

Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño



Circuitos Eléctricos

Apuntes del Curso

Carrera: Ingeniería Electrónica

4o. Semestre

Rosa Martha López Gutiérrez
Miguel Enrique Martínez Rosas
Manuel Moisés Miranda Velasco
Carlos Gómez Agís

Ensenada, Baja California, Enero de 2016.

Índice general

1. Repaso de Números complejos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Descripción de Números complejos	1
1.2.1. Operaciones con números complejos	2
1.3. Fasores y Ecuaciones Diferenciales ordinarias	3
1.4. Aplicación del método de fasores para resolver ecuaciones diferenciales	5
1.5. Solución mediante fasores de sistemas de ecuaciones integro-diferenciales simultaneas.	10
2. Respuesta en Frecuencia y Filtros Pasivos	14
2.1. Diagramas de Bode.	14
2.1.1. Cero Simple.	14
2.1.2. Polo Simple.	18
2.1.3. Comportamiento de un polo o un cero en el origen.	20
2.1.4. Constante multiplicativa K	24
2.1.5. Filtro pasa-bajas	24
2.1.6. Filtro pasa-altas	27
2.2. Equivalencia de redes en paralelo y en serie para una frecuencia específica.	35
2.3. Escalamiento.	36
3. Resonancia	39
3.1. Introducción.	39
3.2. Resonancia.	39
3.3. Resonancia en paralelo.	39
3.4. Factor de calidad Q	42
3.4.1. Relación entre los parámetros de respuesta natural y el factor Q	43
3.4.2. Interpretación de Q_0 en términos de la localización de los polos y ceros de la admitancia $Y(s)$ del circuito RLC en paralelo.	44
3.5. Frecuencias de mitad de potencia y ancho de banda de un circuito resonante.	45
3.5.1. Aproximaciones de $Y(s)$ para Q alta.	46
3.6. Resonancia en Serie	48
4. Redes Generales de dos Puertos o Bipuertos	50
4.1. Red de un puerto	50
4.2. Teorema de la reciprocidad:	54
4.2.1. Teorema de reciprocidad en su forma dual:	54
4.3. Parámetros de admitancia Y	55
4.4. Parámetros de impedancia	56

4.5. Parámetros híbridos	57
4.6. Parámetros de transmisión	58
4.7. Redes equivalentes	58
4.8. Conexiones en paralelo de redes de 2 puertos	61
4.9. Conexión en serie de redes de 2 puertos	62
4.10. Red de 2 puertos en cascada	62
5. Circuitos Polifásicos.	65
5.1. Potencia instantanea.	65
5.2. Potencia Compleja.	67
5.3. Sistemas Polifásicos.	69
5.4. Sistema monofásico de tres conductores.	72
5.5. Circuitos Trifásicos.	77
6. Circuitos Acoplados Magnéticamente.	83
6.1. Inductancia Mutua:	83
6.2. Convención de los puntos.	84
6.3. Consideraciones de Energía	85
6.4. El transformador lineal	87
6.5. Transformación T y π entre redes de tres terminales con acoplamiento magnético. . .	88
6.5.1. Red equivalente T	88
6.5.2. Red π equivalente	89

