. Determine la relación entrada-salida del sistema S.

6. Sea un sistema discreto cuya relación entrada salida es: $y[n] = x[n]x[n-2]$

a) ¿ El sistema es sin memoria?.

b) Determine la salida del sistema cuando la entrada es A □[n], donde A es un número real o complejo.

c) ¿El sistema es invertible?

7. Considere un sistema discreto con entrada x[n] y salida y[n] relacionadas mediante,

$$y[n] = \sum_{k=n-no}^{n+no} x[k]$$

donde n_o es un entero positivo finito.

a)¿ El sistema es sin lineal?.

b) ¿ El sistema es invariante en el tiempo?.

8. Determine cuál de las siguientes señales es o no periódica. Si la señal es periódica, determine su periodo fundamental.

a) $x[n] = e^{j7\pi n}$.

b) $x[n] = e^{\frac{j7\pi n}{5}}$

c) $x[n] = \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right)$.

d) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)$.

9. Cuál de los siguientes sistemas es invertible. Si alguno lo es, construya el sistema inverso. Si no, encuentre dos señales de entrada al sistema que den la misma salida.

a) $y[n] = nx[n]$.

b) $y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq 1 \end{cases}$

c) $y[n] = x[1-n]$

d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$

e) $y[n] = x[2-n]$

10. Considere un sistema S con entrada x[n] y salida y[n] relacionadas mediante $y[n]=x[n](g[n]+g[n-1])$

a) Si $g[n]=1$ para toda n, demuestre que S es invariante en el tiempo.
b) Si $g[n]=n$ para toda n, demuestre que S no es invariante en el tiempo.
c) Si $g[n]= 1+(-1)^n$ para toda n, demuestre que S es invariante en el tiempo.
d) En todos los casos anteriores, ¿el sistema será lineal?.

UNIDAD II

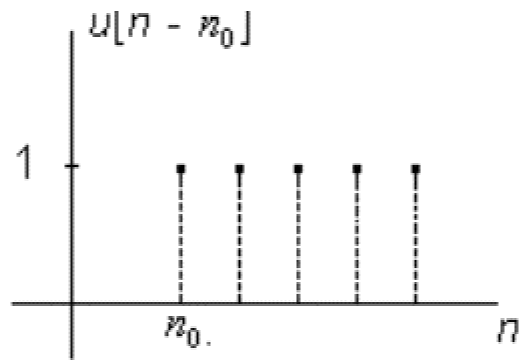
FUNCIONES GENERALIZADAS

Señales básicas de tiempo discreto.

Definiremos el escalón unitario de tiempo discreto como:

$$u[n - n_0] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \\ 1 & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

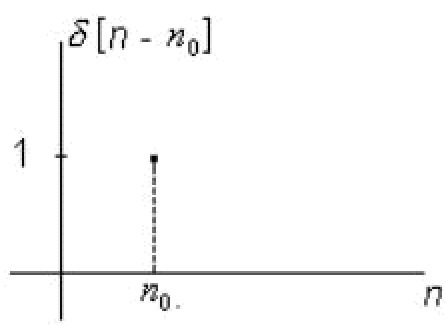
La secuencia se muestra así:



Definimos la muestra unitaria de tiempo discreto así:

$$\delta[n - n_0] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq n_0 \\ 1 & \text{si } n = n_0 \end{cases}$$

La gráfica es, entonces:



La muestra unitaria de tiempo discreto posee muchas propiedades.

Así:

$x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n]$ y $x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n - n_0]$

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

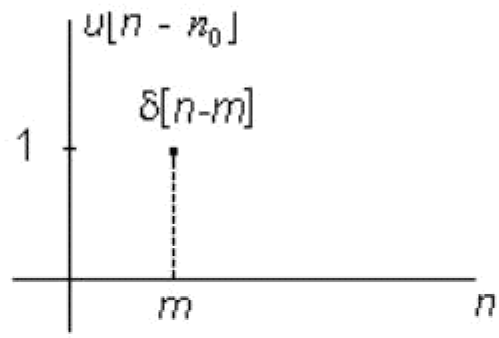
o sea que el impulso unitario de tiempo discreto es la primera diferencia del escalón de tiempo discreto.

En general dada una secuencia cualquiera x[*n*], podemos representarla en la forma siguiente:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m].$$

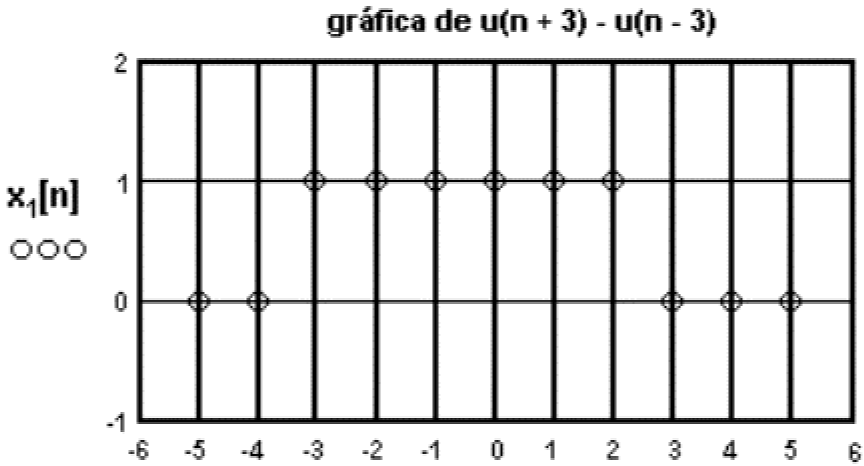
El escalón unitario de tiempo discreto es la sumatoria de la muestra unitaria.

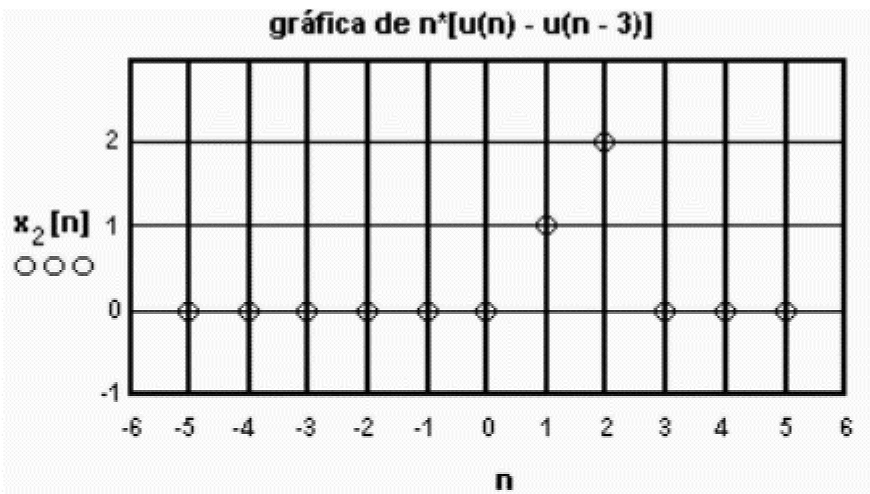
$$u[n-n_0] = \sum_{m=n_0}^{\infty} \delta[n-m].$$

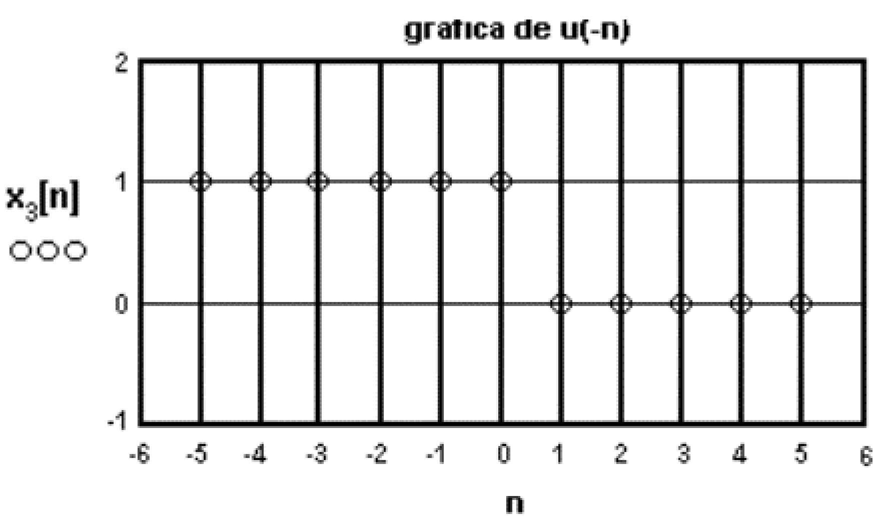


Ejemplo 2.
Representar gráficamente las siguientes funciones:

1. $x_1(n) = u(n+3) - u(n-3)$.
2. $x_2(n) = n(u(n) - u(n-3))$.
3. $X_3(n) = u(-n)$.
4. $X_4(n) = x_1(2n)$.


gráfica de u(n + 3) - u(n - 3)
x1[n]
2
1
0
-1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6


gráfica de n*[u(n) - u(n - 3)]
x2[n]
2
1
0
-1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
n


grafica de u(-n)
x3[n]
2
1
0
-1
-6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
n

Señales de tiempo discreto exponencial compleja y senoidal.

Al igual que en tiempo continuo, una señal importante en tiempo discreto es la señal o secuencia exponencial compleja definida por: $x[n] = C\alpha^n$ donde *C* y α son en general números complejos.

De forma alterna ésta se puede expresar como: $x[n] = Ce^{\beta n}$ donde $\alpha = e^{\beta}$ Si *C* y α son reales se tiene:
$|\alpha| > 1$ la señal crece en forma exponencial.
$|\alpha| < 1$ se tiene una exponencial decreciente.

Si α es positiva todos los valores de $C\alpha^n$ son del mismo signo,pero si α es negativa, entonces se alterna el signo de $x[n]$.

Si α = 1, $x[n]$ es constante, mientras que si α = -1 el valor de $x[n]$ se alterna entre *C* y -*C*.

Otra exponencial compleja importante se obtiene cuando $x[n] = Ce^{\beta n}$ y forzando que α sea imaginaria pura.

Sea, $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ como en el caso continuo, esta señal está muy relacionada con:

$$x[n] = A\cos[\Omega_0 n + \phi]$$

Si se escribe $C = |C|e^{j\theta}$; $\alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$ se obtiene:

$$C\cdot\alpha^n = |C|\cdot|\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j\cdot|C|\cdot|\alpha|^n \operatorname{sen}(\Omega_0 n + \theta)$$

Así para $|\alpha| = 1$, las partes real e imaginaria de una secuencia exponencial compleja son senoidales.

Para $|\alpha| < 1$ corresponden a secuencias senoidales multiplicadas por una exponencial decreciente; para $|\alpha| > 1$ son secuencias senoidales multiplicadas por una exponencial creciente.

Veamos las propiedades de periodicidad de $e^{j\cdot\Omega_0\cdot n}$

Consideremos la exponencial compleja con frecuencia: $\Omega_0 + 2\pi$

$$e^{j(\cdot\Omega_0+2\pi)n} = e^{j\cdot 2\pi n}\cdot e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n}$$

O sea, que en tiempo discreto la señal con frecuencia Ω_0 es idéntica a las señales con frecuencia: $\Omega_0 \pm 2\pi$; $\Omega_0 \pm 4\pi$, etc.

Por tanto, al considerar las exponenciales de tiempo discreto se necesita tomar en cuenta solamente un intervalo de longitud 2π dentro del cual se escoge Ω_0

Por lo general:

$$0 \leq \Omega_0 < 2\pi \qquad \text{o} \qquad -\pi \leq \Omega_0 < \pi$$

Ahora, para que $e^{j\Omega_0 n}$ sea periódica con período N > 0 se debe cumplir que:

$$e^{j\cdot\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n}$$

Es decir que $e^{j\Omega_0 N} = 1$ o sea que $\Omega_0 N$ debe ser múltiplo de 2π.

Por tanto, $\Omega_0 N = 2\pi m$ ó $\dfrac{\Omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$

Por lo anterior, no es periódica para valores arbitrarios de Ω_0 ; sólo es periódica si $\dfrac{\Omega_0}{2\pi}$ es un número racional.

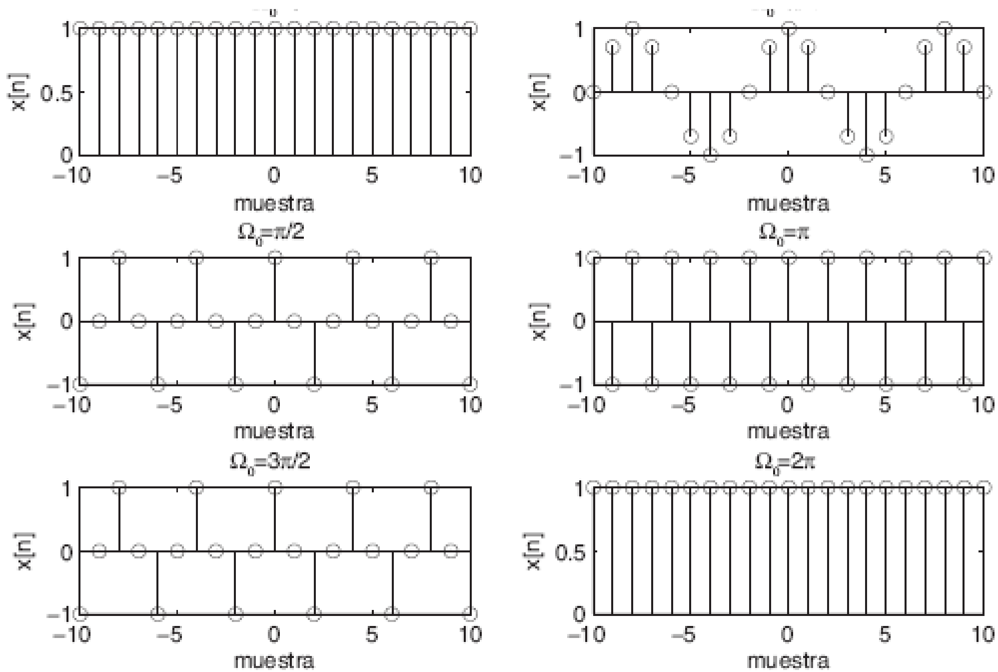


Figura.8 Evolución de la oscilación de la señal x [n] = cos (nπ) según aumenta la frecuencia.

UNIDAD III

SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO

1 Sistemas lineales Invariantes.

Se han estudiado en capítulos previos diversas propiedades de los sistemas. Dos de ellas, la linealidad y la invarianza con el tiempo juegan un papel fundamental en el análisis de señales y sistemas, debido a que muchos fenómenos físicos se pueden modelar mediante sistemas lineales invariantes con el tiempo.

Un problema fundamental en el análisis de sistemas es hallar la respuesta a una entrada determinada. Esto se puede obtener mediante ecuaciones en diferencias o explotando el hecho de la linealidad e invarianza en el tiempo. De lo anterior surge el concepto de sumatoria de convolución.

Un sistema lineal invariante se puede formular mediante una ecuación en diferencias de coeficientes constantes, la cual presenta la forma general siguiente:

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \ldots + a_N y[n-N] = x[n].$$

Resolver la ecuación en diferencias consiste en encontrar una expresión para y[n], es decir, generar la secuencia: {y(0), y(1), y(2), ...,y(N),...}

Antes de estudiar apropiadamente los métodos de solución de una ecuación en diferencias, presentaremos algunas propiedades importantes de los sistemas lineales invariantes.

2 Propiedades de los sistemas lineales invariantes.

2.1 Superposición.

El principio de superposición establece que:

a) Si un sistema se excita con K veces una función, la respuesta es K veces la respuesta original.

b) Si el sistemas se excita con la suma de dos funciones, la respuesta es la suma de las respuestas individuales.

Entrada	Salida
x[n]	y[n]
Kx[n]	Ky[n]
$Kx_1[n] + Kx_2[n]$	$Ky_1[n] + Ky_2[n]$

2.2 Desplazamiento.

Si la excitación de un sistema lineal invariante se traslada en el tiempo, entonces la respuesta se traslada en la misma cantidad:

Entrada	Salida
$x[n-n_0]$	$y[n-n_0]$

2.3 Respuesta natural.

Es la respuesta de un sistema cuando se excita con el impulso digital unitario. La denotamos por: h(n).

Entrada	Salida
$\delta[n]$	$h[n]$

2.4 Convolución.

Cuando un sistema lineal invariante se excita con una señal cualquiera: x(n), la respuesta es la convolución entre la entrada y la respuesta natural, así:

y[n] = conv(x[n] , h[n]) .

La convolución de dos funciones de variable discreta: x[n] y h[n], se define de la siguiente manera:

$$conv(x[n], h[n]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

A continuación se presenta una deducción poco rigurosa de la sumatoria de convolución de dos funciones.

Supongamos que la respuesta al impulso unitario es h[n], esto es:

Entrada	**Salida**	
$\delta[n]$	$h[n]$	
$\delta[n-k]$	$h[n-k]$	Si se traslada la entrada se traslada la salida
$x[k]\delta[n-k]$	$x[k]h[n-k]$	Si la excitación se multiplica por una constante, la salida también.

Ahora aplicamos la importante propiedad de la función impulso: $\delta[n-k]=\delta[k-n]$

Entrada	Salida
$x[k]\delta[k-n]$	$x[k]h[k-n]$

Ahora bien, si sumamos las entradas correspondientes a k desde menos infinito hasta infinito, tenemos:

Entrada	Salida
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[k-n]$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[k-n]$

Teniendo en cuenta que la entrada así expresada corresponde a la función: x[n], obtenemos finalmente que:

Entrada	Salida
x[n]	y[n]=conv(x[n],h[n])

Ejemplo 1.

Encuentre la fórmula para expresar la siguiente suma:

$\sum_{k=0}^{N} \gamma^k$, donde γ es un número positivo.

$$S[N]=1+\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\ldots+\gamma^{N-1}+\gamma^N$$

$$S[N]\cdot\gamma=\gamma+\gamma^2+\gamma^3+\ldots+\gamma^N+\gamma^{N+1}$$

Restando las expresiones anteriores, tenemos:

$$(1-\gamma)S[N] = 1-\gamma^{N+1}$$

Finalmente, despejamos la suma. $S[N] = \frac{1-\gamma^{N+1}}{1-\gamma}, \gamma \neq 1$.

Si $\gamma < 1$, la suma de los infinitos términos es: $S[\infty] = \frac{1}{1-\gamma}$.

Ejemplo 2.

Encuentre una fórmula para la suma:

$$\sum_{k=M}^{N} \gamma^k$$

Hacemos uso de la fórmula encontrada previamente, teniendo en cuenta que la suma dada se puede escribir como:

$$\sum_{k=M}^{N} \gamma^k = \sum_{k=0}^{N} \gamma^k - \sum_{k=0}^{M-1} \gamma^k$$

$$\sum_{k=M}^{N} \gamma^k = \frac{1-\gamma^{N+1}}{1-\gamma} - \frac{1-\gamma^{M}}{1-\gamma}$$

Simplificando, tenemos: $\sum_{k=M}^{N} \gamma^k = \frac{\gamma^M - \gamma^{N+1}}{1-\gamma}$

De lo anterior podemos concluir que si $\gamma < 1$, , la sumatoria llevada hasta el infinito es convergente y está dada por:

$$\sum_{k=M}^{\infty} \gamma^k = \frac{\gamma^M}{1-\gamma}$$

Ejemplo 3.

Si la señal de entrada $x[n] = 3\delta(n-2)$ se aplica a un sistema lineal, causal e invariante con el tiempo la salida es

$$y[n] = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$$ para n >=2.

Encontrar la respuesta al impulso, h(n) del sistema.

Solución:

Por definición, h(n) es la respuesta del sistema a la entrada $\delta(n)$. Como el sistema es lineal e invariante con el tiempo, se tiene:

x (n+2) = 3 $\delta(n)$. , o sea que $\delta(n)$. = 1/3 x (n+2). Como la convolución de h(n) con $\delta(n)$. es por definición igual a h(n) , se tiene que h(n) = 1/3 y (n+2).

La salida se puede expresar en la siguiente forma:

$$y[n] = \left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right]u(n-2)$$ De forma que $$h(n) = \frac{1}{6}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]U(n)$$

Ejemplo 4.

Encuentre la convolución entre las funciones:

a) h(n)= 2^{-n} .u(n)) y x_1(n)= u(n) .Represéntela gráficamente
b) h(n)= 2^{-n} .u(n)) y x_2(n)= u(n) -u(n-5).Represéntela gráficamente

Hacemos la correspondientes asignaciones.

n:= -10...10

$$u(n) := \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases} \qquad h(n) := 2^{-n}.u(n) \qquad x_2(n) := u(n) - u(n-5)$$

Podemos calcular las convoluciones de manera simbólica, asi:

$$conv\,(h[n],\, x_1[n]) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x_1(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} u(k)u(n-k)$$

Puede notarse que u(n - k)=1 para K = 0,1,2,....n con lo que podemos escribir;

$$conv\,(h[n],\, x_1[n]) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = \frac{\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

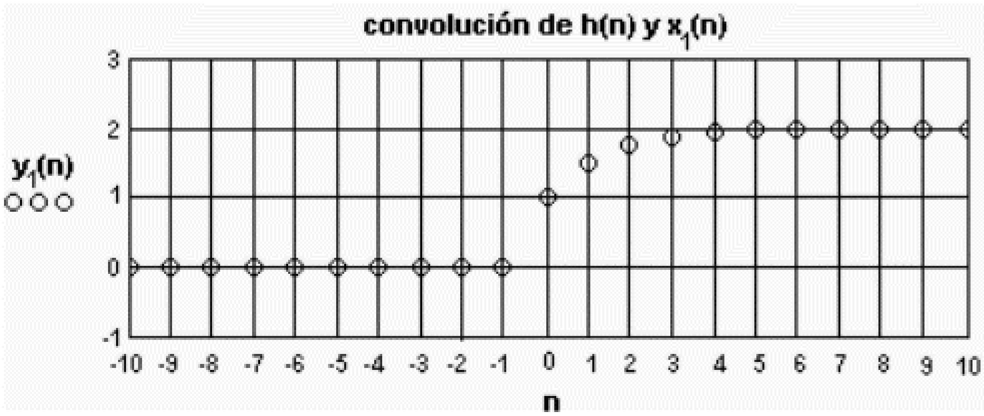
Simplificando y denotando la convolución por $y_1(n)$, se obtiene $y_1[n]= 2(1-2^{-(n+1)})u(n)$.

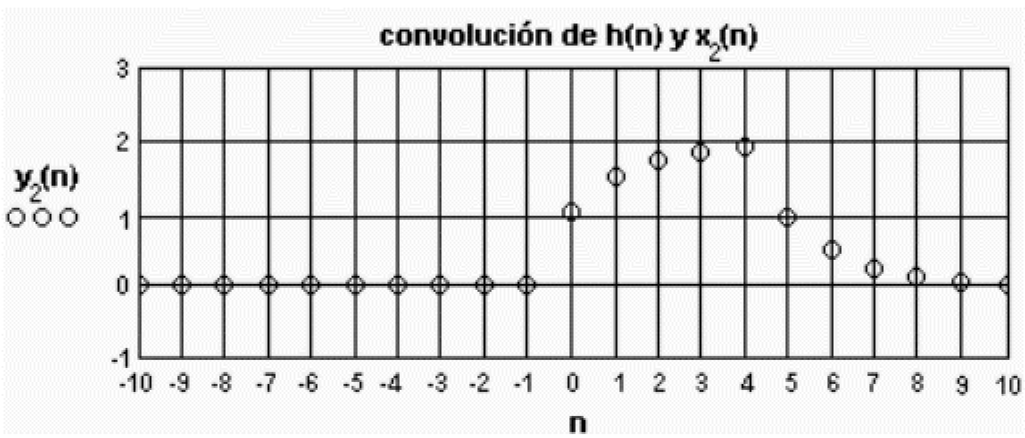
Para el caso b), se obtiene: $x_2[n]= u(n)-u(n-5)$.

Por tanto, usando la propiedad de traslación y el resultado anterior, tenemos:
$y_2[n]= y_1[n]-y_1[n-5]$.
$y_2[n]= 2(1-2^{-(n+1)})u(n)- 2(1-2^{-(n-5+1)})u(n-5)$.

Simplificado, se encuentra que: $y_2[n]= 2(1-2^{-(n+1)})u(n)- 2(1-2^{4-n})u(n-5)$.

Si se hacen las correspondientes asignaciones, se tiene que:
$y_1[n]= 2(1-2^{-(n+1)})u(n)$.
$y_2[n]= 2(1-2^{-(n+1)})u(n)- 2(1-2^{4-n})u(n-5)$.





Ejemplo 5.

En un sistema lineal e invariante con el tiempo, determine y(n) sabiendo que: x(n) = u(n) – u(n -5) y h(n) = $\alpha^n[u(n)-u(n-7)]$.

Solución.

Si x(n) = u(n) , y[n] = $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)u(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m[u(m)-u(m-7)]u(n-m)$

Por tanto y[n] = $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m)u(n-m)$ - $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^m u(m-7)u(n-m)$.

Se sabe que u(m) u(n-m) =1 para y 0 para otra asignación.
Se sabe que u(m-7) u(n-m) = 1 para y 0 para otra asignación.

Por tanto $y[n] = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n) - \left[\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha^{7}}{1-\alpha}\right]u(n-7)$.