Índice de figuras

1.1. Número Complejo.	2
1.2. Diagrama de un fasor.	5
1.3. Red RLC en serie.	8
1.4. Grafica de Fasores de entrada (roja) y salida (azul) para el circuito de la Figura 1.3 empleando la parte real (Coseno) de la expresión fasorial. Note el efecto de la fase inicial ($\phi = 60^\circ$)	9
1.5. Grafica de Fasores de entrada (roja) y salida (azul) para el circuito de la Figura 1.3 empleando la parte imaginaria (Seno) de la expresión fasorial. Note el efecto de la fase inicial ($\phi = 60^\circ$).	9
1.6. Red RLC (admitancias en Siemens).	11
2.1. Diagrama de Magnitud de un cero simple.	16
2.2. Diagrama de Fase del cero.	17
2.3. Diagrama de Magnitud del polo.	18
2.4. Diagrama de Fase del polo.	19
2.5. Diagrama de Bode de Magnitud de un polo y un cero en el origen.	21
2.6. Diagrama de Bode de Fase de un polo y un cero en el origen.	22
2.7. Diagrama de un Filtro Pasa Bajas del tipo RC	24
2.8. Gráfica de Magnitud del Filtro Pasa Bajas.	27
2.9. Gráfica de Fase del Filtro Pasa Bajas.	28
2.10. Gráfica de Magnitud del Filtro Pasa Altas.	30
2.11. Gráfica de fase del Filtro Pasa Altas.	31
2.12. Gráfica de la respuesta total en magnitud de la función de transferencia $H(j\omega)$	34
2.13. Gráfica de la respuesta total en fase de la función de transferencia $H(j\omega)$	34
2.14. Redes Serie y Paralelo.	35
3.1. Circuito RLC paralelo.	39
3.2. Gráfica de polos y ceros en el plano complejo de la función de admitancia $Y(s)$ de un Circuito Resonante RLC en paralelo.	41
3.3. Respuesta en frecuencia de un Circuito Resonante RLC en paralelo.	41
3.4. Localización de los polos y ceros de la admitancia $Y(s)$	44
3.5. Polos y ceros de la admitancia $Y(s)$	44
3.6. Polos y ceros del circuito RLC	46
3.7. Vector $S - S_2$	46
3.8. Resonancia en Serie.	48
4.1. Red de un puerto.	51

4.2. Red de dos puertos.	51
4.3. Red resistiva de un puerto.	52
4.4. Red resistiva de un puerto que incluye una fuente dependiente.	54
4.5. Parámetros de Admitancia.	55
4.6. Ejemplo.	55
4.7. Parámetros de impedancia.	56
4.8. Construcción del equivalente Thevenin general de la red de 2 puertos.	57
4.9. Parámetros de transmisión.	58
4.10. Red de dos puertos en configuración π o Δ	58
4.11. Red de dos puertos en configuración T o Y	59
4.12. Conexión en paralelo de redes de 2 puertos.	62
4.13. Conexión en serie de redes de 2 puertos.	63
4.14. Conexión en cascada de redes de 2 puertos.	63
5.1. Circuito para el ejemplo.	66
5.2. Diagrama vectorial de la potencia compleja.	68
5.3. Circuito del ejemplo.	69
5.4. Diagrama de trayectorias entre los puntos a y b	69
5.5. Sistema trifásico de voltajes.	70
5.6. Diagrama fasorial de voltajes.	71
5.7. Ejemplo de trayectorias confusas.	71
5.8. Circuito del ejemplo para cálculo de corrientes en base a sus trayectorias.	72
5.9. Fuente monofásica de tres conductores.	73
5.10. Circuito con cargas idénticas.	74
5.11. Circuito con cargas desbalanceadas.	75
5.12. Fuentes ideales de voltaje conectadas en Y	77
5.13. Secuencias de Fase: a)Positiva y b)Negativa.	78
5.14. Diagrama Fasorial de voltajes.	79
5.15. Fuente trifásica conectada a una carga trifásica.	80
5.16. Circuito trifásico del ejemplo.	81
5.17. Diagrama fasorial para el ejemplo.	82
6.1. Inductancia Mutua 1.	83
6.2. Inductancia Mutua 2.	84
6.3. Inductancia Mutua 3.	84
6.4. Inductancia Mutua 4.	85
6.5. Inductancia Mutua 5.	85
6.6. Inductancia Mutua 6.	85
6.7. Inductancia Mutua 5.	87
6.8. Transformador Lineal.	87
6.9. Red equivalente T	88
6.10. Representación esquemática.	89
6.11. Representación esquemática.	89

Índice de tablas

Capítulo 1

Repaso de Números complejos

1.1. Introducción

Las ondas senoidales juegan un papel importante en la ciencia y la ingeniería. En circuitos eléctricos las frecuencias de interés de las senoides van desde unos cuantos Hz hasta decenas de GigaHertz. En casa estamos familiarizados con la frecuencia de 60 Hz empleada en la distribución de la energía eléctrica. En el laboratorio hemos empleado generadores de señales y detectores que cubren varios intervalos de frecuencia. Como ingenieros electrónicos, sabemos que las formas de onda senoidales son el "pan de cada día" en nuestra profesión, ya que, si conocemos la respuesta de un circuito lineal invariante con el tiempo para cualquier senoide, sabemos, en principio su respuesta a cualquier señal. De aquí la importancia de conocer la mejor manera de manipular dichas senoides.