Cuando la excitación es u(n-5), la respuesta será y (n-5). Por tanto, para la excitación dada, la respuesta es:

$$y(n) = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n) - \frac{\alpha^{7}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n-7) - \frac{1-\alpha^{n-4}}{1-\alpha}u(n-5) + \frac{\alpha^{7}-\alpha^{n-4}}{1-\alpha}u(n-12)$$

Ejercicios

1. Sean $\begin{array}{l} x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \\ h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] \end{array}$

calcule las siguientes convoluciones:
a) x [n]* h[n]
b) x [n]* h[n-2]
c) x[n-2]* h[n]

2. Considere una entrada y una respuesta al impulso unitario dado por $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u(n-2), \quad h[n] = u(n+2)$

determine y dibuje la salida y[n] .

3. Calcule y dibuje y[n] = x[n] * h[n] donde

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } 3 \le n \le 8 \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases} \qquad h[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } 4 \le n \le 15 \\ 0, & \text{para otro valor} \end{cases}$$

4. Sea $x[n]=\begin{cases}1, & \text{si } 0\le n\le 9\\ 0, & \text{para otro valor}\end{cases}$ $h[n]=\begin{cases}1, & \text{si } 0\le n\le N\\ 0, & \text{para otro valor}\end{cases}$ donde $N\le 9$

es un entero.

Determine y[n] = x[n] * h[n] si y[4] = 5 y y[14] = 0

5. Un sistema lineal invariante con el tiempo se excita con el impulso digital unitario y su respuesta es $h[k]=(\alpha)^k[u(k)-u(k-6)],\ \text{con } |\alpha|<1$. Determine y[k] sabiendo que x[k]= u(k)-u(k-4). Represente x[k] y

$y[k]$ con $\alpha=\frac{1}{2}$.

6. Un sistema lineal S tiene la relación

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]g[n-2k]$$

donde g[n]=u(n)-u(n-4).

Determine y[n] cuando:

a) $x[n]=\delta[n-1]$

b) $x[n]=\delta[n-2]$

c) $x[n]=\delta[n]$

7. Considere el sistema discreto cuya respuesta al impulso es

$$h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

Determinar el entero A tal que $h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$.

8. En el sistema lineal invariante cuyas respuestas al impulso son:

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$

b) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n)$

c) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n-1)$

¿Cuales corresponden a sistemas causales y cuales a sistemas estables?

UNIDAD IV

ANALISIS DE FOURIER

ANÁLISIS DE FOURIER

Cualquier función periódica puede ser descrita por una serie de Fourier. Se denomina señal periódica aquella que verifica la propiedad: $f(t) = f(t + T_0) \quad T_0 \neq 0$ siendo T_0 el *periodo* de la señal. Una señal periódica se extiende desde t = -∞ a t = ∞ .

La expresión en serie de una onda periódica viene dada por una componente continua y un número finito de términos en *sen* y *cos* correspondientes a la componente fundamental y armónicos de la función. Si f(t) es una función periódica con periodo T_0, puede expresarse mediante una serie de Fourier de la forma:

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + \ldots\ldots + a_n \cos n\omega_0 t + b_1 \operatorname{sen}\omega_0 t + \ldots\ldots b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t$$

(1)

o bien

FORMA TRIGONOMÉTRICA

(2)
$$\boxed{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \operatorname{sen} n\omega_0 t)}$$

a_0 = componente continua o valor medio de *f(t)*

a_n y b_n = coeficientes de Fourier o amplitudes de la sinusiode en a.c..

La primera frecuencia , en la componente alterna, viene determinada por el periodo de la onda $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi/T_0 = \pi/L$ y se denomina *frecuencia fundamental* . Las demás frecuencias son múltiplos de la fundamental: segundo armónico $2\omega_0$, tercer armónico $3\omega_0$, etc...

La serie de Fourier muestra una onda periódica en sus componentes continua y alterna. Puede ser representada como suma de una señal de fuente continua y una serie ilimitada de fuentes alternas, como se muestra en la siguiente figura. Así se podrá calcular la respuesta a una entrada periódica por superposición:

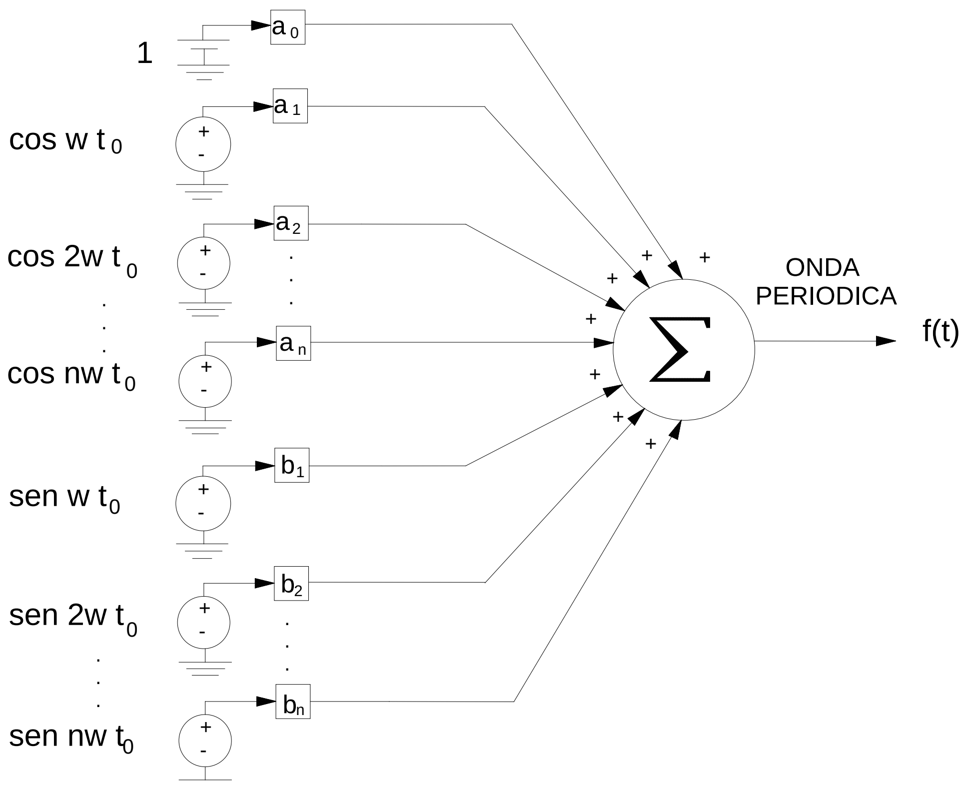


Figura No 9. Representación a bloques de la representación en series de Fourier

Coeficientes de Fourier

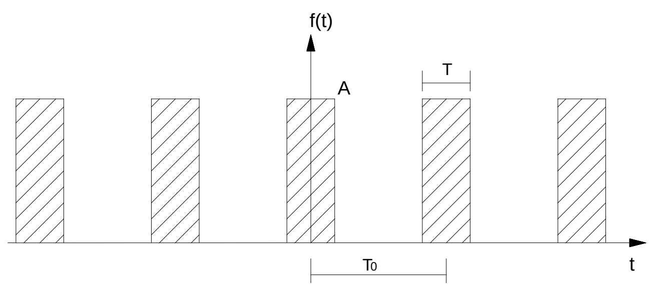
(3) $$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt \qquad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{sen}\, n\omega t dt$$

Los límites de integración en estas ecuaciones se extienden desde $-T_0/2$ hasta $T_0/2$. Aunque estos límites pueden medirse con el mismo periodo en cualquier intervalo, de 0 a T_0 o de T_0 a $2T_0$, etc..

• **<u>Señal rectangular</u>**

Obtenemos el valor de los coeficientes de Fourier:



$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Adt = \frac{A}{T_0}t\ \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{AT}{T_0}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega t dt = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\cos n\omega t dt = \frac{2A}{T_0}\frac{\operatorname{sen} n\omega t}{n\omega}\Big|_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{2A}{n\omega T_0}\left(\operatorname{sen} n\omega\frac{T}{2} - \operatorname{sen} n\omega\frac{-T}{2}\right) = \frac{2A}{n\omega T_0}2\operatorname{sen} n\omega\frac{T}{2} = \frac{2A}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi T}{T_0}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\operatorname{sen} n\omega t dt = \frac{2}{T_0}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} A\operatorname{sen} n\omega t = \frac{2A}{T_0}\frac{-\cos n\omega t}{n\omega}\Big|_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{2A}{n\omega T_0}\left(\cancel{-\cos n\omega\frac{T}{2}} + \cancel{\cos n\omega\frac{-T}{2}}\right) = 0$$

* cos(-x) = cos x y sen (-x) = - sen x

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t = \frac{AT}{T_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi T}{T_0}\cos n\omega t$$

a_0 $\quad \frac{AT}{T_0}$

a_n $\quad \frac{2A}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi T}{T_0}$

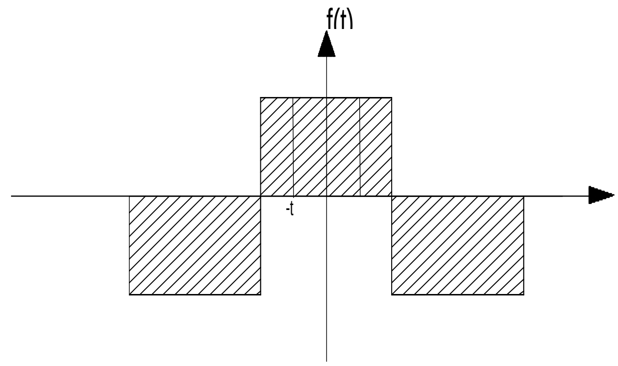
Dándole distintos valores a - n - obtendremos la amplitud correspondiente a cada armónico.

b_n $\quad 0 \ \forall$ n

Las señales periódicas contienen componentes de frecuencia discreta $n\omega_0$ (n=0, 1, 2, 3..). En teoría tenemos un espectro con infinitas frecuencias pero la amplitud de los armónicos decrece a medida que aumenta la frecuencia, con lo que los armónicos de orden alto llegan a ser despreciables.

n	**a_n**	**n**	**a_n**
0	0.250	7	-0.068
1	0.450	8	0
2	0.318	9	0.050
3	0.150	10	0.064
4	0	11	0.041
5	-0.090	12	0
6	-0.106	13	-0.035

Ondas Simétricas



•Una onda se dice que es **simétrica par** si:

f(-t) = f(t)

La serie de Fourier para una onda par está formada por los términos de coseno, es decir, todos los coeficientes - b_n - son cero.

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t\right]$$

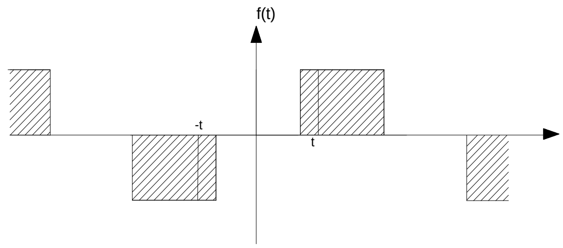
Según las identidades: cos(-x) = cos(x) y sen(-x) = - sen(x)

$$f(-t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos n\omega t - b_n \operatorname{sen} n\omega t\right]$$

Como *f(-t)* = *f(t)* , comparando los coeficientes de Fourier término a término, encontramos que se requiere la igualdad $b_n = - b_n$ y ésto sólo puede ocurrir para $b_n = 0$.

•Una onda se dice que es **simétrica impar** si:

$-f(-t) = f(t)$



Su serie de F. está formada por los términos en seno,es decir, todos los términos - a_n - son cero.

Dado que:

cos(-x) = cos(x) y sen(-x) = - sen(x)

$$-f(-t) = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_n \cos n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t\right]$$

Para que $-f(-t) = f(t)$ debe ocurrir que $a_n = -a_n$ y $a_0 = -a_0$, es decir, $a_n = 0\ \forall n$

•Una forma de onda es **alternada** cuando: $-f(-t - (T_0/2)) = f(t)$

Al desarrollar su serie de F. sólo encontramos

términos impares, con lo que las amplitudes de todos los armónicos

pares son cero.

Sabiendo que $\cos(x - n\pi) = (-1)^n \cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x - n\pi) = (-1)^n \operatorname{sen}(x)$

$$-f(-t - \frac{T_0}{2}) = -a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-(-1)^n a_n \cos n\omega t - (-1)^n b_n \operatorname{sen} n\omega t\right]$$

Comparando la ecuación anterior con la $f(t)$, obtenemos que $a_0 = -a_0$, $a_n = -(-1)^n a_n$,

$b_n = -(-1)^n\, b_n$. El único modo de que esto ocurra es para $a_0 = 0$ y $a_n = b_n = 0$ para n = par.

En esta serie sólo hay términos impares.

La simetría alternada puede aparecer junto a la simetría par o la impar en algunas formas de onda.

RESUMEN

ONDA PAR	f(t) = f(-t)	$b_n = 0$
ONDA IMPAR	f(t) = -f(-t)	$a_0 = a_n = 0$
ONDA ALTERNADA	$f(t) = -f(-t - (T_0/2))$	$a_0 = 0$ y $a_n = b_n = 0$ para n = par

Serie de Fourier exponencial

La distribución de las amplitudes de las componentes de una señal es función de la frecuencia y se llama *espectro*. La forma trigonométrica de la serie de F. produce el espectro de *f(t)* en dos parámentros - a_n - y - b_n - . La ventaja de la forma exponencial reside en que describe el espectro en un solo término - c_n - .

Se define el parámetro - c_n - como : $$c_n = \frac{a_n - b_n j}{2} \qquad (15)$$

Teniendo en cuenta que cos(-x) = cos(x) y sen(-x) = -sen(x) si cambiamos n por -n en las eq.3, obtenemos que $a_{-n} = a_n$ y $b_{-n} = -b_n$, luego $$c^* = c_{-n} = \frac{a_n + b_n j}{2} \qquad (16)$$

Si definimos $a_0 = c_0$ tenemos la serie de la forma:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}$$

La primera sumatoria comienza con n = 0 con lo que se incluye el término c_0 ya que $e^0=1$. Para la segunda sumatoria se puede reemplazar c_{-n} por c_n y cambiar los límites del sumatorio desde n = -1 hasta n = -∞ :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}} \qquad (17)$$

De esta forma el sumatorio se extiende por las frecuencias positivas y negativas.

Podemos obtener la relación de c_n con *f(t)* sustituyendo las eq. 3 y 13 en la 15:

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt} \qquad (18)$$

Podemos obtener el módulo y ángulo relacionados con - c_n -

$$\text{si} \quad c_n = \frac{a_n - b_n j}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Módulo:} \quad |c_n| = \dfrac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \\ \\ \text{Argumento:} \quad \angle c_n = \operatorname{arctg} \dfrac{-b_n}{a_n} \end{array} \right. \tag{19}$$

Estas ecuaciones muestran que la amplitud es $2|c_n|$ y que $\angle c_n$ es el ángulo de fase de un armónico n de la serie de F.

*** Dada la onda periódica:**

1.- Encontrar el coficiente - c_n - :

2.- Repetir el apartado anterior usando la relación de - c_n - con los coeficientes a_n y b_n:

$$c_n = \frac{a_n - b_n j}{2} \qquad a_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos n\omega_0 t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\text{sen}\, n\omega_0 t dt$$

3.- Dibujar el espectro de amplitudes $|c_n|$ de la señal dada:

$$c_n = \frac{AT}{T_0}\,\frac{\operatorname{sen} n\omega_0 \frac{T}{2}}{n\omega_0 \frac{T}{2}}$$

El coeficiente c_n viene dado por una función tal que $f(t) = K\frac{\operatorname{sen} x}{x}$

Para $x = 0$ tenemos una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando L´Hopital:

$$\lim_{x\to 0} f(t) = \lim_{x\to 0} K\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{0}{0} = Ind \xrightarrow{L'H} \lim_{x\to 0} K\frac{\cos x}{1} = K*1 = K$$

El máximo ocurre para $\omega = 0$ y es $K = \frac{AT}{T_0}$

La función se anula cuando $f(t) = 0 = K\frac{\operatorname{sen} x}{x} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = m\pi \quad \forall m = \pm 1, \pm 2, \ldots$

es decir, $\omega = \frac{2\pi m}{T}$

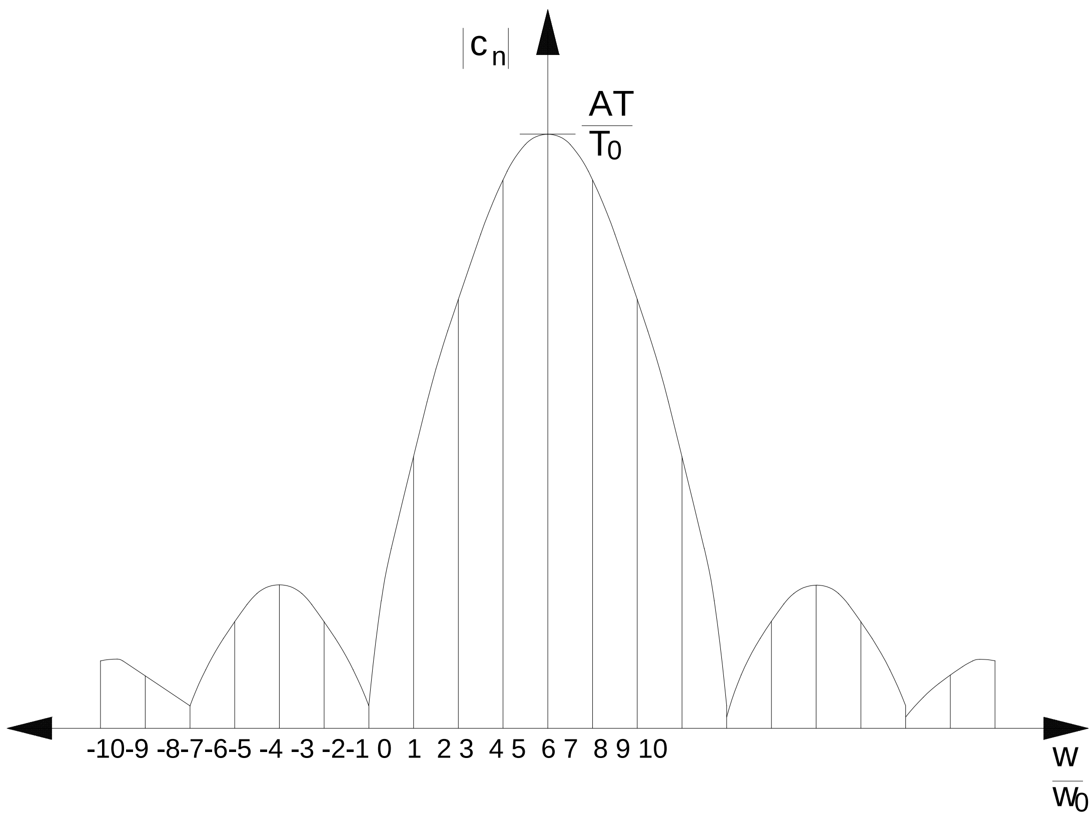


Figura No 10 Espectro de Amplitud del ejemplo

TRANSFORMADA DE FOURIER

Esta sección se presenta la transformada de Fourier, también conocida como la integral de Fourier. La definición, teoremas y propiedades presentadas y aprobadas. La transformada de Fourier de las funciones más comunes se derivan, la función del sistema está definido, y varios ejemplos se dan para ilustrar su aplicación en el análisis de circuitos.

Definición y Formas Especiales

Recordemos que la serie de Fourier para funciones periódicas en el tiempo, como los que hemos hablado en el capitulo anterior, producir líneas espectrales con valores distintos de cero solo frecuencias especificas conocidas como armónicos. Sin embargo, otras funciones de interés tales como, el escalón unitario, el impulso unitario, y un solo impulso rectangular no son funciones periódicas. Los espectros de frecuencias para estas funciones son continuos, como veremos más adelante en este capítulo.

Podemos pensar en una señal no periódica por ejemplo la derivada de una función periódica en el que el periodo se extiende desde -∞ hasta +∞. A continuación, para una señal que es función del tiempo con un periodo de -∞ hasta +∞, formamos la integral.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{j\omega t}} \boldsymbol{dt} \tag{8.1}$$

Y suponiendo que existe para cada valor de frecuencia en radianes **ω**, llamamos a la función ***F (ω)*** la Transformada de Fourier o la Integral de Fourier.

La transformada de Fourier es, en general, una función compleja. Podemos expresar como la suma de sus componentes real e imaginaria, o en forma exponencial, es decir, como

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{Re}\{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega})\} + \boldsymbol{jIm}\{\boldsymbol{F\omega}\} = |\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega})|\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\varphi}(\boldsymbol{\omega})} \tag{8.2}$$

La trasformada inversa se define como

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{j\omega t}} \boldsymbol{d\omega} \tag{8.3}$$

Vamos a menudo a utilizar la siguiente notación para expresar la transformada de Fourier y su inversa.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) \tag{8.4}$$

Y

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(t) \tag{8.5}$$

Formas Especiales de la Transformada de Fourier

La función de tiempo es, en general, complicada, y por lo tanto podemos expresarla como la suma de la parte real e imaginaria, es decir, como

$$f(t) = f_{Re}(t) + jf_{Im}(t) \tag{8.6}$$

los subíndices Re y Im se utiliza a menudo para referirse a las partes real e imaginaria respectivamente. Estas notaciones tienen el mismo significado que $Re\{f(t)\}$ y $Im\{f(t)\}$.

Por sustitución de (8.6) en la integral de Fourier de (8.1), obtenemos

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)e^{-j\omega t}dt + \int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(t)e^{-j\omega t}dt \tag{8.7}$$

Y por la identidad de Euler

$$\begin{aligned} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_{Re}(t)\cos\omega t + f_{Im}(t)\sin\omega t]dt \\ -j\int_{-\infty}^{\infty} [f_{Re}(t)\sin\omega t - f_{Im}(t)\cos\omega t]\,dt \end{aligned} \tag{8.8}$$

De (8.2), vemos que la parte real e imaginaria de $F(\omega)$ son

$$F_{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_{Re}(t)\cos\omega t + f_{Im}(t)\sin\omega t]\,dt \tag{8.9}$$

Y

$$F_{Im}(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} [f_{Re}(t)\sin\omega t\ +\ f_{Im}(t)\cos\omega t]\,dt \tag{8.10}$$

Podemos derivar formas similares a la transformada Inversa de Fourier de la siguiente manera:

Sustitución de (8.2) en (8.3) yields

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{Re}(\omega) + jF_{Im}(w)]e^{j\omega t}\, d\omega \qquad (8.11)$$

Y por la identidad de Euler,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{Re}(\omega)\cos\omega t - F_{Im}(\omega)\sin\omega t]d\omega - j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{Re}(\omega)\sin\omega t + F_{Im}(\omega t)\cos\omega t]\, d\omega \qquad (8.12)$$

Por lo tanto, las partes real e imaginaria de $f(t)$ son

$$f_{Re}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{Re}(\omega)\cos\omega t - F_{Im}(\omega)\sin\omega t]\, d\omega \qquad (8.13)$$

Y

$$f_{Ie}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{Re}(\omega)\sin\omega t + F_{Im}(\omega)\cos\omega t]\, d\omega \qquad (8.14)$$

Ahora, vamos a utilizar las relaciones anteriores para determinar el tiempo de correspondencia de dominio de frecuencia de las funciones reales, imaginarias, pares e impares en ambos dominios de tiempo y frecuencia. Vamos a mostrar esto en forma de tabla, como se indica en la tabla 8.1.

TABLE 8.1 Time Domain and Frequency Domain Correspondence (Refer to Tables 8.2 - 8.7)

$f(t)$	$F(\omega)$				
	Real	*Imaginary*	*Complex*	*Even*	*Odd*
Real					
Real and Even					
Real and Odd					
Imaginary					
Imaginary and Even					
Imaginary and Odd					

Funciones Reales

Si $f(t)$ es real, (8.9) y (8.10) se reducen a

$$F_{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)\cos\omega t\, dt \qquad (8.15)$$

Y

$$F_{Im}(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)\sin\omega t\, dt \qquad (8.16)$$

Conclusión: Si $f(t)$ es real, $F(\omega)$ es, en general, complejo. Indicamos este resultado con una marca de verificación en la tabla 8.2.

Sabemos que cualquier función $f(t)$, se puede expresar como la suma de una función par y una impar. Por lo tanto, también vamos a considerar el caso cuando $f(t)$ es real y par, y cuando $f(t)$ es real e impar*.