1.2. Descripción de Números complejos

Dado un número complejo z , x e y son sus partes real e imaginaria respectivamente.

$$z = x + jy \quad (1.1)$$

en donde $j = \sqrt{-1}$
podemos escribir también

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= x \\ \operatorname{Im}(z) &= y \end{aligned} \quad (1.2)$$

En donde $\operatorname{Re}(\dots)$ significa "parte real de ..." e $\operatorname{Im}(\dots)$ significa "parte imaginaria de ...". La parte del lado derecho de la ec. 1.2 es llamada la representación en coordenadas rectangulares del número complejo z . La representación polar del número complejo z es:

$$z = |z| e^{j\theta} \quad (1.3)$$

donde $|z|$ es llamada la magnitud o amplitud de z , con valor

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.4)$$

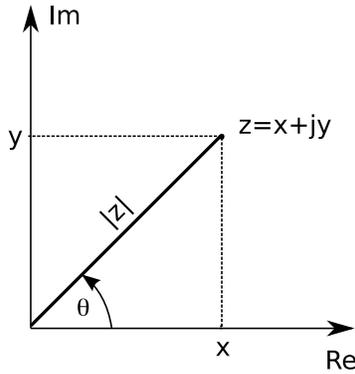


Figura 1.1: Número Complejo.

y θ es llamado el ángulo o fase de z , con valor:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad (1.5)$$

algunas veces describimos z por medio de la magnitud y el ángulo. En términos de $|z|$ y θ , tenemos:

$$\begin{aligned} x &= |z| \cos \theta \\ y &= |z| \sin \theta \end{aligned} \quad (1.6)$$

En la figura 1.1 se ilustra el número complejo z , el cual tiene $Re(z)$ e $Im(z)$ como coordenadas. La fase se mide desde el eje x hacia el vector, el cual inicia desde el origen y termina en el punto z .

Nota :El ángulo esta restringido al intervalo $[(0, \pm\pi)$ ó $(0, \pm 180^\circ)$]. Como consecuencia está definida únicamente por x y y . Al calcular con la ec. 1.5, debemos tener en cuenta que si conocemos $\tan \theta$, el ángulo no está definido únicamente en $[0, \pi]$. Por ejemplo, $\tan 26.6^\circ = 0.5$, pero $\tan 206.6^\circ$ también es igual a 0.5. Para poder determinar de forma única debemos considerar el cuadrante del plano complejo en el cual cae z .

1.2.1. Operaciones con números complejos

Las reglas de operación de números complejos son idénticas a las de los números reales, siempre y cuando tomemos en cuenta que $j^2 = -1$. Si tenemos dos números complejos:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1} \\ z_2 &= x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Las operaciones con números complejos se definen como sigue:

Suma

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Multiplicación

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

y en términos de sus representaciones polares:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| e^{j\theta_1} |z_2| e^{j\theta_2} \\ &= |z_1| |z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Complejo conjugado

Dado el número complejo $z = x + jy$, decimos que el número complejo $x - jy$, denotado por \bar{z} , es el complejo conjugado de z . Es fácil ver que si:

$$z = |z| e^{j\theta} \quad (1.11)$$

entonces,

$$\bar{z} = |z| e^{-j\theta} \quad (1.12)$$

y

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2x \\ z - \bar{z} &= 2jy \end{aligned} \quad (1.13)$$

aún más importante

$$z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \quad (1.14)$$

y

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y &= \frac{1}{j2}(z - \bar{z}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

1.3. Fasores y Ecuaciones Diferenciales ordinarias

Representación de una senoide por un fasor

Se define una senoide de frecuencia angular ω , como una función del tiempo t definido en $(-\infty, \infty)$ y de la forma

$$A_m \cos(\omega t + \phi) \quad (1.16)$$

en donde las constantes A_m , ω y θ son llamadas la *amplitud*, la *frecuencia angular* y la *fase* de la senoide, respectivamente.

Teorema 1 *teorema principal.*- La suma algebraica de cualquier número de senoídes de la misma frecuencia angular, digamos ω , y de cualquier número de sus derivadas de cualquier orden es también una senoide de la misma frecuencia angular ω .

Ejemplo 1 Consideremos la función $f(t)$ definida para toda t por:

$$f(t) = 2 \cos(2t + 60^\circ) - 4 \sin 2t + \frac{d}{dt} 2 \sin 2t$$

$f(t)$ es la suma de dos senoídes y la derivada de una tercera, todas ellas con la misma frecuencia angular $\omega = 2$ rad/seg. Según el teorema anterior $f(t)$ puede representarse por una sola senoide de la misma frecuencia angular. Al realizar la expansión de los términos cosenoidales tenemos:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cos(2t + 60^\circ) - 4 \sin 2t + \frac{d}{dt} 2 \sin 2t \\ &= 2 \cos 2t \cos 60 - 2 \sin 2t \sin 60 - 4 \sin 2t + 4 \cos 2t \\ &= \cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t - 4 \sin 2t + 4 \cos 2t \\ &= 5 \cos 2t - (4 + \sqrt{3}) \sin 2t \\ &= \sqrt{5^2 + (4 + \sqrt{3})^2} \cos \left(2t + \tan^{-1} \left(\frac{4 + \sqrt{3}}{5} \right) \right) \\ &= 7.6 \cos(2t + 48.8^\circ) \end{aligned}$$

Si sabemos que una senoide con frecuencia angular ω esta completamente especificada por su amplitud A_m y su fase θ . Entonces llegamos a la idea de representar la senoide por el número complejo $A = A_m e^{j\theta}$. Note que $A_m = |A|$ es la magnitud del número complejo A , y $e^{j\theta}$ es la fase. Más precisamente, la senoide $x(t) = A_m \cos(\omega t + \theta)$ es representada por el número complejo $A = A_m e^{j\theta}$ e inversamente, dado el número complejo $A = A_m e^{j\theta}$ y la frecuencia angular ω , podemos recuperar la senoide como sigue:

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{j\omega t}) \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(Ae^{j\omega t}) &= \text{Re}(A_m e^{j(\omega t + \phi)}) \\ &= \text{Re}[A_m \cos(\omega t + \phi) + j A_m \text{sen}(\omega t + \phi)] \\ &= A_m \cos(\omega t + \phi) = x(t) \end{aligned} \quad (1.18)$$

En el último paso se utilizó el hecho de que A_m , ω , t y ϕ son números reales. El número complejo A , el cual representa la senoide $A_m \cos(\omega t + \phi)$, es llamado, por conveniencia, el fasor que representa la senoide. Por definición, el fasor A está dado por $A = A_m e^{j\theta}$.

Comentarios :

1. Debe tomarse en cuenta que el hecho de conocer un fasor que representa una senoide determina la amplitud y la fase, pero no la frecuencia. Por lo tanto es importante, tomar en cuenta la frecuencia de los fasores cuando se realizan cálculos con los mismos.
2. Alternativamente, si especificamos una senoide por una función seno en lugar de una función coseno, tenemos $y(t) = A_m \sin(\omega t + \phi)$. Entonces una representación fasorial $A = A_m e^{j\omega t}$ también funciona, Sin embargo, se debe recuperar la senoide de la siguiente ecuación $y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t})$.

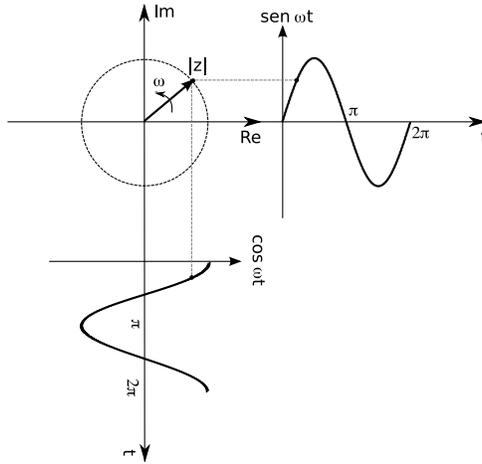


Figura 1.2: Diagrama de un fasor.