** En nuestra discusión posterior, vamos a hacer uso del hecho de que el coseno es una función par, mientras que el seno es una función impar. Además, el producto de dos funciones impares o el producto de dos funciones pares darán como resultado una función par, mientras que el producto de una función impar y una función par dará como resultado una función impar.*

TABLE 8.2 Time Domain and Frequency Domain Correspondence (Refer also to Tables 8.3 - 8.7)

$f(t)$	$F(\omega)$				
	Real	*Imaginary*	*Complex*	*Even*	*Odd*
Real			✔		
Real and Even					
Real and Odd					
Imaginary					
Imaginary and Even					
Imaginary and Odd					

a. ***$f_{Re}(t)$* es par**

Si $f_{Re}(-t) = f_{Re}(t)$, el producto $f_{Re}(t)\cos\omega t$, con respecto a *t,* es par, mientras que el producto $f_{Re}(t)\sin\omega t$ es impar. En este caso, (8.15) y (8.16) se reduce a:

$$F_{Re}(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)\cos\omega t\; dt \qquad f_{Re}(t) = Par \qquad (8.17)$$

Y

$$F_{Im} = -\int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}\sin\omega t\; dt = 0 \qquad f_{Re}(t) = Par \qquad (8.18)$$

TABLE 8.3 Time Domain and Frequency Domain Correspondence (Refer also to Tables 8.4 - 8.7)

$f(t)$	$F(\omega)$				
	Real	*Imaginary*	*Complex*	*Even*	*Odd*
Real			✔		
Real and Even	✔			✔	
Real and Odd					
Imaginary					
Imaginary and Even					
Imaginary and Odd					

Por lo tanto, si $\boldsymbol{f_{Re}(t) = Par}$, $\boldsymbol{F(\omega)}$ es real como se ve en (8.17). Para determinar si $\boldsymbol{F(\omega)}$ es par o impar cuando $\boldsymbol{f_{Re}(t) = Par}$, debemos realizar una prueba de igualdad o con respecto a $\boldsymbol{\omega}$. Por lo tanto, la sustitución de $-\boldsymbol{\omega}$ por $\boldsymbol{\omega}$ en (8.17), yields

$$\boldsymbol{F_{Re}(-\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f_{Re}(t)\cos(-\omega)t\ dt = 2\int_{0}^{\infty} f_{Re}(t)\cos\omega t\ dt = F_{Re}(\omega)} \qquad (8.19)$$

Conclusión: Si *$f(t)$* es real y par, *$F(\omega)$* también es real y par. Indicamos estos resultados en la tabla 8.3.

b. ***$f_{Re}(t)$* es impar**

Si $\boldsymbol{-f_{Re}(-t) = f_{Re}(t)}$, el producto $\boldsymbol{f_{Re}(t)\cos\omega t}$, con respecto a $\boldsymbol{t}$, es impar, mientras que el producto $\boldsymbol{f_{Re}(t)(\sin\omega t)}$ es par. En este caso, (8.15) y (8.16) se reduce a:

$$\boldsymbol{F_{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)\cos\omega t\ dt = 0 \qquad f_{Re}(t) = impar} \qquad (8.20)$$

Y

$$\boldsymbol{F_{Im}(\omega) = -2\int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)\sin\omega t\ dt \qquad f_{Re}(t) = impar} \qquad (8.21)$$

Por lo tanto, si $\boldsymbol{f_{Re}(t) = Impar}$, $\boldsymbol{F(\omega)}$ es imaginaria.

Para determinar si $\boldsymbol{F(\omega)}$ es par o impar cuando $\boldsymbol{f_{Re}(t) = Impar}$, debemos realizar una prueba de igualdad o con respecto ha $\boldsymbol{\omega}$. Por lo tanto, la sustitución de $-\boldsymbol{\omega}$ por $\boldsymbol{\omega}$ en (8.21), yields

$$\begin{aligned} F_{Im}(-\omega) &= -2\int_0^\infty f_{Re}(t)\sin(-\omega)t\ dt = 2\int_0^\infty f_{Re}(t)\sin\omega t\ dt \\ &= -F_{Im}(\omega) \end{aligned} \tag{8.22}$$

Conclusión: Si $f(t)$ es real e impar, $F(\omega)$ es imaginaria e impar.
Indicamos estos resultados en la tabla 8.4.

1. Funciones Imaginarias

Si $f(t)$ es imaginario, (8.9) y (8.10) se reducen a

$$F_{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(t)\sin\omega t\ dt \tag{8.23}$$

Y

$$F_{Im}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(t)\cos\omega t\ dt \tag{8.24}$$

Conclusión: Si $f(t)$ es imaginario, $F(\omega)$ es, en general complejo. Señalamos este resultado en la tabla 8.5.

TABLE 8.5 Time Domain and Frequency Domain Correspondence (Refer also to Tables 8.6 - 8.7)

$f(t)$	$F(\omega)$				
	Real	*Imaginary*	*Complex*	*Even*	*Odd*
Real			✔		
Real and Even	✔			✔	
Real and Odd		✔			✔
Imaginary			✔		
Imaginary and Even					
Imaginary and Odd					

TABLE 8.4 Time Domain and Frequency Domain Correspondence (Refer also to Tables 8.5 - 8.7)

$f(t)$	$F(\omega)$				
	Real	**Imaginary**	**Complex**	**Even**	**Odd**
Real			✔		
Real and Even	✔			✔	
Real and Odd		✔			✔
Imaginary					
Imaginary and Even					
Imaginary and Odd					

Siguiente, consideráremos es caso en que $f(t)$ es imaginario y par, y $f(t)$ es imaginario e impar.

a. ***$f_{Im}(t)$ es par***

Si $f_{Im}(-t) = f_{Im}(t)$, el producto $f_{Im}(t)\cos\omega t$, con respecto a t, es par, mientras que el producto $f_{Im}(t)\sin\omega t$, es impar. En este caso, (8.23) y (8.24) se reducen a:

$$F_{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(t)\sin\omega t \; dt = 0 \qquad f_{Im}(t) = Par \tag{8. 25}$$

Y

$$F_{Im}(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f_{Im}(t)\cos\omega t \; dt \qquad f_{Im}(t) = Par \tag{8. 26}$$

Por lo tanto, si $f_{Im}(t) = Par$, $F(\omega)$ es imaginaria.

Para determinar si $F(\omega)$, es par o impar cuando $f_{Im}(t) = Par$, realizamos una prueba de respecto a ω, por lo tanto, la sustitución de $-\omega$ por ω en (8.26). yields

$$f_{Im}(-\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f_{Im}(t)\cos(-\omega)t \; dt = 2\int_{0}^{\infty} f_{Im}(t)\cos\omega t \; dt = F_{Im}(\omega) \tag{8. 27}$$

Conclusiones: Si $f(t)$ es imaginaria y par, $F(\omega)$ también es imaginaria y par. Indicamos el resultado en la tabla 8.6.

b. *f_{Im} (t) es impar*

Si $-f_{Im}(-t) = f_{Im}(t)$, el producto $f_{Im}(t)\cos\omega t$, con respecto a t, es impar, mientras que el producto $f_{Im}(t)\sin\omega t$ es par. En este caso, (8.23) y (8.24) se reducen a:

$$F_{Re}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(\omega)\, sin\, \omega t\ dt = 2\int_{0}^{\infty} f_{Im}(\omega)\, sin\, \omega t\ dt \qquad f_{Im}(\omega) = Impar \tag{8.28}$$

Table 8.6.

TABLE 8.6 Time Domain and Frequency Domain Correspondence (Refer also to Table 8.7)

$f(t)$	$F(\omega)$ Real	Imaginary	Complex	Even	Odd
Real			✔		
Real and Even	✔			✔	
Real and Odd		✔			✔
Imaginary			✔		
Imaginary and Even		✔		✔	
Imaginary and Odd					

Y

$$F_{Im}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(t)\cos\omega t\ dt = 0 \qquad f_{Im}(t) = Impar \tag{8.29}$$

Por lo tanto, Si $f_{Im}(t) = Impar$, $F(\omega)$ es real.

Para determinar si $F(\omega)$, es par o impar cuando $f_{Im}(t) = Impar$, realizamos una prueba de respecto a ω . Por lo tanto, la sustitución de $-\omega$ por ω en (8.28). yields

$$F_{Re}(-\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f_{Im}(t)\sin(-\omega)t\ dt = -2\int_{0}^{\infty} f_{Im}(t)\sin\omega t\ dt = -F_{Re}(\omega) \tag{8.30}$$

Conclusión: Si $f(t)$ es imaginaria e impar, $F(\omega)$ es real e impar. Indicamos el resultado en la tabla 8.7.

Tabla 8.7 se ha completado y muestra que si $f(t)$ es real (par o impar), la parte real de $F(\omega)$ es par, y la parte imaginaria es impar. Entonces,

$$F_{Re}(-\omega) = F_{Re}(\omega) \qquad f(t) = Real \tag{8.31}$$

Y

TABLE 8.7 Time Domain and Frequency Domain Correspondence (Completed Table)

f(t)	F(ω)				
	Real	Imaginary	Complex	Even	Odd
Real			✔		
Real and Even	✔			✔	
Real and Odd		✔			✔
Imaginary			✔		
Imaginary and Even		✔		✔	
Imaginary and Odd	✔				✔

$$F_{Im}(-\omega) = -F_{Im}(\omega) \qquad f(t) = Real \tag{8.32}$$

Ya que,

$$F(\omega) = F_{Re}(\omega) + jF_{Im}(\omega) \tag{8.33}$$

Se deduce que

$$F(-\omega) = F_{Re}(-\omega) + jF_{Im}(-\omega) = F_{Re}(\omega) - F_{Im}(\omega)$$

o

$$\boxed{F(-\omega) = F^*(\omega) \qquad f(T) = Real} \tag{8.34}$$

Ahora, si $F(\omega)$ de una función de tiempo $f(t)$ conocida, y $F(\omega)$ es tal que $F(-\omega) = F^*(\omega)$, podemos concluir que $f(t)$ es real? La respuesta es sí; podemos verificar esto con (8.14) que se repite a continuación para mayor comodidad.

$$\boldsymbol{f_{Im}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{Re}(\omega)\sin\omega t + F_{Im}(\omega)\cos\omega t]\, dt} \tag{8. 35}$$

Observamos que el integrando de (8.35) es cero ya que es una función impar con respecto a **ω** porque ambos productos dentro de los corchetes son funciones impares*.

Por lo tanto, $\boldsymbol{f_{Im}(t) = 0}$, es decir, $\boldsymbol{f(t)}$ es real.

Podemos afirmar entonces, que una condición necesaria y suficiente para que $\boldsymbol{f(t)}$ sea real, es que $\boldsymbol{F(-\omega) = F^{*}(\omega)}$. Asimismo, si se sabe que $\boldsymbol{f(t)}$ es real, la transformada Inversa de Fourier de (8.3) puede simplificarse de la siguiente manera:

De (8.13),

$$\boldsymbol{f_{Re}(t) = \frac{|}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[F_{Re}(\omega)\, cos\,\omega t - F_{Im}(\omega)\, sin\,\omega t]\, d\omega} \tag{8. 36}$$

Y puesto que el integrando es una función par con respecto a **ω**, reescribimos (8.36) como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f_{Re}(t)} &= \boldsymbol{2\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}[F_{Re}(\omega)\, cos\,\omega t - F_{Im}(\omega)\, sin\,\omega t]\ d\omega} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}A(\omega)\, cos[\omega t + \varphi(\omega)]\ d\omega} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\pi}Re\int_{0}^{\infty}F(\omega)e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]}\ d\omega}\end{aligned} \tag{8. 37}$$

Propiedades y Teoremas de la Transformada de Fourier.

1. Linealidad

Si $\boldsymbol{F_1(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f_1(t)}$, $\boldsymbol{F_2(\omega)}$ es la transformada de $\boldsymbol{f_2(t)}$, etcétera, la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier establece que

$$\boxed{\begin{aligned}&\boldsymbol{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots + a_n f_n(t)} \\ &\quad \boldsymbol{\Leftrightarrow a_1 f_1(\omega) + a_2 f_2(\omega) + \cdots + a_n f_n(\omega)}\end{aligned}} \tag{8. 38}$$

Donde, $\boldsymbol{a_j}$ es una constante real arbitraria.

Demostración:

La demostración se obtiene fácilmente de (8.1), es decir, la definición de la transformada de Fourier. El procedimiento es el mismo que para la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace en el Capitulo 2.

**En (8.31) y (8.32), se determino que $\boldsymbol{F_{Re}(\omega)}$ es par y $\boldsymbol{F_{Im}(\omega)}$ es impar.*

2. Simetría

Si $\boldsymbol{F(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f(t)}$, la propiedad de simetría de la transformada de Fourier establece que

$$\boxed{\boldsymbol{F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)}} \qquad (8.39)$$

Es decir, si en $\boldsymbol{F(\omega)}$, reemplazamos $\boldsymbol{\omega}$ con $\boldsymbol{t}$, obtenemos la transformada de Fourier par de (8.39).

Demostración:

Desde

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega}$$

Entonces,

$$\boldsymbol{2\pi f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t}\, d\omega}$$

Intercambiando $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{t}$, obtenemos

$$\boldsymbol{2\pi f(-\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-j\omega t}\, d\omega}$$

Y (8.29) siguiente

3. Escalado en el Tiempo

Si ***a*** es una constante real, y $\boldsymbol{F(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f(t)}$, entonces,

$$\boxed{\boldsymbol{f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)}} \qquad (8.40)$$

Es decir, la propiedad de escalado en el tiempo de la transformada de Fourier establece que si reemplazamos $\boldsymbol{t}$ en el dominio del tiempo por $\boldsymbol{at}$, debemos reemplazar la variable $\boldsymbol{\omega}$ en el dominio de la frecuencia por $\boldsymbol{{}^{\omega}/_{a}}$, y se dividen $\boldsymbol{F({}^{\omega}/_{a})}$ por el valor absoluto de ***a***.

Demostración:

Debemos considerar ambos casos $\boldsymbol{a} > 0$ y $\boldsymbol{a} < 0$.

Para $\boldsymbol{a} > 0$,

$$\mathcal{F}_{\{f(at)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(at)e^{-j\omega t}\, dt} \tag{8. 41}$$

Decimos que $\boldsymbol{at} = \boldsymbol{\tau}$, entonces, $\boldsymbol{t} = {}^{\boldsymbol{\tau}}/_{\boldsymbol{a}}$, y (8.41) se convierte en

$$\mathcal{F}_{\{f(\tau)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(\tau)e^{-j\omega\left(\frac{\tau}{a}\right)}\, d\left(\frac{\tau}{a}\right)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(\tau)e^{-j\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}\, d\tau} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{F}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\boldsymbol{a}}\right)$$

Para $\boldsymbol{a} < 0$,

$$\mathcal{F}_{\{f(-at)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(-at)e^{-j\omega t}\, dt}$$

Y haciendo las sustituciones anteriores, encontramos que el factor multiplicación es $-{}^{\boldsymbol{1}}/_{\boldsymbol{a}}$. Por lo tanto, para ${}^{\boldsymbol{1}}/_{|\boldsymbol{a}|}$ obtenemos (8.40).

4. **Desplazamiento de Tiempo**

Si $\boldsymbol{F(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f(t)}$, entonces,

$$\boxed{\boldsymbol{f(t-t_0) \Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}}} \tag{8. 42}$$

Es decir, la propiedad de desplazamiento de tiempo de la transformada de Fourier establece que si desplazamos la función de tiempo $\boldsymbol{f(t)}$ por una constante $\boldsymbol{t_0}$, la transformada de Fourier su magnitud no cambia, pero el termino $\boldsymbol{\omega t_0}$ se agrega a su ángulo de fase.

Demostración:

$$\mathcal{F}_{\{f(t-t_0)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(t-t_0)e^{-j\omega t}\, dt}$$

Decimos que $\boldsymbol{t - t_0 = \tau}$; entonces, $\boldsymbol{t = \tau +\ t_0}$, $\boldsymbol{dt = d\tau}$, y por lo tanto

$$\mathcal{F}_{\{f(t-t_0)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{f(\tau)e^{-j\omega(\tau+t_0)}\, d\tau = e^{-j\omega t_0}\int\ \ f(\tau)e^{-j\omega(\tau)}\, d\tau}$$

o

$$\mathcal{F}_{\{f(t-t_0)\}} = \boldsymbol{e^{-j\omega t_0}F(\omega)}$$

5. Desplazamiento de Frecuencia

Si $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces,

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}f(t) \Leftrightarrow F(\omega-\omega_0)} \tag{8.43}$$

Es decir. La multiplicación de la función de tiempo $f(t)$ por $e^{j\omega_0 t}$, donde ω_0 es una constante, resultados en el desplazamiento de la transformada de Fourier por ω_0.

Demostración:

$$\mathcal{F}_{\{e^{j\omega_0 t}f(t)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t}f(t)e^{-j\omega_0 t}\,dt$$

O

$$\mathcal{F}_{\{e^{j\omega_0 t}f(t)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)}\,dt = F(\omega-\omega_0)$$

Asimismo, a partir de (8.40) y (8.43)

$$\boxed{e^{j\omega_0 t}f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega-\omega_0}{a}\right)} \tag{8.44}$$

Propiedad 5, es decir, (8.43) también se utiliza para derivar la transformada de Fourier de las señales moduladas $f(t)\cos\omega t$ y $f(t)\sin\omega t$. Por lo tanto, de

$$e^{j\omega_0 t}f(t) \Leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

Y

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

Obtenemos

$$\boxed{f(t)\cos\omega_0 t \Leftrightarrow \frac{F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)}{2}} \tag{8.45}$$

Del mismo modo

$$\boxed{\begin{aligned}&f(t)\sin\omega_0 t\\ &\Leftrightarrow \frac{F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)}{j2}\end{aligned}} \tag{8. 46}$$

6. Diferenciación de Tiempo

Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces,

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}f(t) \Leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)} \tag{8. 47}$$

Es decir, la transformada de Fourier de $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$, si existe, es $(j\omega)^n F(\omega)$.

Demostración:
Diferenciando la transformada inversa de Fourier, Obtenemos

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\frac{d^n}{dt^n}e^{j\omega t}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(j\omega)^n e^{j\omega t}\, d\omega = (j\omega)^n\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega\right)$$

Y (8.47) siguiente.

7. Diferenciación de Frecuencia

Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces,

$$\boxed{(-jt)^n f(t) \Leftrightarrow \frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega)} \tag{8. 48}$$

Demostración:
Utilizando la definición de transformada de Fourier, obtenemos

$$\frac{d^n}{d\omega^n}F(\omega) = \frac{d^n}{d\omega^n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{d^n}{d\omega^n}e^{-j\omega t}\, dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-jt)^n e^{j\omega t}\, dt = (-jt)^n\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

Y (8.48) siguiente.

8. Integración de Tiempo

Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, entonces,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau \Leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta} \tag{8. 49}$$

Demostración:

Posponemos la prueba de esta propiedad hasta que se deriva la transformada de Fourier de la función escalón unitario $u_0(t)$ en la siguiente sección. En el caso especial donde en (8.49), $F(0) = 0$ entonces,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau \Leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}} \tag{8. 50}$$

Y esto se demuestra fácilmente mediante la integración de ambos lados de la transformada inversa de Fourier.

9. Funciones de Tiempo y de Frecuencia Conjugados

Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de la función compleja $f(t)$, entonces,

$$\boxed{f^*(t) \Leftrightarrow F^*(-\omega)} \tag{8. 51}$$

Es decir, si la transformada de Fourier de $f(t) = f_{Re}(t) + f_{Im}(t)$, es $F(\omega)$, entonces, la transformada de Fourier de $f^*(t) = f_{Re}(t) - f_{Im}(t)$ es $F^*(-\omega)$.

Demostración:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} [f_{Re}(t) + jf_{Im}(t)]e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)e^{-j\omega t}\, dt + j\int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

Entonces,

$$F^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Re}(t)e^{j\omega t}\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f_{Im}(t)e^{j\omega t}\, dt$$

Reemplazando ω con $-\omega$, Obtenemos

$$F^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [f_{Re}(t) - jf_{Im}(t)]e^{-j\omega t}\, dt$$

Y (8.51) siguiente.

10. Convolucion de Tiempo

Si $\boldsymbol{F_1(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f_1(t)}$, y $\boldsymbol{F_2(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f_2(t)}$, entonces,

$$\boxed{\boldsymbol{f_1(t)^* f_2(t) \Leftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega)}} \tag{8. 52}$$

Es decir, Convolación en el dominio de tiempo, corresponde a la multiplicación en el dominio de la frecuencia.

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{f_1(t)^* f_2(t)\}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t}\, dt \right] d\tau \end{aligned} \tag{8. 53}$$

Y dejar $\boldsymbol{t - \tau = \sigma}$, entonces, $\boldsymbol{dt = d\sigma}$, y sustituimos en (8.53),

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{f_1(t)^* f_2(t)\}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(\sigma) e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega\sigma}\, d\sigma \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\sigma) e^{-j\omega\sigma} d\sigma \end{aligned}$$

La primera integral arriba es $\boldsymbol{F_1(\omega)}$ mientras que la segunda es $\boldsymbol{F_2(\omega)}$, y en consecuencia (8.52) siguiente.

Demostración Alternativa:

Podemos aplicar la propiedad de desplazamiento de tiempo $\boldsymbol{f(t - t_0) \Leftrightarrow F(\omega) e^{-j\omega t_0}}$ en la integral entre corchetes de (8.53); entonces, reemplazándolo con $\boldsymbol{F_2(\omega) e^{-j\omega t_0}}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\{f_1(t)^* f_2(t)\}} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-\tau) e^{-j\omega t}\, dt \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, d\tau F_2(\omega) e^{-j\omega t_0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\, e^{-j\omega t_0} d\tau F_2(\omega) = F_1(\omega) F_2(\omega) \end{aligned}$$

11. Convolucion de Frecuencia

Si $\boldsymbol{F_1(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f_1(t)}$, y $\boldsymbol{F_2(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f_2(t)}$, entonces,

$$\boxed{\boldsymbol{f_1(t) f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega)^* F_2(\omega)}} \tag{8. 54}$$

Es decir, multiplicación en el dominio del tiempo, corresponde a la convolucion en el dominio de la frecuencia dividido por la constante $\boldsymbol{1/2\pi}$.

Demostración:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}_{\{f_1(t)f_2(t)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)f_2(t)]e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\chi)e^{j\chi t}\, d\chi\right] f_2(t)e^{-j\omega t}\, dt}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\chi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{j(\omega-\chi)t}\, dt\right] d\chi}$$
$$\boldsymbol{= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\chi)F_2(\omega-\chi)\, d\chi}$$

Y (8.54) siguiente.

12. Área bajo $\boldsymbol{f(t)}$

Si $\boldsymbol{F(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f(t)}$, entonces,

$$\boxed{\boldsymbol{F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt}} \tag{8. 55}$$

Es decir, el área bajo una función de tiempo $\boldsymbol{f(t)}$ es igual al valor de su transformada de Fourier evaluada en $\boldsymbol{\omega = 0}$.

Demostración:

Usando la definición de $\boldsymbol{F(\omega)}$ y que $\boldsymbol{e^{-j\omega t}\big|_{\omega=0} = 1}$, vemos que (8.55) siguiente.

13. Área bajo $\boldsymbol{F(\omega)}$

Si $\boldsymbol{F(\omega)}$ es la transformada de Fourier de $\boldsymbol{f(t)}$, entonces,

$$\boxed{\boldsymbol{f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, d\omega}} \tag{8. 56}$$

Es decir, el valor de la función de tiempo $\boldsymbol{f(t)}$, evaluada en $\boldsymbol{t = 0}$, es igual al área bajo la transformada de Fourier $\boldsymbol{F(\omega)}$ tiempos $\boldsymbol{1/2\pi}$.

Demostración:

En la transformada inversa de Fourier de (8.3), dejamos que $\boldsymbol{e^{j\omega t}\big|_{t=0} = 1}$, y (8.56) siguiente.

14. Teorema de Parseval

Si $F(\omega)$ es la transformada de Fourier de $f(t)$, El teorema de Parseval establece que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega} \qquad (8.57)$$

Es decir, si la función de tiempo $f(t)$ representa el voltaje atraves de, o la corriente atraves de una resistencia de 1Ω, la potencia instantánea absorbida por esta resistencia es ya sea v^2/R, $v^2/1$, v^2, o i^2R, i^2. Entonces, la integral de la magnitud al cuadrado, representa la energía (en watt-segundo o joules) disipados por la resistencia. Por esta razón la integral se llama energía de la señal. La relación (8.57) a continuación, establece que si no sabemos la energía de una función de tiempo $f(t)$, pero sabemos la transformada de Fourier de la función, podemos calcular la energía sin la necesidad de evaluar la transformada inversa de Fourier.

Demostración:

De la propiedad de Convolucion de Frecuencia,

$$f_1(t)f_2(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F_1(\omega)^{*}F_2(\omega)$$

O de

$$\mathcal{F}_{\{f_1(t)f_2(t)\}} = \int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)f_2(t)]e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\chi)F_2(\omega-\chi)\, d\chi \qquad (8.51)$$

Ya que (8.58) debe valer para todo valor de ω , eso debe ser también cierto para $\omega = 0$, y bajo esta condición, se reduce a

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_1(t)f_2(t)]\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\chi)F_2(-\chi)\, d\chi \qquad (8.52)$$

Para el caso especial donde $f_2(t) = f_1{}^{*}(t)$, y la propiedad de funciones conjugadas $f^{*}(t) \Leftrightarrow F^{*}(-\omega)$, por sustitución en (8.59), obtenemos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)f^{*}(t)]\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2{}^{*}[-(-\omega)]\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)F_2{}^{*}(\omega)\, d\omega$$

Ya que $f(t)f^{*}(t) = |f(t)|^2$ y $F(\omega)F^{*}(\omega) = |F(\omega)|^2$, el teorema de Parseval se prueba. Las propiedades y teoremas de la transformada de Fourier están resumidas en la tabla 8.8

Transformada de Fourier Pares de Funciones Comunes

En esta sección, vamos a derivar la transformada de Fourier de las funciones de tiempo comunes.

1.

$$\boxed{\delta(t) \Leftrightarrow 1} \qquad (8.60)$$

Demostración:

El teorema de desplazamiento de la función delta establece que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

Y si $f(t)$ está definida en $t = 0$, entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$$

De la definición de la transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega t}\Big|_{t=0} = 1$$

Y (8.60) siguiente.

Usaremos la notación $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ para mostrar el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia correspondiente. Así, (8.60) también puede ser denotado como en la figura 8.1.

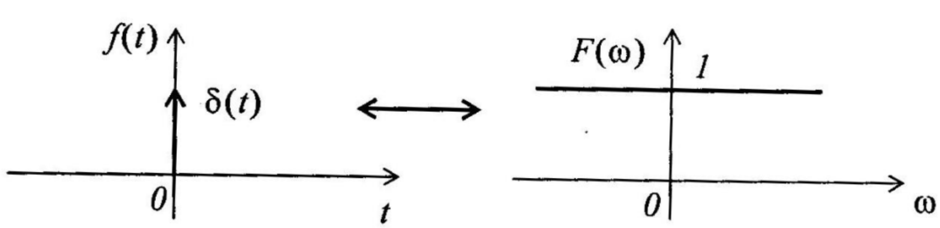


Figure 8.1. The Fourier transform of the delta function

TABLE 8.8 Fourier Transform Properties and Theorems

Property	$f(t)$	$F(\omega)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega) + \dots$
Symmetry	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Time Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time Shifting	$f(t - t_0)$	$F(\omega) e^{-j\omega t_0}$
Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Time Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n} f(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Frequency Differentiation	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
Time Integration	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau$	$\frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$
Conjugate Functions	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Time Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$
Frequency Convolution	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$
Area under f(t)	$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$	
Area under F(w)	$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)d\omega$	
Parseval's Theorem	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(\omega)\rvert^2 d\omega$	

Del mismo modo, la transformada de Fourier de la función de desplazamiento $\boldsymbol{\delta(t - t_0)}$ es

$$\boxed{\boldsymbol{\delta(t - t_0) \Leftrightarrow e^{-j\omega t_0}}} \tag{8.63}$$

2.

$$\boxed{\mathbf{1 \Leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)}} \qquad (8.62)$$

Demostración:

$$\mathcal{F}_{\{2\pi\delta(\omega)\}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega = e^{j\omega t}\Big|_{\omega=0} = 1$$

Y (8.62) siguiente.

El $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ la correspondencia también se nuestra en la figura 8.2.

Además, mediante la aplicación directa de la transformada inversa de Fourier, o la propiedad de desplazamiento de frecuencia (8.62), se deriva la transformada

La transformada par de (8.62) y (8.63) también se pueden derivar de (8.60) y

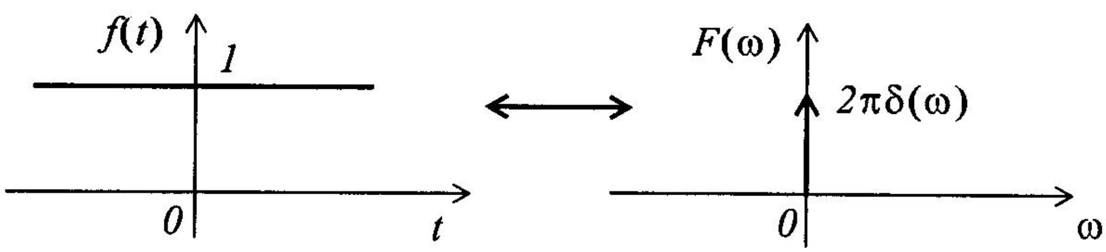


Figure 8.2. The Fourier transform of unity

(8.61) mediante el uso de la propiedad de simetría $F(t) \Leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

3.

$$\boxed{\cos\omega_0 t = \tfrac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)} \qquad (8.64)$$

Demostración:

Esta transformada par se deduce directamente de (8.63). La $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ correspondencia también se nuestra en la figura 8.3.

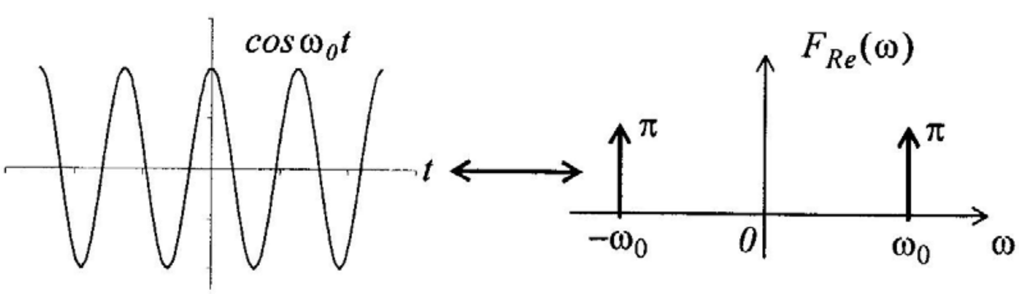


Figure 8.3. The Fourier transform of $f(t) = \cos\omega_0 t$

Sabemos que $\cos \omega_0 t$ es función de tiempo real y par, y encontramos que su transformada de Fourier es una función real y par de frecuencia. Esto es coherente con el resultado en la tabla 8.7.

4.

$$\boxed{\sin \omega_0 t = \frac{1}{j2}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \Leftrightarrow j\pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)} \qquad (8.65)$$

Demostración:

Esta transformada par también se deduce directamente de (8.63). La $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ correspondencia también se nuestra en la figura 8.4.

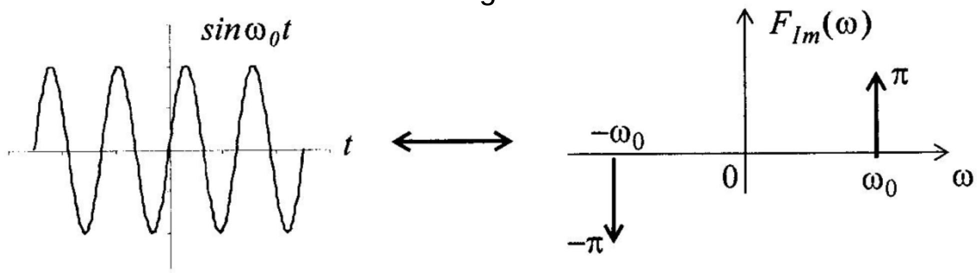


Figure 8.4. The Fourier transform of $f(t) = sin\omega_0 t$

Sabemos que $\sin \omega_0 t$ es función de tiempo real e impar, y encontramos que su transformada de Fourier es una función imaginaria e impar de frecuencia. Esto es coherente con el resultado en la tabla 8.7.

5.

$$\boxed{sgn(t) = u_0(t) - u_0(-t) \Leftrightarrow \frac{2}{j\omega}} \qquad (8.66)$$

Donde $sgn(t)$ denota la función *signum* se muestra en la figura 8.5.

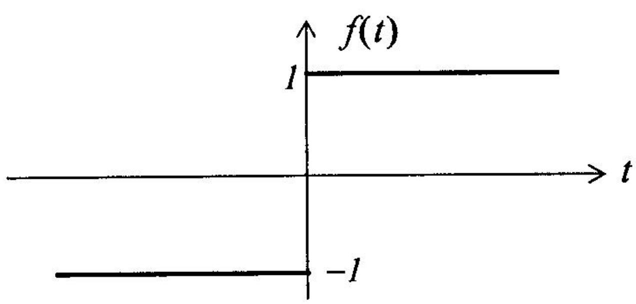


Figure 8.5. The signum function

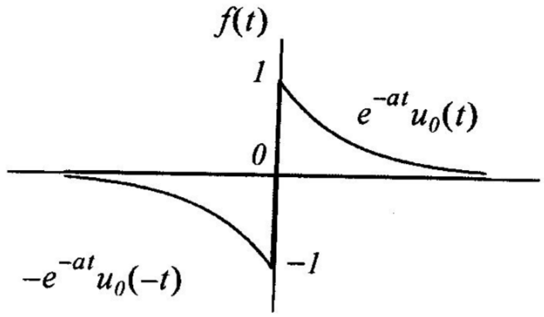


Figure 8.6. The signum function as an exponential approaching a limit

Demostración:

Para derivar la transformada de Fourier de la función $sgn(t)$, es conveniente expresarla como una exponencial que se aproxima al límite, como se muestra en la figura 8.6.

Entonces,

$$sgn(t) = \lim_{a \to 0}[e^{-at}u_0(t) - e^{at}u_0(-t)] \tag{8.67}$$

Y

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\{sgn(t)\}} &= \lim_{a \to 0}\left[\int_{-\infty}^{0} -e^{at}e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt\right] \\
&= \lim_{a \to 0}\left[\int_{-\infty}^{0} -e^{(a-j\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt\right] \\
&= \lim_{a \to 0}\left[\frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega}\right] = \frac{-1}{-j\omega} + \frac{1}{j\omega} = \frac{2}{j\omega}
\end{aligned} \tag{8.68}$$

La $\boldsymbol{f(t)} \leftrightarrow \boldsymbol{F(\omega)}$ correspondencia también se nuestra en la figura 8.7.

Sabemos que $\boldsymbol{sgn\,\omega_0 t}$ es función de tiempo real e impar, y encontramos que su transformada de Fourier es una función imaginaria e impar de frecuencia. Esto es coherente con el resultado en la tabla 8.7.

6.

$$\boxed{\boldsymbol{u_0(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}} \tag{8.69}$$

Demostración:

Si tratamos de verificar la transformada par de (8.69) por aplicación directa de la definición de la transformada de Fourier, nos encontramos con que

$$\boldsymbol{F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt = F(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega t}\,dt = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{0}^{\infty}} \tag{8.70}$$

Pero no podemos decir que $\boldsymbol{e^{-j\omega t}}$ se acerca a $\boldsymbol{0}$ ya que $\boldsymbol{t} \to \infty$, porque $\boldsymbol{e^{-j\omega t}} = \boldsymbol{1\angle -\omega t}$, es decir, la magnitud de $\boldsymbol{e^{-j\omega t}}$, es siempre unidad, y su ángulo cambia

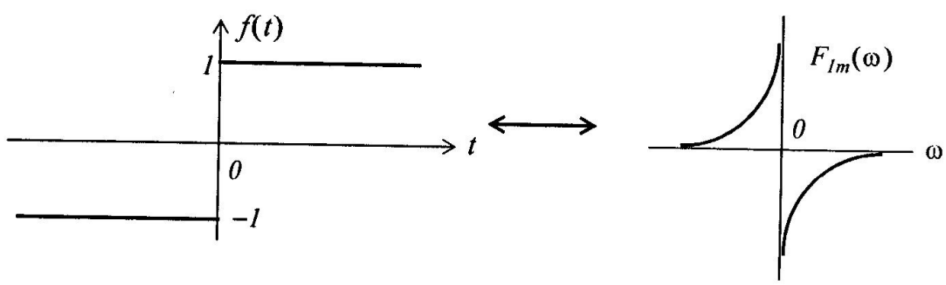


Figure 8.7. The Fourier transform of sgn(t)

continuamente a medida que $\boldsymbol{t}$ toma valores cada vez mayores. Desde el limite superior no puede ser evaluado, la integral de (8.70) no converge.

Para resolver este problema, vamos a hacer uso de la función $\boldsymbol{sgn(t)}$ que expresamos como

$$\boxed{sgn(t) = 2u_0(t) - 1} \qquad (8.71)$$

Esta expresión se deriva de la forma de onda de la figura 8.8 abajo

Reescribimos (8.71) como

$$\boxed{u_0(t) = \frac{1}{2}(1 + sgn(t)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} sgn(t)} \qquad (8.72)$$

Y puesto que sabemos que $\mathbf{1} \Leftrightarrow 2u_0(\omega)$ y $sgn(t) \Leftrightarrow 2/(j\omega)$, por sustitución de estas en (8.72) obtenemos

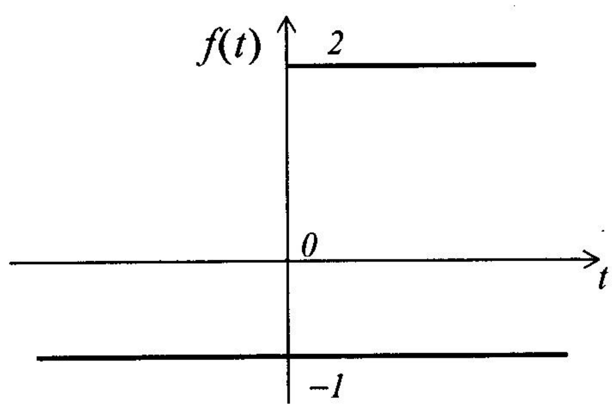


Figure 8.8. Alternate expression for the signum function

$$u_0(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Y esta es la misma que (8.69). Esta es una función compleja en el dominio de la frecuencia, cuya parte real es $\pi\delta(\omega)$ y la parte imaginaria es $-1/\omega$.

La $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ correspondencia también se nuestra en la figura 8.9.

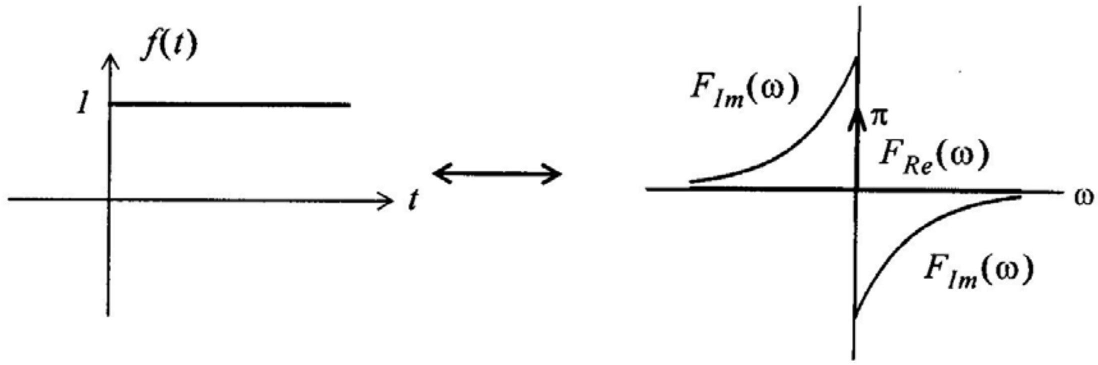


Figure 8.9. The Fourier transform of the unit step function

Ya que $u_0(t)$ es real pero ni par ni impar función del tiempo, su transformada de Fourier es una función compleja de la frecuencia como se muestra en (8.49). Esto es coherente con el resultado en la tabla 8.7.

Ahora, vamos a probar la propiedad de integración en el tiempo de (8.49), es decir,

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau \Leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi F(0)\delta(\omega)$$

Como sigue:

Por la integral de convolucion,

$$u_0(t)^* f(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) u_0(t-\tau)\, d\tau$$

Y ya que $u_0(t-\tau) = 1$ para $t > \tau$, y es cero en otro caso, la integral anterior se reduce a

$$u_0(t)^* f(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau$$

A continuación, por la propiedad de convolucion de tiempo,

$$u_0(t)^* f(t) \Leftrightarrow U_0(\omega) \cdot F(\omega)$$

Y ya que

$$U_0(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Uso de estos resultados y la propiedad de muestreo de la función delta, obtenemos

$$\boldsymbol{U_0(\omega)\cdot F(\omega)=\left(\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right)F(\omega)=\pi\delta(\omega)F(\omega)+\frac{F(\omega)}{j\omega}=\pi F(0)\delta(\omega)+\frac{F(\omega)}{j\omega}}$$

Por lo tanto, la propiedad de integración en el tiempo se demuestra.

7.

$$\boxed{\boldsymbol{e^{-j\omega_0 t}u_0(t)\Leftrightarrow\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{(\omega-\omega_0)}}} \qquad (8.73)$$

Demostración:
De la transformada de Fourier de la función escalón unitario,

$$\boldsymbol{u_0(t)\Leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}}$$

Y de la propiedad de desplazamiento de frecuencia,

$$\boldsymbol{e^{j\omega_0 t}f(t)\Leftrightarrow F(\omega-\omega_0)}$$

Obtenemos (8.73).

8.

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{u_0(t)\cos\omega_0 t}&\boldsymbol{\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{1}{2j(\omega-\omega_0)}+\frac{1}{2j(\omega+\omega_0)}}\\&\boldsymbol{\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{({\omega_0}^2-\omega^2)}}\end{aligned}} \qquad (8.74)$$

Demostración:
En primer lugar expresamos la función Coseno como

$$\boldsymbol{cos\ \omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})}$$

De (8.73),

$$\boldsymbol{e^{-j\omega_0 t}u_0(t)\Leftrightarrow\pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{(\omega-\omega_0)}}$$

Y

$$e^{j\omega_0 t}u_0(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega+\omega_0)+\frac{1}{(\omega-\omega_0)}$$

Ahora, utilizando

$$u_0(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

Obtenemos (8.74).

9.

$$\boxed{u_0(t)\, sin\, \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{\pi}{j2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega^2}{{\omega_0}^2-\omega^2}} \quad (8.75)$$

Demostración:

Primero expresamos la función como

$$sin\, \omega_0 t = \frac{1}{j2}\left(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}\right)$$

De (8.73),

$$e^{-j\omega_0 t}u_0(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0)+\frac{1}{(\omega-\omega_0)}$$

Y

$$u_0(t) \Leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

Utilizando

Obtenemos (8.75).

Obtención de la transformada de Fourier de la transformada Laplace

Si una función de tiempo $f(t)$ es cero para $t \le 0$, podremos obtener la transformada de Fourier de $f(t)$ a partir de la transformada de Laplace unilateral de $f(t)$ por sustitución de $j\omega$ con s **.**

Ejemplo 8.1

Es conocido que $\mathcal{L}\{e^{-at}u_0(t)\}=\frac{1}{s+a}$. Calcular $\mathcal{F}\{e^{-at}u_0(t)\}$.

Solución:

$$\mathcal{F}\{e^{-at}u_0(t)\}=\mathcal{L}[e^{-at}u_0(t)]|_{s=j\omega}=\left.\frac{1}{s+a}\right|_{s=j\omega}=\frac{1}{j\omega+a}$$

Por lo tanto, hemos obtenido la siguiente transformada par de Fourier.

$$\boxed{e^{-at}u_0(t) \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a}} \qquad (8.76)$$

Ejemplo 8.2

Es conocido que

$$\mathcal{L}\{(e^{-at}\cos\omega_0 t)u_0(t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + {\omega_0}^2}$$

Calcular $\mathcal{F}\{(e^{-at}\cos\omega_0 t)u_0(t)\}$

Solución:

$$\mathcal{F}\{(e^{-at}\cos\omega_0 t)u_0(t)\} = \mathcal{L}[(e^{-at}\cos\omega_0 t)u_0(t)]|_{s=j\omega} = \left.\frac{s+a}{(s+a)^2 + {\omega_0}^2}\right|_{s=j\omega}$$

$$= \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + {\omega_0}^2}$$

Por lo tanto, hemos obtenido la siguiente transformada par de Fourier.

$$\boxed{(e^{-at}\cos\omega_0 t)u_0(t) \Leftrightarrow \frac{j\omega + a}{(j\omega + a)^2 + {\omega_0}^2}} \qquad (8.77)$$

También podemos encontrar la transformada de Fourier de una función de tiempo $f(t)$ que tiene valores distintos de cero para $t < 0$, y es cero para todos $t > 0$. sino porque de un solo lado la transformada de Laplace no existe para, primero debemos expresar la función de tiempo negativo en el dominio $t > 0$, y calcular de un solo lado la transformada de Laplace. Entonces, la transformada de Fourier de $f(t)$ se puede encontrar sustituyendo s con $j\omega$ **.** En otras palabras, cuando $f(t) = 0$ para $t \geq 0$, y $f(t) \neq 0$ para $t < 0$, usamos la sustitución

$$\boxed{\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{L}[f(-t)]|_{s=-j\omega}} \qquad (8.74)$$

Ejemplo 8.3

Calcula la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-a|t|}$

a. Utilizando la definición de transformada de Fourier
b. Por sustitución en la transformada equivalente de Laplace

Solución:

a. Utilizando la definición de transformada de Fourier, obtenemos

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\,dt$$
$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2}{\omega^2+a^2}$$

Y así tenemos la transformada par

$$\boxed{e^{-a|t|} \Leftrightarrow \frac{2}{\omega^2+a^2}} \qquad (8.79)$$

b. sustitución en la transformada equivalente de Laplace, obtenemos

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \mathcal{L}[e^{-at}]|_{s=j\omega} + \mathcal{L}[e^{at}]|_{s=j\omega} = \left.\frac{1}{s+a}\right|_{s=j\omega} + \left.\frac{1}{s+a}\right|_{s=-j\omega}$$

Y este resultado es el mismo que (8.79).
Observamos que resultado de $f(t)$ es real y par, $F(\omega)$ es también real y par.

8.6 Transformada de Fourier de Formas de Onda Comunes

En esta sección, vamos a derivar la transformada de Fourier de algunas formas de onda comunes en el dominio del tiempo.

Ejemplo 8.4

Derivar la transformada de Fourier del pulso

$$f(t) = A[u_0(t+T) - u_0(t-T)] \qquad (8.80)$$

Solución:

El pulso de (8.80) se muestra en la figura 8.10.

Utilizando la definición de transformada de Fourier, obtenemos

$$\boldsymbol{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_{-T}^{T} Ae^{-j\omega t}\,dt=\left.\frac{Ae^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-T}^{T}=\left.\frac{Ae^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{T}^{-T}=\frac{A(e^{j\omega t}-e^{-j\omega t})}{j\omega}}$$
$$\boldsymbol{=2A\frac{\sin\omega T}{\omega}=2AT\frac{\sin\omega T}{\omega T}}$$

Observamos que la transformada de este pulso tiene la forma $(\boldsymbol{\sin x})/\boldsymbol{x}$, y tiene su valor máximo $\boldsymbol{2AT}$ en $\boldsymbol{\omega T=0}^{*}$.

Por lo tanto, tenemos el par de forma de onda

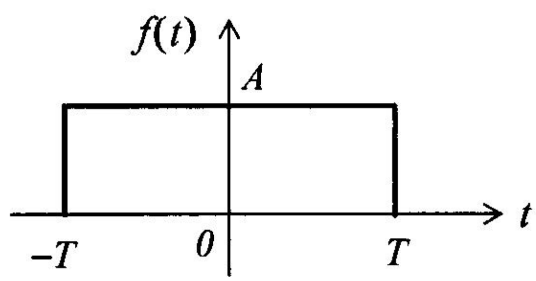


Figure 8.10. Pulse for Example 8.4

$$\boxed{\boldsymbol{A[u_0(t+T)-u_0(t-T)]\Leftrightarrow 2AT\frac{\sin\omega T}{\omega T}}}\qquad(8.81)$$

La $\boldsymbol{f(t)} \leftrightarrow \boldsymbol{F(\omega)}$ correspondencia también se nuestra en la figura 8.11. Donde se observa que $\boldsymbol{\omega}$ eje de cruce se producen en los valores de $\boldsymbol{\omega T} = \pm \boldsymbol{n\pi}$ donde $\boldsymbol{n}$ un

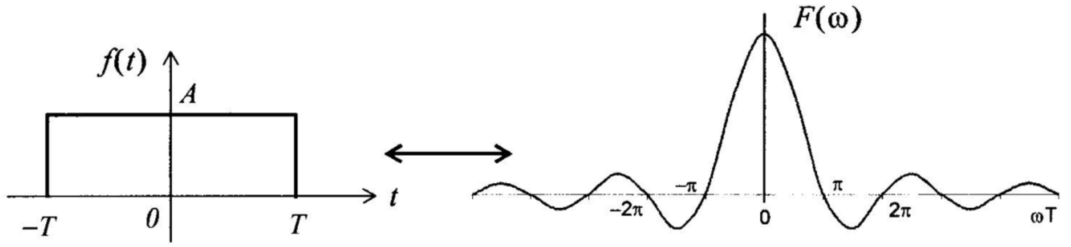


Figure 8.11. Fourier transform of $f(t) = A[u_0(t+T) - u_0(t-T)]$

numero entero.

También observamos ya que $\boldsymbol{f(t)}$ es real y par, $\boldsymbol{F(\omega)}$ es también real y par.

Ejemplo 8.5

Derivar la transformada de Fourier del pulso de la figura 8.12.

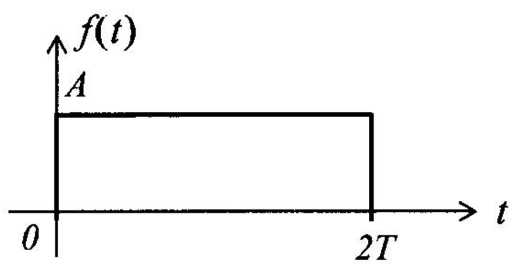


Figure 8.12. Pulse for Example 8.5

Solución:

La expresión del pulso dado es

$$\boldsymbol{f(t) = A[u_0(t) - u_0(t - 2T)]} \tag{8.82}$$

---

* Recordemos que el $\boldsymbol{lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

Utilizando la definición de transformada de Fourier, obtenemos

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt=\int_0^{2T} Ae^{-j\omega t}\,dt=\left.\frac{Ae^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_0^{2T}=\left.\frac{Ae^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{2T}^{0}=\frac{A\left(1-e^{-j\omega 2T}\right)}{j\omega}$$

Y haciendo las sustituciones

$$1=e^{j\omega T}\cdot e^{-j\omega T},\ \ e^{-j\omega 2T}=e^{j\omega T}\cdot e^{-j\omega T} \tag{8.83}$$

Obtenemos

$$F(\omega)=\frac{Ae^{-j\omega T}}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega T}\cdot e^{-j\omega T}}{j}\right)=2Ae^{-j\omega T}\left(\frac{\sin\omega T}{\omega}\right)=2ATe^{-j\omega T}\left(\frac{\sin\omega T}{\omega T}\right) \tag{8.84}$$

Solución Alternativa:

Podemos obtener la transformada de Fourier de (8.82) utilizando la propiedad de desplazamiento de tiempo, es decir,

$$f(t-t_0)\Leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Y el resultado del ejemplo 8.4. Por lo tanto, multiplicando $2AT\frac{\sin\omega T}{\omega T}$ por $e^{-j\omega T}$, obtenemos (8.84).