3. Si se grafica la función $Ae^{j\omega t}$ en el plano complejo, las coordenadas de tal número complejo son:

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{j\omega t}) \quad (1.19)$$

$$y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t}) \quad (1.20)$$

Se puede pensar en $x(t)$ como la proyección en el eje x (ecuación 1.19) del punto $Ae^{j\omega t}$, el cual rota en un círculo de radio A_m a una velocidad angular de ω rad/seg en la dirección contraria a las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 1.2. Por lo tanto, $Ae^{j\omega t}$ puede ser llamada un fasor rotatorio. De manera similar, la proyección en el eje y del punto $Ae^{j\omega t}$ da $y(t)$.

La representación fasorial de senoides es empleada principalmente en el cálculo de soluciones particulares de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes reales, cuando la función forzada es una senoide. En otras palabras si la función es de la forma:

$$\alpha_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{dx}{dt} + \alpha_n x = A_m \cos(\omega t + \phi) \quad (1.21)$$

Si se sustituye x por una senoide de frecuencia angular ω , entonces todo el término del lado izquierdo será igual a una senoide de frecuencia angular ω . Por lo tanto el verdadero problema consistirá en calcular la amplitud y la fase de la senoide para la solución particular, es decir encontrar el fasor de dicha solución.

1.4. Aplicación del método de fasores para resolver ecuaciones diferenciales

Este método es el más conveniente para obtener una solución particular de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes reales cuando la función forzada es una senoide. Tal es el caso de la ecuación 1.21, en donde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, A_m, \omega$ y ϕ son constantes reales.

Empleando fasores tenemos:

$$\begin{aligned} A &= A_m e^{j\phi} \\ X &= X_m e^{j\varphi} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Sustituyendo sucesivamente $x(t)$ por $Re [Xe^{j\omega t}]$ en la ec. 1.21, tenemos:

$$\alpha_0 \frac{d^n}{dt^n} Re [Xe^{j\omega t}] + \alpha_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} Re [Xe^{j\omega t}] + \dots + \alpha_{n-1} \frac{d}{dt} Re [Xe^{j\omega t}] + \alpha_n Re [Xe^{j\omega t}] = Re [Ae^{j\omega t}] \quad (1.23)$$

La ec. 1.23 puede reescribirse como:

$$\frac{d^n}{dt^n} Re [\alpha_0 X e^{j\omega t}] + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} Re [\alpha_1 X e^{j\omega t}] + \dots + \frac{d}{dt} Re [\alpha_{n-1} X e^{j\omega t}] + Re [\alpha_n X e^{j\omega t}] = Re [Ae^{j\omega t}] \quad (1.24)$$

Si sabemos que

$$\frac{d}{dt} Re [Be^{j\omega t}] = Re \left[\frac{d}{dt} B e^{j\omega t} \right] = Re [j\omega B e^{j\omega t}] \quad (1.25)$$

Entonces la ec. 1.24 se puede expresar de la siguiente manera:

$$Re [\alpha_0 (j\omega)^n X e^{j\omega t}] + Re [\alpha_1 (j\omega)^{n-1} X e^{j\omega t}] + \dots + Re [\alpha_{n-1} (j\omega) X e^{j\omega t}] + Re [\alpha_n X e^{j\omega t}] = Re [Ae^{j\omega t}] \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} Re [\alpha_0 (j\omega)^n X e^{j\omega t} + \alpha_1 (j\omega)^{n-1} X e^{j\omega t} + \dots + \alpha_{n-1} (j\omega) X e^{j\omega t} + \alpha_n X e^{j\omega t}] &= Re [Ae^{j\omega t}] \\ Re [\{\alpha_0 (j\omega)^n + \alpha_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} (j\omega) + \alpha_n\} X e^{j\omega t}] &= Re [Ae^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$[\alpha_0 (j\omega)^n + \alpha_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} (j\omega) + \alpha_n] X = A \quad (1.28)$$

$$X = \frac{A}{\alpha_0 (j\omega)^n + \alpha_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} (j\omega) + \alpha_n} \quad (1.29)$$

de la ecuación 1.29 podemos deducir que la magnitud es:

$$X_m = \frac{A_m}{\left[\underbrace{(\alpha_n - \alpha_{n-2}\omega^2 + \dots)^2}_{\text{Potencias pares de } \omega} + \underbrace{(\alpha_{n-1}\omega - \alpha_{n-3}\omega^3 + \dots)^2}_{\text{Potencias impares de } \omega} \right]^{1/2}} \quad (1.30)$$

y la fase es:

$$\varphi = \phi - \tan^{-1} \frac{\alpha_{n-1}\omega - \alpha_{n-3}\omega^3 + \dots}{\alpha_n - \alpha_{n-2}\omega^2 + \dots} \quad (1.31)$$

Nota: La ecuación 1.29 podrá utilizarse siempre y cuando ω sea de tal valor que:

$$\alpha_0(j\omega)^n + \alpha_1(j\omega)^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}(j\omega) + \alpha_n \neq 0 \quad (1.32)$$

Si no se cumple la condición dada por la ec. 1.32, entonces la solución particular será de la forma:

$$tA \cos(\omega t + \phi) \quad (1.33)$$

El desarrollo anterior puede generalizarse para un circuito lineal invariante con el tiempo con una sola entrada w y una sola salida y , como el descrito por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m}{dt^m}w + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}w + \dots + b_m w \quad (1.34)$$

en donde a_1, a_2, \dots, a_n y b_0, b_1, \dots, b_m son números reales. Si la entrada es una senoide de la forma:

$$w(t) = \text{Re}(Ae^{j\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \phi) \quad (1.35)$$

en donde:

$$A = |A| e^{j\phi} \quad (1.36)$$

Entonces una solución particular de la ecuación 1.34 es de la forma

$$y(t) = \text{Re}(Be^{j\omega t}) = |B| \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.37)$$

en donde:

$$B = |B| e^{j\varphi} \quad (1.38)$$

La relación entre los fasores A y B se muestra en la siguiente ecuación:

$$[(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n] B = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m] A \quad (1.39)$$

La ecuación 1.39 se obtiene directamente de la ecuación 1.34, reemplazando la K^{ava} derivada de $w(t)$ con $(j\omega)^K A$, para $K = 0$ a m y al reemplazar la K^{ava} derivada de $y(t)$ con $(j\omega)^K B$, para $K = 0$ a n . Por lo tanto, para encontrar una solución particular como la de la ec. 1.37, empleamos la ec. 1.39 y solo necesitamos manipular los números complejos para tener la solución de la forma mostrada en la ec. 1.38.

Ejemplo 2 Considere el Circuito serie RLC lineal invariante con el tiempo, mostrado en la figura 1.3 y teniendo una fuente de voltaje de entrada senoidal

$$e_s(t) = \text{Re}[Ee^{j\omega t}] = |E| \cos(\omega t + \phi) \quad (1.40)$$

si sabemos que la variable de salida es el voltaje a través del capacitor. Entonces la ecuación diferencial es, para toda t .

$$LC \frac{d^2}{dt^2}v_c(t) + RC \frac{d}{dt}v_c(t) + v_c(t) = e_s(t) \quad (1.41)$$

y una solución particular es de la forma

$$v_c(t) = \text{Re}[V_c e^{j\omega t}] = |V_c| \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.42)$$

La relación entre el fasor de salida V_c , el cual va a ser determinado, y el fasor de entrada E , el cual es conocido, es como sigue:

$$[LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1] V_c = E \quad (1.43)$$

Observe que la ecuación 1.43 se obtiene de la ec. 1.41 al reemplazar $e_s(t)$ con E y las k^{ava} s derivadas de $v_c(t)$ con $(j\omega)^k V_c$, entonces:

$$V_c = \frac{E}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \quad (1.44)$$

Partiendo de la ec. 1.44 encontramos que la magnitud es:

$$|V_c| = \frac{|E|}{[(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2]^{1/2}} \quad (1.45)$$

y la fase

$$\varphi = \phi - \tan^{-1} \left[\frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \right] \quad (1.46)$$

La solución $v_c(t)$, expresada como una función real del tiempo, es obtenida por medio de la ec. 1.42.