Observamos que $F(\omega)$ es compleja* $f(t)$ ya que no es ni función par ni impar.

Ejemplo 8.6

Derivar la transformada de Fourier de la forma de onda de la figura 8.13.

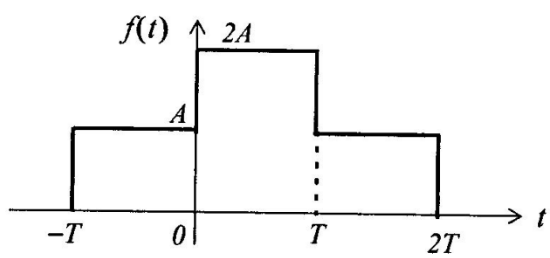


Figure 8.13. Waveform for Example 8.6

Solución:

La forma de onda dada puede ser expresada

$$f(t)=A[u_0(t+T)+u_0(t)-u_0(t-T)-u_0(t-2T)] \tag{8.85}$$

* Recordemos que $e^{-j\omega T}$ consta de una parte real y una imaginaria

Y es precisamente la suma de las formas de onda de los ejemplos 8.4 y 8.5. también se observa que esta forma de onda se obtiene por la adición grafica de las formas de onda de las figuras 8.10 y 8.12. Por lo tanto vamos a aplicar la propiedad de linealidad para obtener la transformada de Fourier de la forma de onda.

Denotamos las transformadas de los ejemplos 8.4 y 8.5 como $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$ respectivamente, y obtenemos

$$\begin{aligned} F(\omega) = F_1(\omega) + F_2(\omega) &= 2A\frac{\sin \omega T}{\omega} + 2ATe^{-j\omega T}\left(\frac{\sin \omega T}{\omega T}\right) = 2AT(1+e^{-j\omega T})\frac{\sin \omega T}{\omega} \\ &= 2ATe^{-j\frac{\omega T}{2}}\left(e^{j\frac{\omega T}{2}} + e^{-j\frac{\omega T}{2}}\right)\frac{\sin \omega T}{\omega} = 4ATe^{-j\frac{\omega T}{2}}\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\frac{\sin \omega T}{\omega} \end{aligned} \quad (8.86)$$

Ejemplo 8.7

Derivar la transformada de Fourier de

$$f(t) = A\cos \omega_0 t\,[u_0(t+T) - u_0(t-T)] \quad (8.87)$$

Solución:

De (8.45),

$$f(t)\cos \omega_0 t \Leftrightarrow \frac{F(\omega-\omega_0) + F(\omega+\omega_0)}{2}$$

Y de (8.81),

$$A[u_0(t+T) - u_0(t-T)] \Leftrightarrow 2AT\frac{\sin \omega T}{\omega T}$$

Entonces

$$\boxed{A\cos \omega_0 t\,[u_0(t+T) - u_0(t-T)] \Leftrightarrow 2AT\left[\frac{\sin[(\omega-\omega_0)T]}{(\omega-\omega_0)T} + \frac{\sin[(\omega+\omega_0)T]}{(\omega+\omega_0)T}\right]} \quad (8.88)$$

También observamos ya que $f(t)$ es real y par, $F(\omega)$ es también real y par*.

* la $\sin x/x$ es una función par

UNIDAD V

VARIABLE COMPLEJA

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA: FUNCIONES ANALÍTICAS

1. FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

Definición

Una función compleja de una variable compleja es una aplicación de un conjunto $D \subset C$ en C. Se designa por $w = f(z)$.

A cada nº complejo $z \in D$, se le asocia un único complejo $w = f(z)$.

- Si a cada valor de z en D corresponde más de un valor de w, no se trata de una aplicación o función, pero suele decirse que w es una ***función multivaluada o multiforme*** de z (por ejemplo la función $w = \sqrt{z}$, que a cada nº complejo z le hace corresponder sus dos raíces).

Una función multiforme puede considerarse como una colección de funciones uniformes. Cada miembro de la colección se llama una ***rama*** de la función. Se suele considerar un miembro particular como ***rama principal*** de la función multiforme y al valor de la función correspondiente a esa rama se le llama ***valor principal***.

Siempre que hablemos de función en este capítulo, nos referiremos, salvo advertencia expresa, a función uniforme.

- El ***conjunto imagen o recorrido*** es el conjunto de valores que toma la función:

$$R(f)=\{w\in \boldsymbol{C}\ /w=f(z), z\in D\}$$

- Es $\boldsymbol{w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)}$

Las funciones escalares $u(x,y)$, $v(x,y)$ reciben el nombre de ***parte real*** y ***parte imaginaria*** de f, respectivamente.

Ejemplo 1

La función $f(z)=z^2$, puede expresarse $f(z)=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi$

En este caso $u(x,y)=x^2-y^2$, $v(x,y)=2xy$.

- A su vez, dadas dos funciones reales $u(x,y)$, $v(x,y)$ de las variables reales x, y, la $w=u(x,y)+iv(x,y)$ es una función de z; $w=u(\operatorname{Re} z,\operatorname{Im} z)+iv(\operatorname{Re} z,\operatorname{Im} z)$ y como

$$\boldsymbol{Re\,z=\frac{z+\bar{z}}{2}},\ \boldsymbol{Im\,z=\frac{z-\bar{z}}{2i}} \qquad \textbf{(2,1)}$$

resulta $\boldsymbol{w=F(z,\bar{z})}$, que es una función de z.

En el caso del ejemplo anterior, donde $w=(x^2-y^2)+2xyi$, resulta:

$$w=\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2-\frac{1}{4i^2}(z-\bar{z})^2+2\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{(z-\bar{z})}{2i}i=\ldots=z^2$$

Ejemplo 2

Tomando ahora la función $w=(x^2+y^2)+2xyi$, se obtiene:

$$w=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)i=\frac{1}{2}(z^2-\bar{z}^2+2z\bar{z})=F(z,\bar{z})$$

que es función de z en la que interviene $\bar{z}$.

- Si se utilizan coordenadas polares: $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$
- Si la parte imaginaria de la función es nula, el recorrido de la función está contenido en $\Re$ y se dice que la función es una ***función real de variable compleja***.

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)\in\Re$$

Ejemplo 3

$$f(z)=|z|^2=z\bar{z}=x^2+y^2$$

- Más adelante se verá una condición suficiente para que la función $u(x,y)+iv(x,y)$ dependa únicamente de z, sin intervención de $\bar{z}$, como ocurre en el ejemplo 1 y no ocurre en los ejemplos 2 y 3.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA. TRANSFORMACIONES

No puede hacerse una representación gráfica de la función $w=f(z)$ tan conveniente como en el caso de funciones reales de una variable real $y=f(x)$, que se representaban mediante curvas en el plano, o como en el caso de funciones reales de dos variables reales $z = f(x, y)$, que se representaban mediante superficies en el espacio tridimensional.

Para el caso de funciones complejas $w = f(z)$, es decir $u + iv = f(x + iy)$, se necesitaría un espacio de dimensión cuatro.

Será necesario utilizar dos planos complejos; el plano z de ejes x e y, y el plano w de ejes u y v. Se representarían algunos puntos en el plano complejo z y los correspondientes en el plano w.

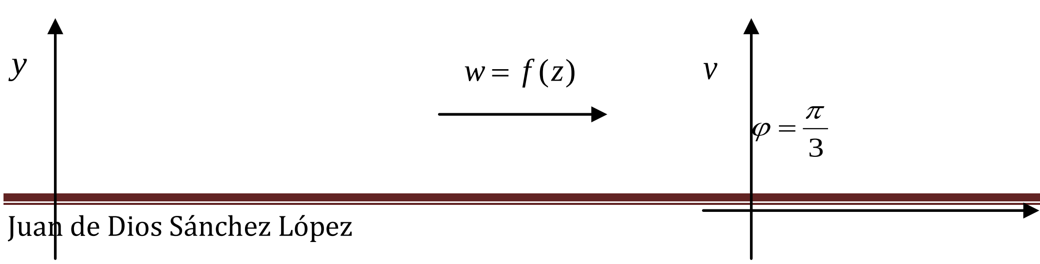
$$z = x + iy \xrightarrow{f(z)} w = u + iv$$

A cada punto $P(x, y)$ en el plano z, situado en el campo de existencia de f, corresponderá el punto $P'(u, v)$ en el plano w. Esta correspondencia se llama una ***<u>transformación del plano z en el w mediante f.</u>*** Se dirá que $P(x, y)$ se ***<u>aplica</u>*** o ***<u>transforma</u>*** en el $P'(u, v)$ por la aplicación o transformación. A P' se le llama la ***<u>imagen</u>*** de P.

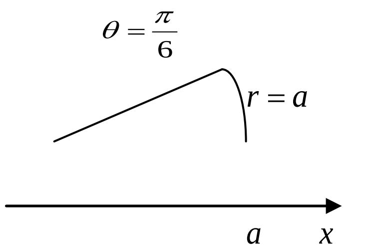
Se obtiene más y mejor información sobre f, estudiando como se transforman algunas curvas o regiones convenientes del plano z, en lugar de representar simplemente pares de puntos correspondientes.

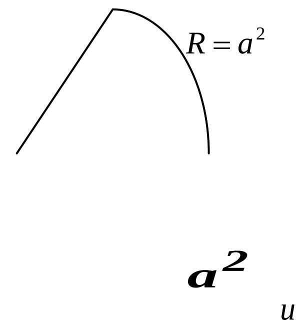
Ejemplo 4

$w = f(z) = z^2$



$z = r(\cos\theta + isen\theta)$



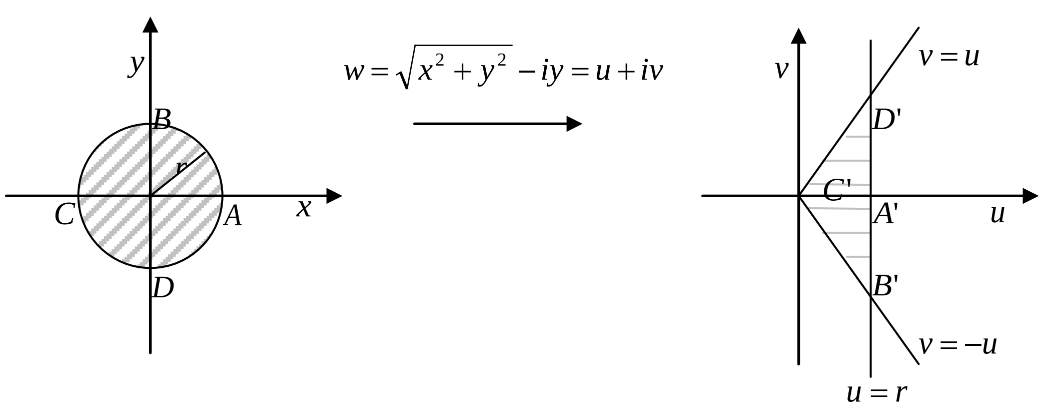


$$w = R(\cos\varphi + i sen\varphi)$$

Ejemplo 5

$$w = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$$

- Los puntos de la circunferencia $|z| = r$ se transforman en puntos de la recta $u = r$
- Los puntos de dicha circunferencia verifican $-r \le y \le r$, por lo que las imágenes pertenecen al segmento de extremos $(-r, r)$ y (r, r).



•A veces, para usar conceptos geométricos sencillos como traslación, rotación, simetría, etc, se superponen los planos z y w, considerando la transformación entre puntos de un solo plano.

Por ejemplo, $\boldsymbol{w = z + 2}$ representaría una traslación de cada punto z, dos unidades a la derecha. Y $\boldsymbol{w = \overline{z}}$, transforma cada punto z en su simétrico respecto al eje real.

3. LÍMITES

a) Definición

Sea f definida en todos los puntos de un entorno reducido de z_0. Entonces:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ /\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon \qquad (2,2)$$

Se observa que expresando los complejos en la forma $z = (x, y)$, $z_0 = (x_0, y_0)$, $w_0 = (u_0, v_0)$, la definición anterior equivale a:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ /\ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \|(u(x,y), v(x,y)) - (u_0,v_0)\| < \varepsilon$$

que corresponde a la definición de límite de la función vectorial:

$$(x,y) \longrightarrow \overline{w}(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \text{ de } \Re^2 \text{ en } \Re^2$$

Por tanto, todas las propiedades de los límites de tales funciones vectoriales son aplicables al límite de una función compleja de variable compleja. De ahí que puedan afirmarse las propiedades:

b) Propiedades

- El límite, si existe, es único.
- Si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$, y $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = \omega_0$, entonces $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{z\to z_0}[f(z) + g(z)] = w_0 + \omega_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \lambda f(z) = \lambda w_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z) = w_0\omega_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{w_0}{\omega_0} \quad si \quad \omega_0 \neq 0 \end{cases}$
- Sea $\begin{cases} f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \\ z_0 = x_0 + iy_0 \\ w_0 = u_0 + iv_0 \\ \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \end{cases}$ entonces $\begin{cases} \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Re} f(z) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = \operatorname{Re} w_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \operatorname{Im} f(z) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = \operatorname{Im} w_0 \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0| \\ \bullet \lim\limits_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0} \end{cases}$

c) Generalizaciones

- $$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \ \exists\delta(M)>0 \ / \ 0<|z-z_0|<\delta \Rightarrow |f(z)|>M$$
- $$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists N(\varepsilon)>0 \ / \ |z|>N \Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon$$
- $$\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \ \exists N(M)>0 \ / \ |z|>N \Rightarrow |f(z)|>M$$

4. CONTINUIDAD

a) Definición

$$\boldsymbol{w = f(z) \text{ es continua en } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)}$$

$$\boldsymbol{w = f(z) \text{ es continua en un dominio } D \Leftrightarrow f \text{ es continua } \forall z_0 \in D}$$

b) Propiedades

De las propiedades de los límites se deduce:

- Si $f(z)$, $g(z)$ son continuas en z_0,lo son también las funciones $\begin{cases} f(z)+g(z) \\ \lambda f(z) \\ f(z)g(z) \\ \dfrac{f(z)}{g(z)}, g(z_0)\neq 0 \end{cases}$
- Si $f(z)$ es continua en z_0, lo son $\overline{f(z)}$ y $|f(z)|$
- Si $f(z)=u+iv$ es continua en z_0, lo son en (x_0,y_0) las $u(x,y)$, $v(x,y)$
- La composición de funciones continuas, es continua.

c) Definición

$$\boldsymbol{w = f(z) \text{ es uniformemente continua en } D \Leftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta(\varepsilon) \ / \ |z_1-z_2|<\delta \ \wedge \ z_1,z_2\in D \Rightarrow |f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon}$$

d) Propiedades

- $f(z)$ uniformemente continua en $D \Rightarrow f(z)$ continua en D

- $f(z)$ continua en compacto $D \Rightarrow f(z)$ uniformemente continua en D

5. LA DERIVADA. FUNCIONES ANALÍTICAS

a) Definición

Sea $w = f(z)$ una función compleja de variable compleja, definida en un entorno de z_0. Se dice que $f(z)$ es <u>derivable</u> en z_0 si existe en C el límite:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad \text{con } \Delta z = \Delta x + i\Delta y \qquad (2,3)$$

Si dicho límite existe, recibe el nombre de ***derivada de $f(z)$ en z_0***. Se representa con $f'(z_0)$ ó $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

b) Definiciones

- ***Dominio en C***: Conjunto abierto y conexo en el plano complejo.

- $f(z)$ es ***analítica en un punto*** z_0 si es derivable en todos los puntos de algún entorno de z_0.

- $f(z)$ es ***analítica en un dominio*** $D \subset \boldsymbol{C}$, si es analítica en todos los puntos de D. También se dice entonces que $f(z)$ es ***regular*** u ***holomorfa*** en D.

- $f(z)$ se dice ***entera*** se es analítica en ***C***.

- Un punto z_0 se dice ***punto singular aislado*** o ***singularidad aislad***a de $f(z)$ si la función no es derivable en z_0, pero sí es analítica en algún entorno reducido de z_0.

c) Ejemplos

Ej. 6 La función $f(z) = a \in \boldsymbol{C}$ es entera. Además $f'(z) = 0 \ \ \forall z \in \boldsymbol{C}$.

Ej. 7 La función $f(z) = z$ es entera. Además $f'(z) = 1 \ \ \forall z \in \boldsymbol{C}$.

Ej. 8 La función $f(z) = \overline{z}$ no es derivable en ningún punto.

En efecto: $$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z+\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$\text{No existe límite de este cociente}\begin{cases} Si\quad \Delta z=\Delta x\Rightarrow \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1 \\ Si\quad \Delta z=i\Delta y\Rightarrow \dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\dfrac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1 \end{cases}$$

<u>Ej. 9</u> La función $f(z)=z^2$ es entera:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{2z\Delta z+(\Delta z)^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z\qquad \forall z\in \mathbf{C}$$

<u>Ej. 10</u> La función $f(z)=|z|^2$ solo es derivable en $z=0$

En efecto:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\frac{z\overline{\Delta z}+\overline{z}\Delta z+\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

INTRODUCCIÓN A LA INTEGRACIÓN EN EL CAMPO COMPLEJO

El desarrollo de la teoría de funciones de una variable compleja sigue un camino muy distinto al usado en la teoría de funciones de variable real.

En esta última teoría, tras estudiar las funciones derivables, se estudian las funciones que admiten derivadas de órdenes superiores, luego las indefinidamente derivables y por último las que admiten desarrollo de Taylor en serie de potencias.

En la teoría de funciones de variable compleja, se comienza estudiando las funciones analíticas. Forman éstas una clase tan restringida que automáticamente admiten derivadas de cualquier orden en cada punto en que sean analíticas. Más aún, admiten desarrollo de Taylor, en un entorno de cada punto de analiticidad.

Pero supuesta f(z) analítica en un dominio, no ha sido posible demostrar la existencia de derivadas de órdenes superiores, sin recurrir a la integración compleja. En el desarrollo de Cauchy de la teoría de funciones de variable compleja, todo se hace depender del cálculo integral complejo, incluso en cuestiones que aparentemente sólo se refieren al cálculo diferencial.

Por tanto, constituyen una parte muy importante de la teoría de funciones de variable compleja, la teoría de las integrales curvilíneas, junto con la de series de potencias. Se caracterizan por su elegancia matemática y por su gran utilidad en la matemática tanto pura como aplicada.

Para definir la integral curvilínea o integral definida compleja a lo largo de una curva, es conveniente definir previamente la integral definida de una función compleja de variable real, en un intervalo.

2. INTEGRAL DEFINIDA DE UNA FUNCIÓN COMPLEJA DE VARIABLE REAL.

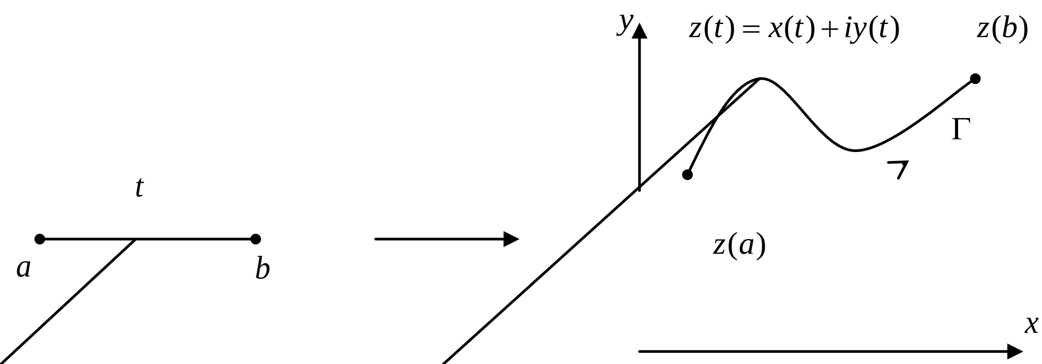
Se trata de una generalización inmediata de la integral simple real.

a) Definiciones previas

- ***Una función compleja de variable real*** es una función de la forma:

$$\boxed{f(t) = u(t) + i\, v(t) \quad \text{ó} \quad z(t) = x(t) + i\, y(t) \quad \text{con} \quad t \in I = [a,b]}$$

- Dicha función se dice ***continua*** en I, si lo son x(t) e y(t).
  Obsérvese que una ***tal función define una curva* Γ *en el plano complejo***, recorrida en un sentido determinado.



- La función anterior se dice ***continua a trozos*** en I, si x(t) e y(t) son continuas a trozos en I (Acotadas y continuas en I excepto en un número finito de puntos de discontinuidad de primera especie)

- Se dice que z(t) = x(t) + i y(t) es ***derivable a trozos*** en I si lo son x(t) e y(t).
  Se define entonces la ***función derivada*** como z´(t) = x´(t) + i y´(t)

- Se dice que z(t) = x(t) + i y(t) es ***regular*** en I, o que lo es la correspondiente curva Γ, si existen x´(t) e y´(t) y son continuas y no nulas ambas en I.

- Se dice que z(t) = x(t) + i y(t) es ***regular a trozos*** en I, o que lo es la correspondiente curva Γ, si x(t) e y(t). son continuas en I, existiendo y siendo continuas, x´(t) e y´(t). en I, excepto a lo sumo en un nº finito de puntos en los que deben existir y ser continuas las derivadas laterales.

- ***Un contorno*** es una curva Γ regular a trozos y simple o de Jordan.

b) Definición

Dada la función compleja de variable real z(t) = x(t) + i y(t) continua a trozos en [a,b], se define la integral definida de z(t) sobre [a,b] como

$$\boxed{\int_a^b z(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i\int_a^b y(t)dt} \qquad \textbf{(4.1)}$$

c) <u>Propiedades</u>

De la definición y las propiedades de la integral definida de funciones reales de variable real, se deduce de forma inmediata, siendo z(t), $z_1(t)$, $z_2(t)$, continuas a intervalos en

I = [a,b]:

- $\int_a^b z(t)dt = -\int_b^a z(t)dt$
- $\int_a^b [z_1(t) + z_2(t)]dt = \int_a^b z_1(t)dt + \int_a^b z_2(t)dt$
- $\int_a^b z(t)dt = \int_a^c z(t)dt + \int_c^b z(t)dt$

También se cumple:

- $Re\int_a^b z(t)dt = \int_a^b Re[z(t)]\, dt$
- $\int_a^b \alpha\, z(t)dt = \alpha\int_a^b z(t)dt \qquad \alpha \in C$
- ***Si la función compleja de variable real Z(t) verifica Z´(t) = z(t) , entonces:***

$$\int_a^b z(t)dt = Z(b) - Z(a)$$

Se verifica también: $$\left|\int_a^b z(t)dt\right| \leq \int_a^b |z(t)|\, dt$$

Demostración:

Sea $\int_a^b z(t)dt = R.e^{i\theta}$ Entonces $\left|\int_a^b z(t)dt\right| = R = e^{-i\theta}\int_a^b z(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta} z(t)dt$

Si $f(t) = u(t) + iv(t)$ verifica que $\int_a^b f(t)dt$ es real, entonces: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}[f(t)]dt$

La integral $\int_a^b e^{-i\theta} z(t)dt$ es real por ser igual a R.

Luego $\left|\int_a^b z(t)\, dt\right| = \int_a^b e^{-i\theta} z(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right] dt$

Ahora el integrando es una función real de variable real y además:

$$\operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right] \leq \left|e^{-i\theta} z(t)\right| = |z(t)|$$

Luego aplicando la correspondiente propiedad del caso real:

$$\left|\int_a^b z(t)\, dt\right| = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} z(t)\right] dt \leq \int_a^b |z(t)|\, dt$$

3. INTEGRALES CURVILÍNEAS COMPLEJAS, O DE CONTORNO

a) Definición

“Sea C un contorno descrito por C: $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ con $t \in I = [a,b]$

Sea $f(z)$ una función compleja de variable compleja, continua sobre C.

La integral curvilínea compleja o integral de contorno de $f(z)$ a lo largo del arco orientado C, que se representa por $\int_C f(z)dz$, se define así:

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f\left[z(t)\right] z'(t)\,dt} \qquad \textbf{(4.2)}$$

b) Comentarios

- La integral del 2º miembro es integral de una función compleja de variable real t.

- Existe esa integral, pues z(t) es continua en I y f(z) continua sobre C.
  Luego $f\left[z(t)\right]$ es continua en I y como $z'(t)$ es continua en I excepto en un nº finito de puntos, el integrando es continua a trozos en I.

- Si $z'(t)$ no es continua sobre I, puede dividirse el intervalo I de forma obvia. Es decir si C está compuesto de un nº finito n de arcos regulares orientados C_i entonces: $\int_C f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(z)\,dz$

c) <u>Expresión en términos de integrales curvilíneas reales</u>

De la definición:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt = \int_a^b \{u[x(t), y(t)] + i\,v[x(t), y(t)]\}[x'(t) + i\,y'(t)]dt =$$

$$= \int_a^b \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt + i\int_a^b \{u[x(t), y(t)]y'(t) + v[x(t), y(t)]x'(t)\}dt$$

Luego: $\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy$ **(4.3)**

Puede escribirse $\int_C (u + iv)(dx + idy)$, desarrollando el integrando de acuerdo con las leyes algebraicas usuales.

d) <u>Notas</u>

- Salvo indicación expresa, convenimos en que:
  - Los caminos de integración son contornos
  - Los integrandos son funciones continuas sobre esos contornos, o más generalmente continuas a intervalos

Por eso a la integral curvilínea se le designa integral de contorno.

- El valor de la integral $\int_C f(z)dz$ es invariante si se sustituye la representación paramétrica $z(t)\;\; t \in I$, por otra equivalente en el sentido que se vió en las integrales curvilíneas reales , siempre que describa la curva en el mismo sentido. Si se describe en sentido opuesto cambia el signo de la integral.

  Se deduce de la expresión en términos de integrales curvilíneas reales y de la invariancia de éstas ante el cambio de parámetros.

e) <u>Propiedades</u>

i) $$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

Se entiende que si C está descrita por $z(t)\;\; t \in [a,b]$ entonces -C está descrita por z(t) con t variando desde t = b hasta t = a. Queda entonces la curva recorrida en sentido contrario al de C.

ii) $$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Se entiende que si $C_1 \equiv z_1(t)\;\; t \in [a,b]$ y $C_2 \equiv z_2(t)\;\; t \in [b,c]$ y siendo $z_1(b) = z_2(b)$ se denota $C_1 + C_2$ al contorno definido por

$$C_1 + C_2 \equiv z_3(t) = \begin{cases} z_1(t) & t \in [a,b] \\ z_2(t) & t \in [b,c] \end{cases}$$

Puede generalizarse a $\int_{C_1+...+C_n} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z)dz$ donde con $C_1 + ... + C_n$ se entiende la generalización obvia de la definición vista para $C_1 + C_2$

iii) $$\int_C k\; f(z)dz = k\int_C f(z)dz \quad k \in C$$

iv) $\int_C [f(z)+g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)\, dz$

La demostración de estas cuatro primeras propiedades se deduce de la definición de integral de contorno y las propiedades de la integral de funciones complejas de variable real.

f) <u>Desigualdad *ML*</u>

Si f(z) es continua a trozos sobre un contorno $C \equiv z(t)$ $t \in [a,b]$, y es M una cota superior de $|f(z)|$ en C y L la longitud de C, se verifica: $\left|\int_C f(z)dz\right| \le ML$

En efecto:

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f[z(t)]z'(t)dt\right| \le \int_a^b |f[z(t)]||z'(t)|dt \le M\int_a^b |z'(t)|dt = ML$$

g) <u>Notas</u>

- Si z recorre C, se interpreta $|dz|$ como $|dz| = |x'(t)+iy'(t)|dt$

  Por tanto, como la longitud de un contorno $C \equiv z(t)$, $t \in [a,b]$ es $L = \int_a^b |z'(t)|dt$,

  puede expresarse L de forma abreviada por $L = \int_C |dz|$

- Puede hablarse también de integración respecto a la longitud del arco. Se representa por $\int_C f(z)ds$ o $\int_C f(z)|dz|$ y se define por:

$$\int_C f(z)ds = \int_C f(z)|dz| = \int_a^b f[z(t)]|z'(t)|dt$$

- Suelen considerarse integrales curvilíneas, respecto a $\bar{z}$. Se definen formalmente:

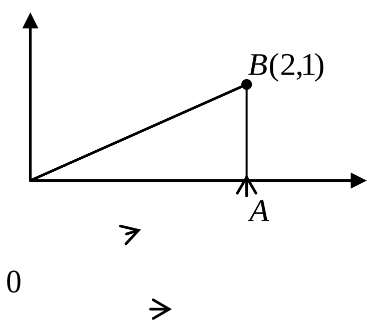
$$\int_C f(z)d\bar{z} = \int_C (u+iv)(dx-idy) = \int_C udx + vdy - i\int_C udy - vdx = \overline{\int_C \bar{f}dz}$$

- Con esta notación suelen introducirse:

$$\int_C f(z)dx = \frac{1}{2}\left[\int_C f(z)dz + \int_C f(z)d\bar{z}\right] \qquad \int_C f(z)dy = \frac{1}{2i}\left[\int_C f(z)dz - \int_C f(z)d\bar{z}\right]$$

h) <u>Ejemplos de integrales de contorno</u>

Ejemplo 1. ***Calcular*** $\int_{C_1} z^2 dz$ ***siendo*** $C_1 = \overline{OB}$



Los extremos son $z = 0$ y $z = 2 + i$

Entonces $z(t) = 2t + it = (2+i)t \quad t \in [0,1]$

z^2 es continua sobre C_1

Por la definición $\int_{C_1} z^2 dz = \int_0^1 [(2+i)t]^2 (2+i)dt = (2+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \dfrac{(2+11i)}{3}$

Ejemplo 2. ***Calcular*** $\int_{C_2} z^2 dz$ ***siendo*** $C_2 = \overline{OAB}$

$I = \int_{C_2} z^2 dz = \int_{\overline{OA}} z^2 dz + \int_{\overline{AB}} z^2 dz$; $\overline{OA}: z(t) = t$, $t \in [0,2]$; $\overline{AB}: z(t) = 2 + it$, $t \in [0,1]$

Luego $\int_{C_2} z^2 dz = \int_0^2 t^2 dt + \int_0^1 (2+it)^2 i\,dt = \frac{8}{3} + \int_0^1 -4t\,dt + i\int_0^1 (4-t^2)\,dt =$

$= \frac{8}{3} + \left[-2t^2 + i\left(4t - \frac{t^3}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{8}{3} - 2 + i\left(4 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2+11i}{3}$

Observemos que $\int_{C_1} z^2 dz = \int_{C_2} z^2 dz$ Luego $\int_{C_1 - C_2} z^2 dz = 0$

Ejemplo 3.

Calcular $\int_{C_3} \bar{z} dz$ siendo C_3 la semicircunferencia superior de $|z| = 1$, desde z= -1 hasta z = 1

Es $C_3 \equiv z(t) = \cos t + i\operatorname{sen} t = e^{it} \quad t \in [\pi, 0]$; $I_3 = \int_{C_3} \bar{z}\,dz = \int_\pi^0 e^{-it} ie^{it} dt = i\int_\pi^0 dt = -i\pi$

Ejemplo 4.

Calcular $\int_{C_4} \bar{z} dz$ siendo C_4 la semicircunferencia inferior de $|z| = 1$, desde z = -1 hasta z = 1.

Es $C_4 \equiv z(t) = e^{it} \quad t \in [\pi, 2\pi]$; $\qquad I_4 = \int_{C_4} \bar{z}\,dz = \int_\pi^{2\pi} i dt = \pi i$

Obsérvese que $I_4 \neq I_3$

Ejemplo 5.

Calcular $\int_{C_5} \bar{z}dz$ ***siendo*** C_5 ***la circunferencia*** $|z| = 1$ ***en sentido antihorario.***

Es $I_5 = I_4 - I_3 = 2\pi i$. Como sobre C_5 es $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{1}{z}$. Luego: $\int_{C_5} \dfrac{dz}{z} = 2\pi i$

Ejemplo 6.

Sin resolver la integral, hallar una cota superior del módulo de $I_6 = \int_{C_6} \dfrac{dz}{z^4}$ ***siendo*** C_6 ***el segmento de origen en*** $z = i$ ***y extremo en*** $z = 1$

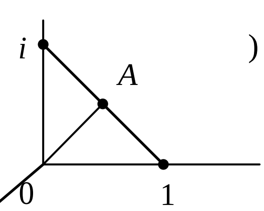
Sobre C_6 es $f(z) = \dfrac{1}{z^4}$ continua, $C_6 \equiv z(t) = t + (1-t)i$, $t \in [0,1]$

Es $|I_6| = \left|\int_{C_6} \dfrac{dz}{z^4}\right| \leq ML$, siendo: $\begin{cases} M : \text{cota superior de } \left|\dfrac{1}{z^4}\right| \text{ sobre } C_6 \\ L : \text{longitud de } C_6 \end{cases}$

Sobre C_6 es: $|z^4| = |z|^4 = \left|t^2 + (1-t)^2\right|^2 = \left(2t^2 - 2t + 1\right)^2 = \left[2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\right]^2 \geq \dfrac{1}{4}$

(Puede verse también geométricamente que sobre C es $|z|$ mayor que distancia OA, es decir

$|z| > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |z|^4 > \dfrac{1}{4}$)



Luego $\left|\dfrac{1}{z^4}\right| \leq 4$. Es por tanto $M = 4$ y como $L = \sqrt{2}$ resulta $|I_6| \leq 4\sqrt{2}$

4. TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

a) Teorema de Cauchy-Goursat (4.4)

Si f(z) es analítica sobre un contorno cerrado C y su interior, entonces $\int_C f(z)dz = 0$

Es un teorema de gran importancia en la teoría de funciones de variable compleja.

Su demostración es complicada bajo esta forma general.

La forma original de Cauchy exige además la continuidad de f´(z) sobre C y su interior. Goursat fue el primero en mejorar el teorema, suprimiendo la hipótesis de la continuidad de f´(z), no necesaria para demostrar la tesis. Precisamente el ser f´(z) continua es una consecuencia que se demuestra a partir del teorema.

Veamos la demostración en la forma de Cauchy:

Sea R la región cerrada formada por C y su interior. Sea f(z) = u(x,y) + i v(x,y)

Por ser f(z) analítica en R, las u y v son continuas, derivables y cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en R.

Si añadimos que f´(z) sea continua en R, entonces las derivadas de u, v son continuas en R.

Es $\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy$

Y por ser u, v continuas y con derivadas continuas en R es aplicable el teorema de Green-Riemann a cada una de las integrales curvilíneas reales. Resulta:

$$\int_C f(z)\,dz = -\int\int_R \left(v_x + u_y\right)dx\,dy + i\int\int_R \left(u_x - v_y\right)dx\,dy$$

Y por cumplirse las condiciones de Cauchy-Riemann:

$u_x = v_y$; $u_y = -v_x$, resulta: $\int_C f(z)dz = 0$ c.q.d.

b) <u>Ejemplos</u>

Ejemplo 7.

Calcular $\int_C z^n\,dz$ ***siendo*** $n \in N$ ***y C la circunferencia de centro en z = 0 y radio a.*** La función es entera y C un contorno cerrado. Luego $\int_C z^n dz = 0$ según el teorema de Cauchy-Goursat.

Calculando directamente: $C \equiv ae^{i\theta}$ $0 \le \theta < 2\pi \Rightarrow$ Luego:

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{2\pi} \left(ae^{i\theta}\right)^n aie^{i\theta}d\theta = ia^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}d\theta = \frac{a^{n+1}}{n+1}\left[e^{i(n+1)\theta}\right]_0^{2\pi} = \frac{a^{n+1}}{n+1}\left[1-1\right] = 0$$

UNIDAD VI

PROCESOS ESTOCASTICOS

Axiomas de la probabilidad

1.La probabilidad es positiva y menor o igual que 1.

$0 \leq p(A) \leq 1$

2. La probabilidad del suceso seguro es 1.

$p(E) = 1$

3.Si A y B son incompatibles, es decir $A \cap B = \varnothing$ entonces:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Propiedades de la probabilidad

1 La suma de las probabilidades de un suceso y su contrario vale 1, por tanto la probabilidad del suceso contrario es:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

2 Probabilidad del suceso imposible es cero.

$$p(\varnothing) = 0$$

3 La probabilidad de la unión de dos sucesos es la suma de sus probabilidades restándole la probabilidad de su intersección.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

4 Si un suceso está incluido en otro, su probabilidad es menor o igual a la de éste.

$$Si \;\; A \subset B, \text{entonces} \qquad p(A) \leq p(B)$$

5 Si A_1, A_2, ..., A_k son incompatibles dos a dos entonces:

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_k)$$

6 Si el espacio muestral E es finito y un suceso es S = $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ entonces:

$p(S) = p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n)$ Por ejemplo la probabilidad de sacar par, al tirar un dado, es:

P(par) = P(1) + P(2) + P(3)

Regla de Laplace

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplos

Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salgan dos caras.

Casos posibles: {cc, cx, xc, xx}.

Casos favorables: 1.

$$P(2\ caras) = \frac{1}{4}$$

En una baraja de 40 cartas, hallar la P (as) y P (copas).

Casos posibles: 40.

Casos favorables de ases: 4.

$$P(as) = \frac{1}{40}$$

Casos favorables de copas: 10.

$$P(copas) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

Calcular la probabilidad de que al echar un dado al aire, salga:

1 Un número par.

Casos posibles: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Casos favorables: {2, 4, 6}.

$$P(par) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

2 Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(\dot{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2 Un múltiplo de tres.

Casos favorables: {3, 6}.

$$P(\dot{3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3 Mayor que 4.

Casos favorables: {5, 6}.

$$P(> 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de la unión de sucesos

Probabilidad de la unión de sucesos incompatibles

A $\cap$B = $\varnothing$

p(A $\cup$B) = p(A) + p(B)

Calcular la probabilidad de obtener un 2 ó un 5 al lanzar un dado.

$$P(2 \cup 5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilidad de la unión de sucesos compatibles

$A \cap B \neq \varnothing$

$\mathbf{p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)}$

$\mathbf{p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)}$

Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado.

$$P(\dot{2} \cup 6) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

VARIABLES ALEATORIAS

1.- VARIABLES ALEATORIAS. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN. FUNCIÓN DE DENSIDAD.

1.1 VARIABLE ALEATORIA

Lo que se pretende con la variable aleatoria es sustituir el espacio de resultados por uno numérico, para facilitar la comprensión.

DEFINICIÓN

Se llama variable aleatoria a aquella cuyo valor está determinado por el valor del experimento.

1.2 TIPOS DE VARIABLES ALEATORIAS

Se llama v.a. discreta a aquella cuyos valores son un nº finito de números reales distintos.

Se llama v.a. continua a aquella cuyos valores son un intervalo, o una unión de intervalos sobre la recta de los números reales. Por tanto, puede tomar ∞ valores.

EJEMPLOS

1. Lanzar 2 dados y que la v.a. X sea la suma de resultados:
La v.a. discreta X es : {2, 3, 4, ..., 12}

2. Sea el experimento: "conocer el tiempo que se tarda en realizar un cierto trabajo".

La v.a. continua X toma ∞ valores.

NOTA

Al conjunto de valores que toma la v.a. X se le denomina rango de X , rg X .

1.3. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Asociamos la v.a. a la probabilidad con la que hacíamos corresponder a cada uno de los resultados, y por tanto, a cada suceso.

Se dice que tenemos una distribución de probabilidad de la v.a. X, cuando asociamos probabilidades a la v.a. que procede de un espacio de resultados probabilizado.

EJEMPLO

Sea el experimento "lanzar una moneda"

Ω = { cara, cruz }

Sea la v.a. X = nº de caras que obtenemos

Los valores de X son 1 ó 0

Además, P(cara) = P (cruz) = ½

Si hacemos: A = {sacar cara} B = {sacar cruz}

$x_1 = X(A) = 1$ $P(x_1) = P(1) = P(X=1) = ½$

$x_2 = X(B) = 0$ $P(x_2) = P(0) = P(X=0) = ½$

EJEMPLO

Lanzamos una moneda 10 veces:

X = nº de caras obtenidas.

$0 \leq X \leq 10 \Rightarrow$ toma una cantidad de valores finita, luego es de tipo discreto.

Probabilidad de no sacar caras = $P(X=0) = (1/2)^{10}$

Probabilidad de sacar 1 cara = $P(X=1)= \quad (1/2)^1 (1/2)^9 = \quad (1/2)^{10}$

En general:

$P(X = x) = \quad (1/2)^{10}$

1.4 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Definimos la función de distribución , F , de una v.a. X , como una función definida para cada nº real x , de la forma :

$F(x) = P(X \leq x) \qquad -\infty < x < \infty$

Es decir, una función que nos indica la probabilidad de que la v.a. X tome valores menores o iguales al x dado.

Nos indica la probabilidad acumulada desde el extremo inferior del intervalo, hasta el valor x del dominio de la v.a. X

Como $F(x) = P(X \leq x)$ es una probabilidad y ésta está comprendida entre 0 y 1 $\Rightarrow$ $0 \leq F(x) \leq 1$

PROPIEDADES

1) $0 \le F(x) \le 1$, ya vista

2) La función de distribución es <u>no decreciente</u> a medida que crece x, o sea :

Si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

Veámoslo:

Si $x_1 < x_2 \Rightarrow P(X \le x_1) \le P(X \le x_2) \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$

3) En la función de distribución se cumple:

$\lim F(x) = 0$ $\qquad\qquad$ $\lim F(x) = 1$

Veámoslo:

Si $x \to -\infty \Rightarrow P(X \le -\infty) = P(\varnothing) = 0$

Si $x \to +\infty \Rightarrow P(X \le +\infty) = P(\Omega) = 1$

4) $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Demostración:

Descomponemos el intervalo $(-\infty, x_2]$ en $(-\infty, x_1] \cup (x_1, x_2]$, disjuntos:

$F(x_2) = P(X \le x_2) = P(X \in (-\infty, x_2]) = P(X \in (-\infty, x_1]) + + P(X \in (x_1, x_2]) = F(x_1) + P(x_1 < X \le x_2)$

Despejando:

$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

5) La función de distribución es siempre continua por la derecha, o sea:

$F(x) = F(x^+) = F(\lim (x+\varepsilon)) \qquad \forall x$

Es inmediata, ya que $F(\lim (x+\varepsilon)) - F(x) = F(x) - F(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = F(\lim(x+\varepsilon)) = F(x^+)$

Nota: Por la izquierda no tiene por qué ser continua.

1.4.1 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE UNA V.A. DISCRETA

Si la v.a. es discreta, la función de distribución es escalonada, y los saltos del escalonamiento tendrán un tamaño igual a la probabilidad del punto en que estemos, manteniéndose constante hasta el siguiente punto de la variable.

EJEMPLO

Sea un juego con 5 opciones, numeradas del 1 al 5, con las siguientes probabilidades:

Opción 1 ---------------- P = 0,1

Opción 2 ---------------- P = 0,3

Opción 3 ---------------- P = 0,2

Opción 4 ---------------- P = 0,1

Opción 5 ---------------- P = 0,3

Creamos una v.a. X cuyos valores corresponden al valor que puede tomar la opción:

$P(X = 1) = P(1) = 0,1$

$P(X = 2) = P(2) = 0,3$

$P(X = 3) = P(3) = 0,2$

$P(X = 4) = P(4) = 0,1$

$P(X = 5) = P(5) = 0{,}3$

La función de distribución es $F(x) = P(X \leq x)$ para $x=1, 2, 3, 4, 5$ y tomará los siguientes valores:

$F(1) = P(X \leq 1) = 0{,}1$

$F(2) = P(X \leq 2) = 0{,}4$

$F(3) = P(X \leq 3) = 0{,}6$

$F(4) = P(X \leq 4) = 0{,}7$

$F(5) = P(X \leq 5) = 1$

Su representación gráfica es :

1.4.2 FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN DE UNA V.A. CONTINUA

Si la v.a. es continua, la función de distribución $F(x)$ es conti-nua por la derecha y por la izquierda.

EJEMPLO

Supongamos una máquina que fabrica piezas de una longitud máxima de 3 cm. , pero no sabemos la longitud que tienen. Por tanto, la longitud será la v.a. X, de tipo continuo pues $x \in [0 , 3]$, de la que suponemos que conocemos F(x), siendo :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 / 9 & \text{si} \quad 0 < x \le 3 \\ 1 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Evidentemente, $P(X \le 3) = 1 \Rightarrow$ la v.a. continua toma valores entre 0 y 3 , su representación gráfica es :

1.4.3 CÁLCULO DE PROBABILIDADES A PARTIR DE LA FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

1) $\forall$ x , se cumple : $P(X > x) = 1 - F(x)$

Es inmediato, ya que :

$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$ (por definición)

2) $\forall$ x se cumple : $P(X < x) = F(x^-)$

Demostración :

Hemos visto, por la propiedad 5, que $F(x) = F(x^+) = P(X \leq x)$

La diferencia entre $P(X < x)$ y $P(X \leq x)$ es que en esta última hemos añadido la probabilidad de x, luego $P(X < x) = F(x^-)$, que es la función de distribución hasta el valor de X infinitésimamente anterior al x dado.

NOTA

Si la v.a. es continua, no hay saltos, luego :

$P(X < x) = P(X \leq x) = F(x)$

3) Dados los valores de X, x_1, x_2 tales que $x_1 < x_2 \Rightarrow P(x_1 < X < x_2) =$

$= F(x_2^-) - F(x_1)$

Veámoslo :

$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X \leq x_1)$

Como $P(X < x_2) = F(x_2^-)$ y $P(X \leq x_1) = F(x_1)$, se tiene que :

$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2^-) - F(x_1)$

4) $\forall$ x se cumple : $P(X = x) = F(x^+) - F(x^-)$

Demostración :

$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) \Rightarrow P(X = x) = F(x^+) - F(x^-)$

Si la v.a. es continua :

$P(X = x) = F(x) - F(x) = 0$

EJEMPLO

Sea la función de distribución de X de tipo discreto :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 0{,}3 & \text{si } x = 1 \\ 0{,}6 & \text{si } x = 2 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Calcular :

a) $P(X > 2)$

b) $P(1 < X \leq 2)$

c) $P(X < 2)$

d) $P(X = 2)$

Resolución :

a) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

b) $P(1 < X \leq 2) = F(2) - F(1) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

c) $P(X < 2) = F(2^-) = 0{,}2$

d) $P(X = 2) = F(2^+) - F(2^-) = 0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$

EJEMPLO

Sea la función de distribución de X , de tipo continuo :

$$0 \quad \text{si} \quad x \leq 0$$

$F(x) = \quad x^2/9 \quad \text{si } 0 < x \leq 3$

$\qquad\qquad 1 \quad \text{si } x > 3$

Calcular :

a) $P(X > 1{,}3)$

b) $P(X = 2)$

Resolución:

a) $P(X > 1{,}3) = 1 - P(X \leq 1{,}3) = 1 - F(1{,}3) = 1 - (1{,}3)^2 / 9 = 0{,}812$

b) $P(X = 2) = F(2^+) - F(2^-) = F(2) - F(2) = 0$

↑

por ser continua

1.5 FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE MASA

Vamos a definir una función que nos especificará la probabilidad de los diversos valores de la variable, cuando es discreta.

DEFINICIÓN

Dada una v.a. X, de tipo discreto, se llama función de densidad de probabilidad P(X) a una función real, tal que cuando la v.a. X toma un determinado valor x_i , es igual a la probabilidad de que ocurra el suceso que viene asociado a dicho valor x_i de la variable. Es decir :

$P(x_i) = P($ suceso al que representa x_i , según la v.a. X $)$

PROPIEDADES

1) $0 \leq P(x) \leq 1 \qquad \forall\ x$

2) Σ P(x) = 1 $\forall$ x

3) $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \Sigma\ P(x)$

4) $F(x_1) = \Sigma\ P(x)$

EJEMPLO

Sea el experimento de lanzar dos dados, en el que nos interesa la diferencia entre los resultados.

X = número mayor - número menor

Su campo de definición es { 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

Por medio de la regla de Laplace podemos calcular la probabili-dad de cada resultado :

P(X = 0) = P(0) = 6 / 36

P(1) = 10 / 36

P(2) = 8 / 36

P(3) = 6 / 36

P(4) = 4 / 36

P(5) = 2 / 36

Es función de probabilidad, pues cumple las dos condiciones fun-damentales :

- Todas las probabilidades están entre 0 y 1

- Sumadas obtenemos el valor 1

La forma analítica de esta función será :

$$P(x) = \begin{cases} 6/36 & \text{si } x = 0 \\ 12/36 - 2/36 \cdot x & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Su representación gráfica será :

Por ejemplo :

$$P(2 < X \leq 4) = \underbrace{P(3) + P(4)}_{\text{por la propiedad 3}} = 6/36 + 4/36 = 10/36$$

1.6. FUNCIÓN DE DENSIDAD

Cuando el experimento da lugar a una v.a. X continua, la variable da lugar a una función de distribución F(x) de tipo continuo, no exis-tiendo probabilidad para un valor concreto de la variable.

La representación de F(x) será :

La probabilidad de que la variable esté comprendida en el inter-valo [A, B] es F(B) - F(A).

Si dividimos la probabilidad de que un valor de X esté en un intervalo, por la longitud del intervalo, obtenemos la densidad media de probabilidad en dicho intervalo, que será : $\dfrac{F(B) - F(A)}{B - A}$

DEFINICIÓN

Se define la función de densidad en un punto x, como el límite de la densidad media de probabilidad de un intervalo, cuando la longitud del intervalo tiende a cero. Se representa por f(x) y será :

$$f(x) = \lim \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

Vemos pues que la función de densidad es la derivada de la fun-ción de distribución, $f(x) = F'(x)$

PROPIEDADES

1) La función de densidad es siempre positiva

Demostración :

Como la variable es continua $\Rightarrow$ la función de distribución es siempre creciente $\Rightarrow$ su derivada (función de densidad o de cuantía) es positiva.

2) $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$

Veámoslo :

$$f(+\infty) = \lim \frac{F(+\infty + \Delta x) - F(+\infty)}{\Delta x} = \lim \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0$$

$$f(-\infty) = \lim \frac{F(-\infty + \Delta x) - F(-\infty)}{\Delta x} = \lim \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

3) La función de distribución es una primitiva de la función de den-sidad, ya que $f(x) = F'(x)$

Por tanto :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Demostración :

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = [\ F(t)\ ] = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x)$$

4) Dada una v.a. X con función de densidad f(x), se cumple :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Veámoslo :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$

EJEMPLO

Sea X una v.a. continua, cuya función de distribución es :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{para} \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{para} \quad x > 1 \end{cases}$$

La función de densidad será $f(x) = F'(x) = 3x^2$, luego :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Veamos que realmente es función de densidad :

$\int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 dx = \int_0^1 3x^2\, dx = [\, x^3 \,] = 1 - 0 = 1$

La representación gráfica es :

La superficie entre la curva y el eje OX tiene valor 1 .