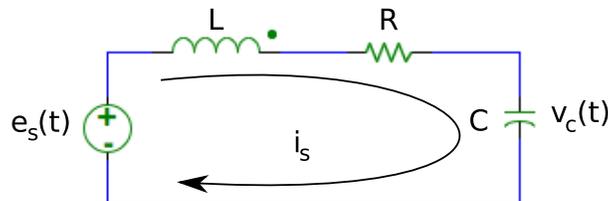


Figura 1.3: Red RLC en serie.

Código Matlab.- El código en lenguaje Matlab® empleado para las gráficas de ondas senoidales mostradas en las Figuras 1.4 y 1.5 se muestra a continuación:

```
% Función para graficar los resultados del problema número 1 de la materia
% de Circuitos Eléctricos (anteriormente Circuitos II), para demostrar la
% utilización de fasores en la solución de una ecuación diferencial de 2
% orden y cuyo resultado final se muestra de forma gráfica por medio de
% ondas senoidales que emulan las señales vistas en un osciloscopio.
```

```
% Valores de los elementos del circuito RLC en serie
```

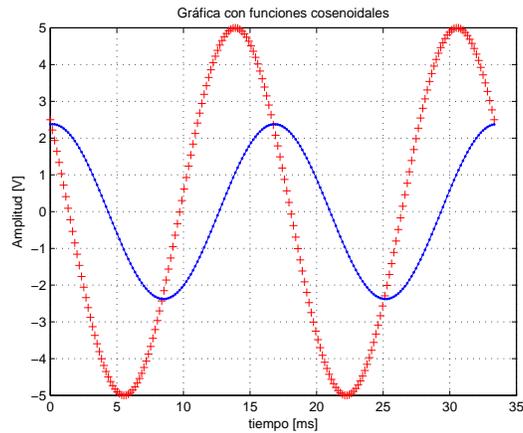


Figura 1.4: Grafica de Fasores de entrada (roja) y salida (azul) para el circuito de la Figura 1.3 empleando la parte real (Coseno) de la expresión fasorial. Note el efecto de la fase inicial ($\phi = 60^\circ$)

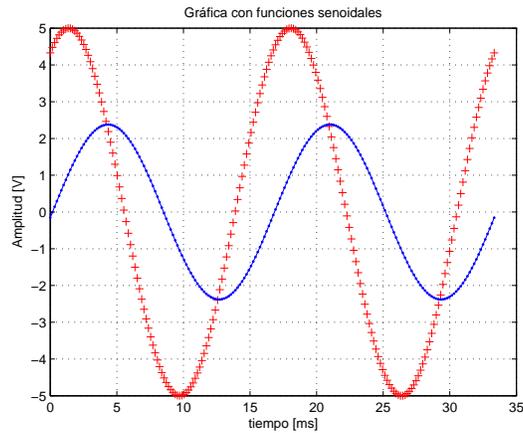


Figura 1.5: Grafica de Fasores de entrada (roja) y salida (azul) para el circuito de la Figura 1.3 empleando la parte imaginaria (Seno) de la expresión fasorial. Note el efecto de la fase inicial ($\phi = 60^\circ$).

```

R=1000;
L=100e-3;
C=5e-6;
f=60; %frecuencia lineal de la señal de excitación
w=2*pi*f; % frecuencia angular

E_abs=5; % magnitud de la señal de excitación
phi= 60; % ángulo de la señal de excitación
E=E_abs*exp(i*phi*pi/180); % Fasor que representa la señal de excitación
%(con ángulo en radianes)