La probabilidad de que x pertenezca a cierto intervalo está en la superficie generada por la curva y el eje OX, y las verticales de los extremos del intervalo.

Por ejemplo, $P(0.5 < x < 0.7) = \int_{0.5}^{0.7} 3x^2 dx = [x^3]$ $= (0.7)^3 - (0.5)^3 = = 0.343 - 0.125 = 0.218$

EJEMPLO

Dada la función de cuantía P(X=i)=K i para i=1,2,3,...,20, hallar :

a) $P(X = 4)$

b) $P(3 \leq X \leq 10)$

c) $P(X^2 \leq 100)$

Resolución :

Calculamos K para que sea función de cuantía :

$\forall x, \ \Sigma P(x) = 1$

$$\Sigma K i = 1 \Rightarrow K \Sigma i = 1 \Rightarrow K \frac{1 + 20}{2} . 20 = 1 \Rightarrow 210 K = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{210}$$

Luego $P(X = i) = \frac{i}{210}$

a) $P(X = 4) = \frac{4}{...}$

210

b) $P(3 \le X \le 10) = P(X \le 10) - P(X \le 2) = \frac{1}{210} \sum i - \frac{1}{210} \sum i =$

$= \frac{1}{210} \cdot \frac{1 + 10}{2} \cdot 10 - \frac{1}{210} \cdot \frac{1 + 2}{2} \cdot 2 = \frac{52}{210}$

c) $P(X^2 \le 100) = P(-10 \le X \le 10) = P(X \le 10) = \frac{1}{210} \cdot \sum i = \frac{55}{210}$

$\uparrow$

$X \ge 0$

1.7. ESPERANZA MATEMÁTICA

También se le llama valor esperado de la distribución. Es el valor central sobre el que se concentra la distribución de probabilidad. Es semejante a la media de una distribución de frecuencias.

Dada una v.a. X, definimos su esperanza como:

$$E(X) = \begin{cases} \sum x_i \cdot P(x_i) & \forall i \text{ si la v.a. es discreta} \\ \int x \cdot f(x)\,dx & \text{si la v.a. es continua} \end{cases}$$

Sirve para saber las posibles ganancias o pérdidas en los juegos de azar. Se dice que un juego es justo cuando la esperanza es cero.

EJEMPLO.

Sea una v.a. discreta de valores $X = \{1,2,3,4\}$, siendo su función de cuantía $P(x) = 0.1 \cdot x$. Obtener su esperanza.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i P_i(x) = 3$$

EJEMPLO

Sea una v.a. contínua X definida en el intervalo $[2,4]$, cuya función de densidad es $f(x) = \frac{x}{6}$ Hallar su media.

$$E(X) = \int_2^4 x \cdot f(x)dx = \int_2^4 \frac{x^2}{6}dx = 3.1$$

A partir de la esperanza de la v.a. X, se puede obtener su varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

EJEMPLO

Calcular la esperanza y la varianza de una v.a. continua con función de densidad :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Solución :

$$E(X) = x \cdot f(x)\,dx = \frac{x}{2\ x}\,dx = \frac{1}{3}$$

$$E(X^2) = x^2 \cdot f(x)\,dx = \frac{x^2}{2\ x}\,dx = \frac{1}{5}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}^{2} = \frac{4}{45}$$

2.- MODELOS DE PROBABILIDAD

INTRODUCCIÓN

Si un conjunto dado de variables aleatorias (distribuciones) tienen sus funciones de cuantía o de densidad con la misma estructura funcional matemática, diremos que pertenecen a la misma familia de distribuciones o al mismo modelo de probabilidad.

La estructura matemática depende de 1 ó más parámetros, y se les llama parámetros de la distribución.

Para estudiar los tipos de modelos de distribución utilizaremos el llamado proceso experimental, que es el conjunto de características que rigen la realización de un fenómeno aleatorio. Un proceso quedará definido por una serie de características o hipótesis. A partir de estas características, podremos estudiar y determinar la estructura matemática de una distribución.

2.1 DISTRIBUCIONES DISCRETAS DE PROBABILIDAD

2.1.1 DISTRIBUCIÓN DE BERNOUILLI

Experimento :

Realizar una prueba con únicamente dos resultados posibles, A (éxito) y A (fracaso).

Llamaremos $p = P(A)$ y $q = 1 - p = P(A)$

Variable :

X = nº de éxitos rg X = { 0, 1 }

Se denota $X \rightarrow Be(p)$

Se tiene :

$$f(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & x = 0, 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$E(X) = 0 \cdot p + 1 \cdot q = p$

$Var(X) = p \cdot (1 - p) = p \cdot q$

EJEMPLOS

Tirar una moneda (cara o cruz)

Aprobar o suspender un examen

Recibir o no una llamada

2.1.2 DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Experimento :

n repeticiones independientes de un experimento Bernouilli; es decir, experimentos con dos resultados posibles (éxito y fracaso) y probabilidades p = P(éxito) y q = 1 – p = P(fracaso) . Dichas probabilidades se mantienen constantes a lo largo de las n repeticiones.

Si hay extracción, debe realizarse con reemplazamiento.

Variable :

X = nº de éxitos en las n pruebas rg(X) = {0, 1, 2, 3,....}

Se denota $X \rightarrow Bi(n, p)$

Se tiene :

$p^x (1 - p)^{n-x}$ si $x = 0, 1, 2, \ldots, n$

f(x) =

0 en el resto

$F(x) = \sum \quad p^x \cdot q^{n-x}$

$E(X) = np$

$Var(X) = np(1-p) = npq$

EJEMPLOS

Si tiramos una moneda 5 veces, calcular la probabilidad de obtener 3 caras.

Solución:

Sea X = nº de caras, entonces $X \rightarrow Bi(5, 0.5)$, y tenemos que hallar $P(X = 3)$

$P(X = 3) = \quad \cdot (0.5)^3 \cdot (1 - 0.5)^{5-3} = 0.03125$

En una población, el 35 % son demócratas. Elegimos 15 per-sonas. ¿Cuál es la probabilidad de que entre ellas haya 10 demó-cratas? ¿Y de que el número de demócratas sea menor que 6? ¿Y de que sean una cantidad menor o igual que 3?

Veámoslo:

Si X = nº de demócratas, entonces $X \rightarrow Bi(15, 0.35)$, y nos piden calcular $P(X = 10)$, $P(X < 6)$ y $P(X \leq 6)$

$$P(X = 10) = \quad \cdot (0.35)^{10} \cdot (0.65)^{5}$$

$$P(X < 6) = \sum \quad \cdot (0.35)^{k} \cdot (0.65)^{15-k}$$

$$P(X \leq 3) = \sum \quad \cdot (0.35)^{k} \cdot (0.65)^{15-k}$$

TEOREMA DE ADICIÓN

Se dice que una distribución verifica el Teorema de Adición para alguno de sus parámetros, o que es reproductiva, cuando dadas dos o más variables aleatorias independientes que sigan todas ellas una distribución de ese tipo con parámetros iguales o distintos, la v.a. suma de todas ellas sigue también una distribución de ese tipo con parámetros la suma de los parámetros de cada una de las variables originales.

En particular, la distribución binomial verifica el Teorema de Adición para el parámetro n, debiendo ser el parámetro p de las variables originales el mismo.

$X_1 \rightarrow Bi(n_1,p)$, $X_2 \rightarrow Bi(n_2,p)$,...., $X_m \rightarrow Bi(n_m,p)$ independientes entre ellas $\Rightarrow$ $\sum X_i \rightarrow Bi(n_1 + n_2 + ... + n_m , p)$

2.1.3 DISTRIBUCIÓN HIPERGEOMÉTRICA

Experimento :

n repeticiones no independientes de un experimento con dos resultados posibles (éxito y fracaso) y probabilidades p = P(éxito) y q = P(fracaso) , que no se mantienen constantes a lo largo del experimento . Equivale a un modelo de urnas sin reemplazamiento (sería como una Bernouilli con probabilidades no constantes)

Variable :

X = nº de éxitos en las n pruebas   rg (X) = { 0, 1, 2, ...}

Se denota $X \rightarrow HG(N, n, p)$, siendo :

N = nº de elementos totales

n = nº de pruebas

p = P(éxito)

Se tiene :

f(x) =   x = 0, 1, 2, ..., n

F(x) = $\sum$

$E(X) = n \cdot p$

$Var(X) = npq \frac{N - n}{N - 1}$

EJEMPLO

En una reunión hay 6 mujeres y 9 hombres. Se eligen al azar 4 personas. Hallar las probabilidades de que entre éstas haya 1º 2 mujeres, luego que el nº de mujeres sea menor que 3, y por último que haya como mucho una mujer.

Resolución:

Sea X = nº de mujeres, entonces $X \rightarrow HG(15, 4, 0.4)$

$P(X = 2) =$

$P(X < 3) = \sum$

$P(X \leq 1) = \sum$

2.1.4 DISTRIBUCIÓN DE POISSON

Experimento :

Observar un cierto fenómeno físico de naturaleza aleatoria durante un cierto periodo de tiempo o una región del espacio, con las siguientes características :

a) el nº de ocurrencias en dos intervalos disjuntos es independiente
b) la probabilidad de que haya una ocurrencia en un intervalo pequeño es proporcional a la longitud del intervalo
c) la probabilidad de que haya dos o más ocurrencias en un intervalo pequeño debe ser de menor orden que la probabilidad de que haya sólo una ocurrencia

Variable :

X = nº de ocurrencias en un intervalo de tiempo en un intervalo de tiempo o espacio
rg(X) = {0, 1, 2, 3, ...}

Se denota $X \rightarrow Po(\lambda)$

El parámetro λ que distingue una distribución de otra suele ser una especie de "intensidad", y se corresponde con la media de la distribución.

Se tiene :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!} & x = 0, 1, 2, \ldots\ldots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \sum \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$$

$E(X) = \lambda$

$Var(X) = \lambda$

EJEMPLOS

Supongamos que la v.a. X = "nº de accidentes en una carretera en un mes " sigue una distribución Poisson de parámetro 6, $X \rightarrow Po(6)$. ¿Cuál es la probabilidad de que en un mes hayan menos de 4 accidentes?

Nos piden $P(X < 4) = \sum \dfrac{e^{-6} \cdot 6^{x}}{x!}$

Sea Y = “nº de llamadas en una centralita en 5 minutos” . Si se reciben 20 llamadas en 10 minutos, calcular cómo se distribuye la v.a. Y. Obtener $P(Y = 6)$ y $P(2 < Y \leq 7)$

TEOREMA DE ADICIÓN

La distribución de Poisson verifica el Teorema de Adición para el parámetro λ.

$X_1 \rightarrow Po(\lambda_1)$, $X_2 \rightarrow Po(\lambda_2)$, ..., $X_m \rightarrow Po(\lambda_m)$, independientes entre ellas $\Rightarrow \sum X_i \rightarrow Po(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m)$

APROXIMACIÓN DE LA POISSON POR LA BINOMIAL

Si X tiene una distribución binomial con n grande y p pequeño ($n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$), X se puede aproximar por una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np$. Para que sea buena la aproximación , $np < 5$. Utilizaremos la aproximación cuando el valor n no esté en tablas y el valor de p sea pequeño.

2. 2 DISTRIBUCIONES CONTINUAS DE PROBABILIDAD

2. 2. 1 DISTRIBUCIÓN UNIFORME

Experimento :

Cualquier experimento cuyo resultado sea un nº en el inter-valo [a, b] de manera que cualquiera de los infinitos puntos del intervalo tenga la misma probabilidad de ser elegido. Es decir, la probabilidad está uniformemente repartida por todo el intervalo.

Variable :

X = valor obtenido   rg(X) = [a, b]

Se denota $X \rightarrow U(a, b)$

Se tiene :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b - a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{1}{b - a} \, dx$$

$$E(X) = \underline{b + a}$$

$$Var(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

EJEMPLO

Supongamos que la concentración de un cierto contami- nante se encuentra distribuida U(4, 20). Si se considera como tóxica una concentración de 16 ó más, ¿cuál es la probabilidad de que una muestra de concentración de ese contaminante sea tóxica?

Según los datos :

$$\frac{1}{20 - 4} \qquad 4 \leq x \leq 20$$

f(x) =

0 en el resto

Veremos la resolución de dos maneras :

1ª forma :

$$F(x) = \frac{1}{16}\, dx = \frac{x-4}{16}$$

$$P(X \geq 16) = 1 - P(X < 16) = 1 - F(16) = 1 - \frac{16-4}{16} = 0.25$$

2ª forma :

$$P(X \geq 16) = \frac{1}{16}\, dx = \frac{20-16}{16} = 0.25$$

2. 2. 2 DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL

Experimento :

Proceso experimental con las mismas características que estudiábamos al definir el modelo de Poisson.

Variable :

X = “tiempo de espera hasta que se produce el primer fenómeno”,o “tiempo de espera entre dos fenómenos consecutivos”

$rg(X) = [0, +\infty[$ Se denota $X \rightarrow Ex(\beta)$

Se tiene :

$f(x) = \beta \cdot e^{-\beta x} \qquad x \geq 0$

$F(x) = P(X \leq x) = \quad \beta \cdot e^{-\beta x}\, dx = 1 - e^{-\beta x}$

$E(X) = \dfrac{1}{\beta}$

$Var(X) = \dfrac{1}{\beta^2}$

FUNCIÓN DE SUPERVIVENCIA

Si el significado de la v.a. es “tiempo que transcurre hasta que se produce el primer fallo”, entonces $F(x) = 1 – e^{-\beta x}$ calculará la probabilidad de que el fallo ocurra antes o en el instante x .

Si consideramos la función $S(x) = 1 – F(x) = P(X > x) = e^{-\beta x}$ (función de supervivencia) será la probabilidad de que el fallo transcurra después del tiempo x, por tanto, será la probabilidad de que el elemento considerado “sobreviva” al tiempo x .

PROPIEDAD

La distribución exponencial no tiene memoria

$P(X>s+t \ / \ X>s) = \dfrac{P(X > s+t)}{P(X > s)} = P(X > t)$

EJEMPLO

Sea X una v.a. Ex(5). Calcular P(X = 5.5)

$P(X = 5.5) = 5 \cdot e^{-5 \cdot 5.5}$

2. 2. 3 DISTRIBUCIÓN NORMAL . TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE .

La distribución normal es la más importante de todas las distribuciones de probabilidad. Hay tres razones principales :

a) por sus propiedades matemáticas. En la parte de Inferencia, podremos conocer y trabajar con la distribución de los estimadores si vienen de una población normal .

b) por su aplicación. Un gran número de fenómenos reales se pueden modelizar con esta distribución (como la distribución de alturas y pesos de una población homogénea de personas)

c) por el Teorema Central del Límite. La distribución normal sirve para aproximar la suma y la media de cualquier otro tipo de distribuciones.

DEFINICIÓN

Una v.a. X tiene una distribución normal con parámetros μ y σ^2, ($-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma^2 > 0$), si X tiene una distribución continua cuya función de densidad es :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \; e^{\frac{-1}{} \cdot \frac{(x-\mu)}{}} \qquad \forall\, x \in R$$

Se denota $X \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$, y se tiene :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \; e^{\frac{-1}{} \cdot \frac{(x-\mu)}{}} \qquad \forall\, x \in R$$

$E(X) = \mu$

$Var(X) = \sigma^2$

La representación gráfica de la función de densidad es simétrica respecto a la media μ y la media es también moda y mediana de la distribución. Tiene forma de campana; la densidad decrece a ambos lados de μ más o menos rápido según el valor de σ^2.

TEOREMA (de las transformaciones lineales)

Sea $X \to N(\mu, \sigma^2)$, y sea $Y = a X + b$, siendo a y b constantes. Entonces $Y \to N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$

COROLARIO

Sea $X \to N(\mu, \sigma^2)$,entonces la nueva v.a. $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \to N(0,1)$

DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA

La distribución normal con media 0 y varianza 1 se denomina distribución normal tipificada, $Z \to N(0,1)$. La función de distribución de esta v.a. se denota por Φ, con $\Phi(z) = P(Z \le z)$, y se utiliza para el cálculo de probabilidades con tablas, pues las probabilidades acumuladas para la v.a. Z están tabuladas.

Por ser la distribución simétrica se cumple :

$P(Z \le z) = P(Z > -z) = 1 - P(Z \le -z)$

Así, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$

EJEMPLO

Sea $Z \to N(0,1)$. Calcular : $P(Z \leq 2)$, $P(Z > 1.5)$, $P(1\leq Z \leq 2.1)$, $P(Z \leq -0.65)$

$P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0.9773$

$P(Z > 1.5) = 1 - P(Z \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$

$P(1\leq Z \leq 2.1) = P(Z \leq 2.1) - P(Z \leq 1) = \Phi(2.1) - \Phi(1) = 0.9821 - 0.8413 = 0.1408$

$P(Z \leq -0.65) = \Phi(-0.65) = 1 - \Phi(0.65) = 1 - 0.7422 = 0.2578$

EJEMPLO

Sea $X \to N(10,25)$. Calcular : $P(X > 15)$, $P(X \leq 12)$, y $P(10 < X \leq 16)$

Primero hay que tipificar la v. a. X. Es decir, convertirla en una v.a. de media 0 y varianza 1.

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - P\left(\frac{X - 10}{25} \leq \frac{15 - 10}{25}\right)$$

Ahora $Z = \frac{X - 10}{25} \to N(0,1)$, y por tanto, la probabilidad anterior se puede escribir $1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = \quad = 0.1587$

Análogamente se obtiene :

$P(X \leq 12) = 0.6554$

$P(10 < X \leq 16) = 0.3849$

TEOREMA DE ADICIÓN

Sean $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ n v.a.'s independientes, tales que cada una de ellas se distribuye $X_i \to N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Entonces :

$X_1 + X_2 + ... + X_n \rightarrow N(\mu_1 + \mu_2 + ... + \mu_n , \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2)$

COROLARIO

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.'s independientes, tales que cada una de ellas se distribuye $X_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Consideramos $a_1, a_2, ..., a_n, b$ constantes con al menos algún $a_i \neq 0$.

Entonces la v.a. $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n + b$ se distribuye $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, donde los parámetros son :

$\mu_Y = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + ... + a_n\mu_n + b$,

$\sigma_Y^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + ... + a_n^2 \sigma_n^2)$

TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.'s independientes y con la misma distribución de media μ y varianza σ^2 , entonces para x fijo se tiene :

Interpretación :

Si se selecciona una muestra aleatoria grande de cualquier distribución con media μ y varianza σ^2 , independientemente de si la distribución es discreta o continua, entonces la distribución de la v.a. será aproximadamente una normal tipificada.

Esto equivale a que :

a) X_n tiene aproximadamente una distribución $N(\mu, \underline{\sigma^2})$

b) $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ se distribuye aproximadamente como $N(n\,\mu, n\,\sigma^2)$

Por consiguiente, podemos **aproximar las distribuciones discretas Binomial y Poisson a una normal** de la siguiente manera :

Si $X \rightarrow Bi(n, p)$ con $n \rightarrow \infty$, p alrededor de 0.5, entonces $\underline{X - np} \rightarrow N(0,1)$

Si $Y \rightarrow Po(\lambda)$ con $\lambda \rightarrow \infty$ entonces $\dfrac{Y - \lambda}{\lambda} \rightarrow N(0,1)$

En ambos casos se puede aplicar para valores de n y λ que no estén en las tablas correspondientes.

La teoría de los procesos estocásticos se centra en el estudio y modelización de sistemas que evolucionan a lo largo del tiempo, o del espacio, de acuerdo a unas leyes no determinísticas, esto es, de carácter aleatorio.
La forma habitual de describir la evolución del sistema es mediante sucesiones o colecciones de variables aleatorias. De esta manera, se puede estudiar cómo evoluciona una variable aleatoria a lo largo del tiempo. Por ejemplo, el número de personas que espera ante una ventanilla de un banco en un instante t de tiempo; el precio de las acciones de una empresa a lo largo de un año.
La primera idea básica es identificar un proceso estocástico con una sucesión de variable aleatoria $\{X_n, n \in N\}$ donde el subíndice indica el instante de tiempo (o espacio) correspondiente.
Esta idea inicial se puede generalizar fácilmente, permitiendo que los instantes de tiempo en los que se definen las variables aleatorias sean continuos. Así, se podrá hablar de una colección o familia de variables aleatorias $\{X_t, t \in R\}$, que da una idea más exacta de lo que es un proceso estocástico.

Se tenía que una v.a. X(s) es una función que va desde un espacio muestral S a la recta real, de manera que a cada punto s $\in$ S del espacio muestral se le puede asociar un número de la recta real.
De este modo, la probabilidad de cada suceso de S se puede trasladar a la probabilidad de que un valor de X (v.a.) caiga en un cierto intervalo o conjunto de números reales. Si a todo esto se le añade una dimensión temporal, se obtiene un proceso estocástico.
En general trabajamos con procesos estocásticos en cualquier caso en que intentamos ajustar un modelo teórico que nos permita hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de un proceso. Un ejemplo particularmente importante lo proporcionan las denominadas "Series de Tiempo" o "Series Temporales", que registran observaciones de determinado proceso en función del tiempo.

<u>Procesos Aleatorios o Estocásticos</u>

Definición 1: se denomina ***proceso aleatorio o estocástico*** a toda variable que evoluciona a lo largo del tiempo de forma total o parcialmente aleatoria. Un ejemplo, es la temperatura en Madrid, aumenta durante el día y baja durante la noche; aumenta en el verano y desciende mucho en invierno ("nueve meses de invierno y tres de infierno", que se dice del clima castellano); su variación es parcialmente determinística y parcialmente aleatoria.

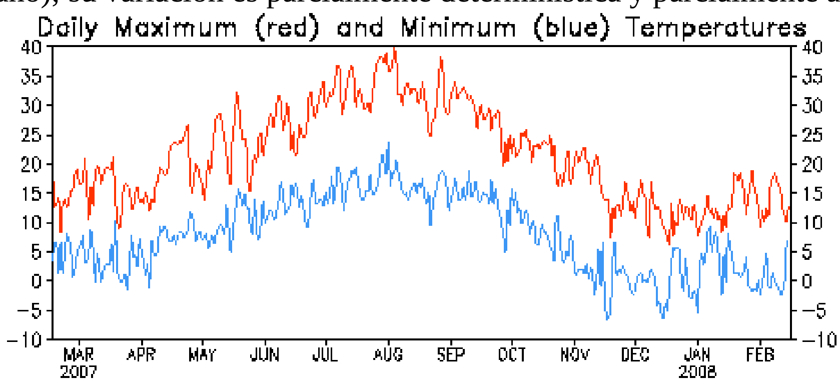


Figura 2.1: Temperaturas máximas y mínimas en Madrid

Definición 2: es toda experiencia que genere una secuencia de valores modelizables como variables aleatorias. Cada experiencia individual tiene un posicionamiento, o sea un orden en la experiencia global.

Definición 3: el conjunto de funciones temporales que resultan de un experimento particular, es decir, cada vez que se realiza el experimento, se produce como salida una determinada señal. La aleatoriedad radica en saber cual de todas las funciones saldrá. Además, en cada instante de tiempo t_k, se puede definir una variable aleatoria que podría llamarse xt_k. Queda claro que la diferencia fundamental entre una variable aleatoria y un proceso aleatorio es la dependencia con la variable tiempo.

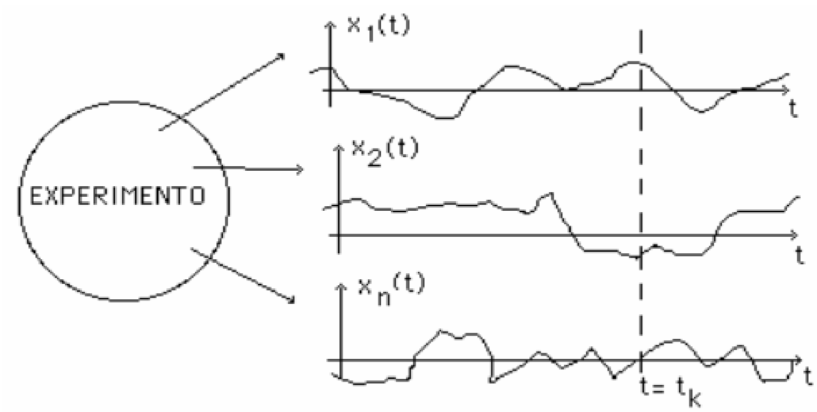


Figura 2.2: Procesos Estocásticos

Ejemplo: suponga un proceso estocástico definido como x(t)=at donde a está uniformemente distribuida entre 0 y 1. Cada vez que se realiza el experimento, la salida es una recta de pendiente diferente. Para un tiempo dado, digamos $t=t_0$, se tendrá una v.a $xt_0= at_0$, que puede tomar valores entre 0 y t_0. Una forma de caracterizar el proceso x(t) es a través de la definición de una función conjunta de infinitas variables aleatoria correspondientes a tiempos distintos t_k.

Definición 4: un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $\{Xt : t \in T\}$ parametrizada por un conjunto T llamado espacio parametral y con valores en un conjunto S llamado espacio de estados (conjunto de posibles valores que pueden tomar las variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in R}$).

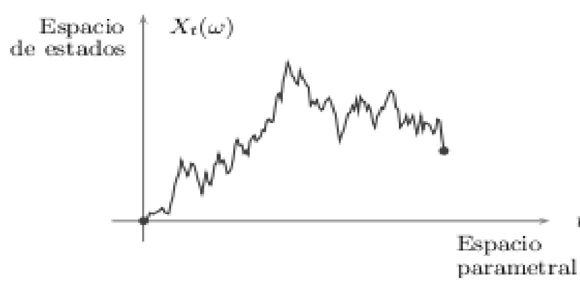


Figura 2.3: Proceso Estocástico

Nota: en general, se piensa en el subíndice t como el indicativo del tiempo y en X_t como el estado o posición del proceso estocástico en el instante t.

Tipos de Procesos Aleatorios

Los procesos aleatorios son clasificados de acuerdo a las características de t y de la variable aleatoria X(t) en el instante t. Si t tiene un rango de valores continuo dentro de uno o varios intervalos en la recta real R1, entonces X(t) es llamado un proceso aleatorio de tiempo continuo. Si t puede tomar una cantidad finita, o infinita numerable, de valores, entonces

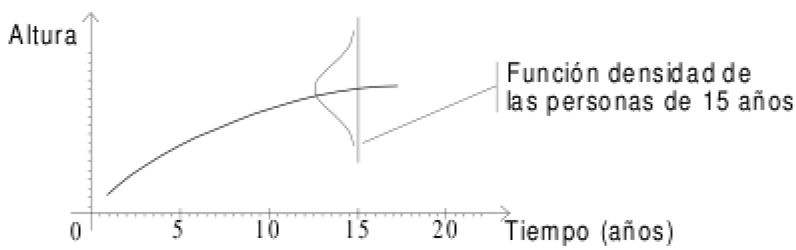
X(t) es llamado un proceso aleatorio de tiempo discreto, o una secuencia aleatoria. Generalmente se denota a las secuencias aleatorias por X(n), donde n representa a t_n.

X(t) ó X(n) es un proceso (o secuencia) con estados o valores discretos si los valores que puede tomar son finitos (o infinito numerable). Si no, es un proceso (o secuencia) aleatorio con continuidad de valores o estados (no hay saltos). Notar que continuo o discreto se refiere a las características de la amplitud de X(t), y proceso y secuencia a las características de t.

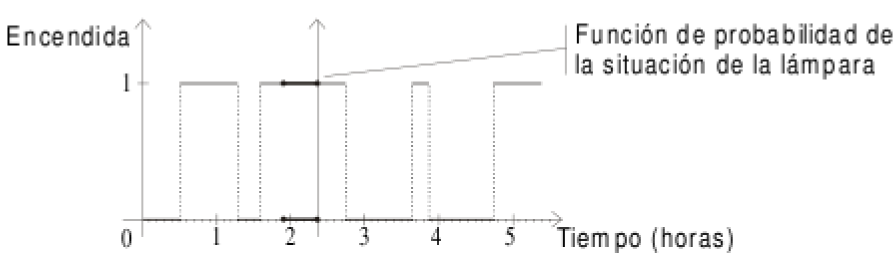
Otro atributo que es usado para clasificar a los procesos aleatorios es la dependencia de la estructura probabilística de X(t) con t. Si cierta distribución de probabilidad o promedio no depende de t, entonces el proceso se denomina estacionario. Si no, es llamado no estacionario.

Así, los procesos estocásticos se clasifican en:

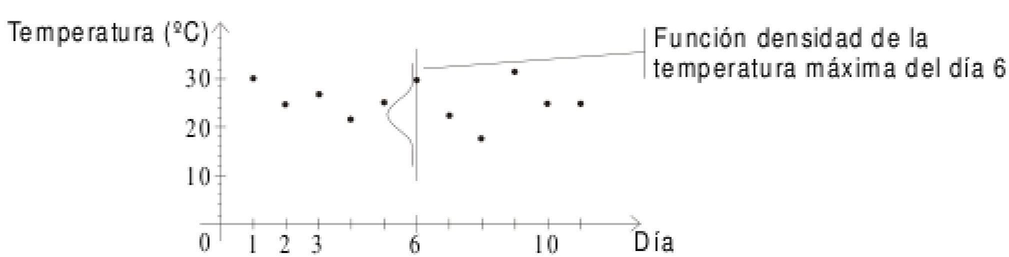
• Continuo de variable continua: el crecimiento de las personas.



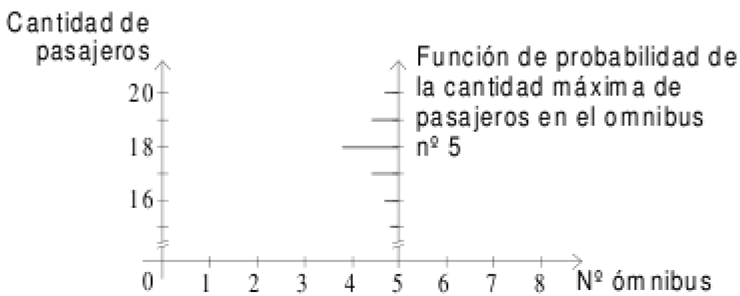
• Continuo de variable discreta: situación de encendido o apagado de una lámpara.



• Discreto de variable continua: temperatura máxima de cada día.



• Discreto de variable discreta: cantidad de pasajeros en cada ómnibus (autobús) que llega.



Los procesos estocásticos también se pueden clasificar dependiendo de si T (conjunto paramétrico) es un conjunto numerable o continuo, y de si E (conjunto de estados) es otro conjunto numerable o continuo. Así:

$E \setminus T$	**Discreto**	**Continuo**
Discreto	Cadena	Proc. Puntual
Continuo	Suc. de $v.a.$	Proc. Continuo

Ejemplos:
(i) Cadena: supongamos un sistema hidráulico con una válvula de seguridad que se revisa diariamente. Esta válvula presenta tres posibles estados: correcto, incorrecto y deteriorado. De este modo se puede definir el proceso como $X_n \equiv$ Estado en el que se encuentra la válvula en el día n.
(ii) Proceso Puntual: un autobús escolar tiene capacidad para k personas. Si en una parada hay k o menos personas esperando, entonces todas subirán al autobús. Si no es así, subirán las k primeras quedando el resto de personas en espera. Se define, entonces, Xt ≡ número de personas esperando en la parada en un instante de tiempo t. Se pueden plantear asuntos como minimizar el tiempo medio de espera, o reducir el número de personas esperando.
(iii) Sucesión de v.a: una empresa petrolífera debe decidir cuánto petróleo extrae al mes para maximizar los beneficios. Se define, entonces, $X_n \equiv$ Cantidad de petróleo a extraer en el mes n. Esto es un ejemplo particular de la llamada Teoría de Inventarios, donde se estudia la distribución de la demanda, por ejemplo.
(iv) Proceso Continuo: en la ventanilla de un banco se contabiliza el tiempo de espera de un cliente que llega en un instante t. Se puede definir $X_t \equiv$ Tiempo de espera de un cliente que llega en el instante t. Esto está relacionado con la Teoría de Colas. Interesa, por ejemplo, minimizar el tiempo de espera o estudiar la distribución de X_t .

Tipos de Procesos Estocásticos

Los diferentes tipos de procesos estocásticos se obtienen al considerar las distintas posibilidades para: el espacio parametral, el espacio de estados, las características de las trayectorias, y principalmente las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que conforman el proceso. Estos son procesos que cumplen una cierta propiedad particular, no necesariamente excluyentes unas de otras. Los siguientes son algunos ejemplos generales de procesos estocásticos.

1.- Proceso de ensayos independientes: el proceso a tiempo discreto $\{X_n : n = 0, 1, . .\}$ puede estar constituido por variables aleatorias independientes. Este modelo corresponde al experimento de realizar una sucesión de ensayos independientes de un mismo experimento aleatorio, por ejemplo, lanzar un dado o una moneda repetidas veces. El resultado u observación del proceso en un momento cualquiera es, por lo tanto, independiente de cualquier otra observación pasada o futura del proceso.

2.- Procesos de Markov: estos son modelos en donde, suponiendo conocido el estado presente del sistema, los estados anteriores no tienen influencia en los estados futuros del sistema. Esta condición se llama *propiedad de Markov* y puede expresarse de la siguiente forma: para cualesquiera estados $x_0 , x_1 , . . . , x_{n-1}$ (pasado), x_n (presente), x_{n+1} (futuro), se cumple la igualdad:

$$P (X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_0 = x_0 , . . . , X_n = x_n) = P (X_{n+1} = x_{n+1} \mid X_n = x_n)$$

De esta forma la probabilidad del evento futuro $(X_n = x_n)$ sólo depende el evento $(X_{n-1} = x_{n-1})$, mientras que la información dada por el evento $(X_0 = x_0 , . . . , X_{n-2} = x_{n-2})$ es irrelevante. Los procesos de Markov han sido estudiados extensamente y existe un gran número de sistemas que surgen en muy diversas disciplinas del conocimiento para los cuales el modelo de proceso estocástico y la propiedad de Markov son razonables. En particular, los sistemas dinámicos deterministas dados por una ecuación diferencial pueden considerarse procesos de Markov pues su evolución futura queda determinada por la posición inicial del sistema y una ley de movimiento especificada.

3.- Procesos con incrementos independientes: se dice que un proceso $\{X_t : t\geq 0\}$ tiene incrementos independientes si para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, las variables $X_{t1} , X_{t2} - X_{t1} , . . . , X_{tn} - X_{tn-1}$ son independientes.

4.- Procesos estacionarios: se dice que un proceso $\{X_t : t\geq 0\}$ es estacionario (en el sentido estricto) si para cualesquiera tiempos $t_1 , . . . , t_n$, la distribución del vector $(X_{t1} , . . , X_{tn})$ es la misma que la del vector $(X_{t1 +h} , . . . , X_{tn +h})$ para cualquier valor de $h > 0$. En particular, la distribución de X_t es la misma que la de X_{t+h} para cualquier $h > 0$, y entonces esta distribución es la misma para cualquier valor de t.

5.- Procesos con incrementos estacionarios: se dice que un proceso $\{X_t : t\geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios si para cualesquiera tiempos $s < t$, y para cualquier $h > 0$, las variables $X_{t+h} - X_{s+h}$ y $X_t - X_s$ tienen la misma distribución de probabilidad. Es decir, el incremento que sufre el proceso entre los tiempos s y t sólo depende de estos tiempos a través de la diferencia $t - s$, y no de los valores específicos de s y t.

Nota: investigar Martingala, proceso de Lévy y procesos Gausianos.

Proceso de Bernoulli (proceso bernoulliano de ensayos independientes)

La distribución de bernoulli se refiere a un experimento aleatorio discreto que solo puede tomar dos valores, 0 ó 1 y más comúnmente éxito o fracaso para el cual la probabilidad p del resultado éxito ó 1 es conocida.

P(1) = P(éxito) = p

P(0) = P(fracaso) = 1 – p = q

Distribución de probabilidad es:

$$p(x) = p^x(1-p)^{1-x} \text{ para } x = 0, 1$$

Existen cantidad de fenómenos aleatorios que obedecen a este modelo:

- El lanzamiento de una moneda; cara o sello.
- El nacimiento de un niño: varón o hembra.
- Cursar la materia procesos estocásticos: se aprueba o se reprueba.

La repetición de estos experimentos Bernoullianos, como por ejemplo el lanzamiento de una moneda más de una vez, o la observación del sexo de varios hijos de una misma pareja, etc, es llamado **proceso Bernoulliano de ensayos independientes.**

Caminata Aleatoria (recorrido aleatorio de estado discreto y tiempo discreto)

Una caminata aleatoria simple sobre el conjunto de números enteros Z es un proceso estocástico a tiempo discreto {Xt : t = 0, 1, . . .} que evoluciona como se muestra en la figura. Es decir, iniciando en el estado 0, al siguiente tiempo el proceso puede pasar al estado +1 con probabilidad p, o al estado −1 con probabilidad q, en donde p+q = 1. Se usa la misma regla para los siguientes tiempos, es decir, pasa al estado de la derecha con probabilidad p, o al estado de la izquierda con probabilidad q. El valor de X_n es el estado del proceso al tiempo n. Este proceso cambia de un estado a otro en dos tiempos consecutivos de acuerdo a las *probabilidades de transición* que se muestran en la figura, válidas para cualquier t ≥ 0, y para cualesquiera enteros i y j.

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i + 1 \\ q & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

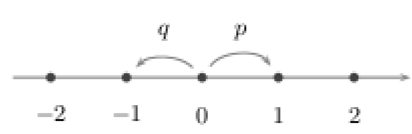


Figura 2.4. Caminata Aleatoria

Dado que estas probabilidades no dependen de n, se dice que son *homogéneas en el tiempo*, es decir, son las mismas para cualquier valor de n. A partir de estas consideraciones, es intuitivamente claro que este proceso cumple la propiedad de Markov, es decir, el estado futuro del proceso depende únicamente del estado presente y no de los estados previamente visitados. Una posible trayectoria de este proceso se muestra en la figura 5.

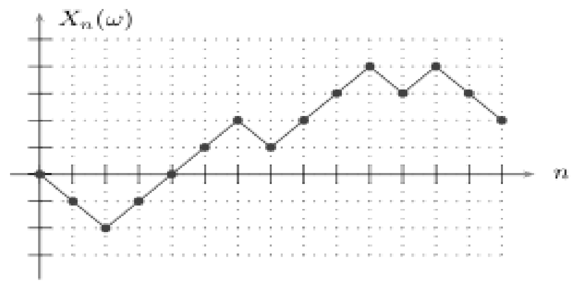


Figura 2.5. Trayectoria del proceso. Propiedad de Markov

Una caminata aleatoria puede también definirse de la forma siguiente: Sea ξ_1, ξ_2, . una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $P(\xi = +1) = p$ y $P(\xi = -1) = q$, en donde, como antes, $p + q = 1$. Entonces para $t \geq 1$ se define:

$$X_n = X_0 + \xi_1 + \cdot \cdot \cdot + \xi_n$$

Este es uno de los ejemplos más simples de un proceso estocástico. En este caso X_n es una variable aleatoria que comienza con un valor conocido X_0 y a lo largo de los períodos $n = 1,2,3,\ldots$va variando a razón de saltos unitarios hacia arriba o hacia abajo con una probabilidad asociada del 50% en cada caso.

Proposición
Para cualquier entero $n \geq 1$,
1. $E(X_n) = n(p - q)$.
2. $Var\ (X_n) = 4npq$.

Demostración
1. $E\ (X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i) = nE(\xi) = n(p - q)$.
2. Como $E\ (\xi 2) = p+q = 1$ y $E(\xi) = p-q$, se tiene que $Var(\xi) = 1-(p-q)^2 = 4pq$.
Por lo tanto $Var\ (X_n) = \sum_{i=1}^{n} Var\ (\xi_i) = nVar(\xi) = 4npq$.

Si $p > q$, es decir, si la caminata toma pasos a la derecha con mayor probabilidad, entonces el estado promedio después de n pasos es un número positivo, es decir, su comportamiento promedio es tender hacia la derecha, lo cual es intuitivamente claro. Análogamente, si $p < q$, entonces el estado final promedio de la caminata después de n pasos es un número negativo, es decir, en promedio la caminata tiende a moverse hacia la izquierda. En ambos casos la varianza crece conforme el número de pasos n crece, eso indica que mientras mayor es el número de pasos que se dan, mayor es la incertidumbre acerca de la posición final del proceso. Cuando $p \neq q$ se dice que la caminata es *asimétrica*. Cuando $p = q = 1/2$ se dice que la caminata es *simétrica*, y en promedio el proceso se queda en su estado inicial pues $E(X_n) = 0$, sin embargo para tal valor de p la varianza es $Var(Xn) = n$.

Probabilidades de transición
Como hemos supuesto que la caminata inicia en cero, es intuitivamente claro que después de dar un número par de pasos la cadena sólo puede terminar en una posición par, y si se efectúan un número impar de pasos la posición final sólo puede ser un número impar. Además, es claro que después de efectuar n pasos, la caminata sólo puede llegar a una distancia máxima de n unidades, a la izquierda o a la derecha. Teniendo esto en mente, en el siguiente resultado se presenta la distribución de X_n.

Proposición
Para cualesquiera números enteros x y n tales que $-n \leq x \leq n$, y siendo x y n ambos pares o ambos impares,

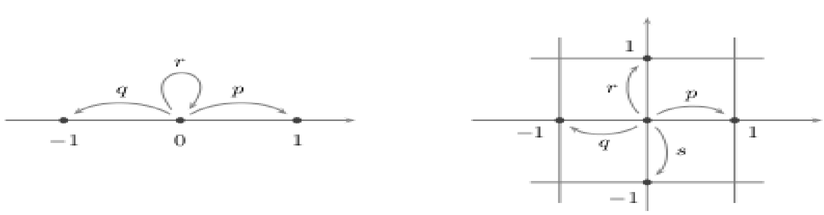
$$P(X_n = x \mid X_0 = 0) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+x)} p^{\frac{1}{2}(n+x)} q^{\frac{1}{2}(n-x)}.$$

Probabilidad de regreso a la posición de origen
Se plantea ahora el problema de encontrar la probabilidad de que una caminata aleatoria que inicia en el origen, regrese eventualmente al punto de partida. Para el caso asimétrico, $p \neq 1/2$, la probabilidad de tal evento es menor que uno, es decir, no es seguro que ello ocurra, pero en el caso simétrico, $p = 1/2$, se cumple que con probabilidad uno la caminata regresa eventualmente al origen.

Proposición
Para una caminata aleatoria sobre Z, la probabilidad de un eventual regreso al punto de partida es

$$1 - |p - q| = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q, \\ < 1 & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Es decir, sólo en el caso simétrico, $p = q$, se tiene la certeza de un eventual retorno, sin embargo el tiempo promedio de regreso en tal caso es infinito.
Puede considerarse también el caso de una caminata en donde sea posible permanecer en el mismo estado después de una unidad de tiempo. Esta situación se ilustra en la figura (a), en donde p, q y r son probabilidades tales que $p + q + r = 1$. También pueden considerarse caminatas aleatorias en Z^2 como la que se muestra en la figura (b), en donde $p + q + r + s = 1$, o más generalmente en Z^n o cualquier otro conjunto reticulado.



(a) (b)

Figura 2.6. Caminatas Aleatorias: mismo estado y en Z^2

El problema del Jugador

Este problema es un ejemplo particular de una caminata aleatoria puesta en el contexto de un juego de apuestas.

Planteamiento del Problema

Suponga que un jugador A apuesta sucesivamente una unidad monetaria a un jugador B. Inicialmente el jugador A tiene k unidades, y B tiene N − k unidades, es decir, el capital conjunto entre los dos jugadores es de N unidades monetarias. En cada apuesta el jugador A tiene probabilidad de ganar p, y probabilidad de perder q = 1−p, se asume además que no hay empates.

Sea X_n la fortuna del jugador A al tiempo n. Entonces $\{X_n: n = 0, 1, . \}$ es una caminata aleatoria que inicia en el estado k y eventualmente puede terminar en el estado 0 cuando el jugador A ha perdido todo su capital, o bien puede terminar en el estado N que corresponde a la situación en donde el jugador A ha ganado todo el capital. Este proceso es entonces una caminata aleatoria sobre el conjunto {0,1, . . . ,N}, en donde los estados 0 y N son absorbentes, pues una vez que la cadena llega a alguno de ellos, jamás lo abandona. Una posible trayectoria cuando la caminata se absorbe en el estado 0 se muestra en la figura.

Una de las preguntas que resolveremos para esta caminata es la siguiente: ¿Cuál es la probabilidad de que eventualmente el jugador A se arruine? Es decir, ¿Cuál es la probabilidad de que la caminata se absorba en el estado 0 y no en el estado N, u oscile entre estos dos estados? Este problema se conoce como el *problema de la ruina del jugador*. Usando probabilidad condicional es posible transformar este problema en resolver una ecuación en diferencias.

Solución al problema

Sea τ es el primer momento en el que la caminata visita alguno de los dos estados absorbentes, es decir, $\tau = \text{mín} \ \{ n \geq 0 : Xn = 0 \text{ ó } Xn = N \}$. Puede demostrarse que esta variable aleatoria is finita casi seguramente. La pregunta planteada se traduce en encontrar la probabilidad

$$u_k = P(X_t = 0 \mid X_0 = k)$$

Por el teorema de probabilidad total se obtiene la ecuación en diferencias:

$$u_k = pu_{k+1} + qu_{k-1} \qquad (1)$$

válida para k = 1, 2, . . . ,N − 1. La interpretación intuitiva de esta identidad es sencilla: A partir del estado k se busca la probabilidad de ruina analizando lo que sucede en la siguiente apuesta. Se tienen dos casos. El jugador gana con probabilidad p y ahora se busca la probabilidad de ruina a partir del estado k +1, o bien el jugador pierde con probabilidad q y se busca la probabilidad de ruina ahora a partir del estado k−1. Las condiciones de frontera son $u_0 = 1$ y $u_N = 0$. Esta ecuación es una ecuación en diferencias, lineal, de segundo orden y homogénea. Puede encontrarse su solución de la siguiente forma: multiplicando el lado izquierdo de (1) por (p + q) y agrupando términos se llega a la expresión equivalente

$$u_{k+1} - u_k = (qp)(u_k - u_{k-1}) \quad (2)$$

Resolviendo iterativamente, las primeras k − 1 ecuaciones se escriben de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= (q/p)\,(u_1 - 1) \\ u_3 - u_2 &= (q/p)^2\,(u_1 - 1) \\ &\vdots \\ u_k - u_{k-1} &= (q/p)^{k-1}\,(u_1 - 1). \end{aligned}$$

Hemos usado aquí la condición de frontera $u_0 = 1$. Conviene ahora definir $S_k = 1 + (q/p) + \cdot \cdot \cdot + (q/p)k$ pues al sumar las k− 1 ecuaciones anteriores se obtiene $u_k - u_1 = (S_{k-1} - 1)(u_1 - 1)$. O bien

$$u_k = 1 + S_{k-1}\,(u_1 - 1). \quad (3)$$

De manera análoga, ahora sumando todas las ecuaciones de (2) se obtiene $u_N = 1 + S_N -1 (u_1 - 1)$. Usando la segunda condición de frontera $u_N = 0$ se llega a $u_1 - 1 = -1/S_N -1$. Substituyendo en (3) y simplificando se llega a la solución

$$u_k = 1 - \frac{S_{k-1}}{S_{N-1}}$$

Es necesario ahora distinguir los siguientes dos casos:

$$S_k = 1 + (q/p) + \cdots + (q/p)^k = \begin{cases} k+1 & \text{si } p = q, \\ \dfrac{1-(q/p)^{k+1}}{1-(q/p)} & \text{si } p \neq q. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$u_k = \begin{cases} (N-k)/N & \text{si } \; p = 1/2, \\ \dfrac{(q/p)^k - (q/p)^N}{1-(q/p)^N} & \text{si } \; p \neq 1/2. \end{cases} \quad (4)$$

En la figura 2.7 se muestra la gráfica de la probabilidad u_k como función del parámetro k para varios valores de p y con N = 50. En el caso simétrico la solución es la línea recta que une la probabilidad uno con la probabilidad cero. Naturalmente la probabilidad de ruina decrece cuando el capital inicial k aumenta.

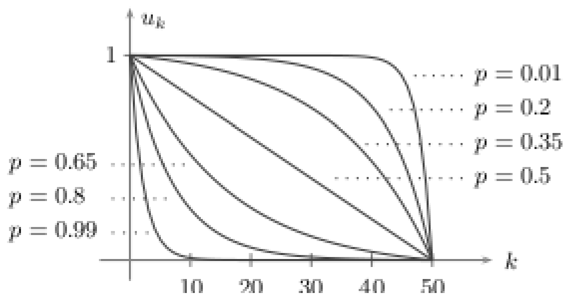


Figura 2.7. Gráfica de probabilidad u_k

Análisis de la solución

Es importante analizar la fórmula (4). Para el caso simétrico p = 1/2, es decir, cuando el juego es justo, la probabilidad de ruina es muy cercana a 1 cuando k es muy pequeño comparado con N. Esto sugiere que no conviene jugar esta serie de apuestas contra adversarios demasiado ricos, a ́n cuando el juego sea justo. Es también un tanto inesperado observar que la probabilidad u_k es muy sensible a los valores de p cercanos a 1/2. Esto puede apreciarse en la figura 2.8. Cuando p es distante de 1/2 la probabilidad u_k es casi constante, pero para valores de p cercanos a ½ la probabilidad cambia rápidamente de un extremo a otro. Estas gráficas fueron elaborados tomando N = 50.

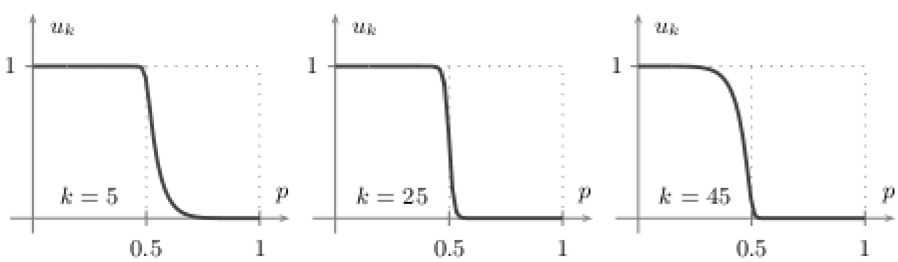


Figura 2.8. Variando N