```

```

% La expresión fasorial del circuito es: (L*C*(i*w)^2+R*C*(i*w)+1)*Vc=E al
% despejar el fasor Vc, se tiene la siguiente ecuación:

Vc=E/(L*C*(i*w)^2+R*C*(i*w)+1);
Vc_mag=abs(Vc); % Magnitud de Vc
Vc_ang=angle(Vc)*180/pi; % ángulo de Vc en grados

%Para la representación gráfica se define la cantidad de tiempo a graficar
%en función del período de la señal y la cantidad de ciclos deseados
T=1/f;
N=2; % Número de ciclos a graficar
n=100; % Número de puntos por ciclo
t=linspace(0,N*T,N*n); % Genera los puntos de tiempo para la gráfica completa

% Representación por medio de ondas cosenoidales, se utiliza la parte Real
% de la representación fasorial.
es=real(E*exp(i*w*t));
vs=real(Vc*exp(i*w*t));
figure(1) % grafica en la figura 1
plot(t*1e3,es,'r+',t*1e3,vs,'b.-')
title('Gráfica con funciones cosenoidales');
ylabel('Amplitud [V]');
xlabel('tiempo [ms]');
grid
% Representación por medio de ondas senoidales, se puede observar en éste
% caso que se utiliza la parte Imaginaria de la representación fasorial.
es1=imag(E*exp(i*w*t));
vs1=imag(Vc*exp(i*w*t));
figure(2) % grafica en la figura 2
plot(t*1e3,es1,'r+',t*1e3,vs1,'b.-')
title('Gráfica con funciones senoidales');
ylabel('Amplitud [V]');
xlabel('tiempo [ms]');
grid

```

1.5. Solución mediante fasores de sistemas de ecuaciones integro-diferenciales simultaneas.

El procedimiento mencionado anteriormente, relativo al empleo de fasores para determinar la solución en estado senoidal permanente para una variable de respuesta en una sola ecuación diferencial, se aplica a un sistema de ecuaciones simultaneas diferenciales y/o integro-diferenciales. Por ejemplo si consideramos la red mostrada en la figura 1.6.

Al aplicar la LCK en los nodos de la red, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dv_1}{dt} + 2v_1(t) - 2v_2(t) = i_1(t) \quad (1.47)$$

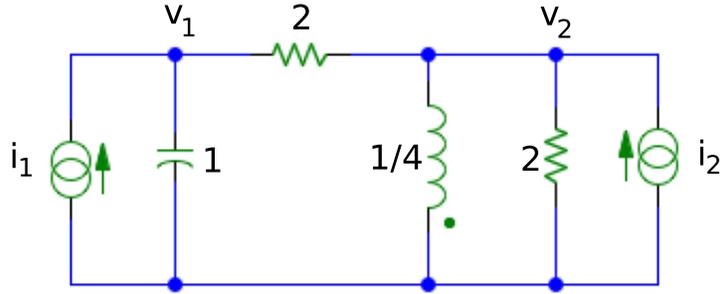


Figura 1.6: Red RLC (admitancias en Siemens).

$$4 \int_{-\infty}^t v_2(\tau) d\tau + 4v_2(t) - 2v_1(t) = i_2(t) \quad (1.48)$$

Si se desea encontrar la respuesta en estado senoidal permanente correspondiente a $v_1(t)$ y $v_2(t)$, se puede comenzar diferenciando la segunda ecuación, para convertirla en una ec. diferencial en lugar de una ec. integro-diferencial. De tal forma el conjunto de ecuaciones se transforma en:

$$\frac{dv_1}{dt} + 2v_1(t) - 2v_2(t) = i_1(t) \quad (1.49)$$

$$4v_2(t) + 4\frac{dv_2}{dt} - 2\frac{dv_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} \quad (1.50)$$

Considerando el caso en que la excitación de la red es puramente senoidal, es decir las corrientes tienen la forma:

$$i_1(t) = I_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad (1.51)$$

$$i_2(t) = I_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

Se supone que se conocen las magnitudes I_1 e I_2 y los ángulos de fase ϕ_1 y ϕ_2 . Las magnitudes pueden ser diferentes lo mismo que los angulos. Sin embargo se supone que la frecuencia angular ω debe ser la misma para ambas excitaciones. La solución para los voltajes de nodo en estado senoidal permanente para estas variables también tendrá forma senoidal. Por lo que:

$$v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \theta_1) \quad (1.52)$$

$$v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \theta_2)$$

Donde los valores de V_1 , V_2 , θ_1 y θ_2 deben ser determinados, para ello solo se requiere emplear los fasores $\mathcal{I}_1 e^{j\omega t}$ e $\mathcal{I}_2 e^{j\omega t}$ para representar las dos variables de excitación $i_1(t)$ e $i_2(t)$ respectivamente, y los fasores $\mathcal{V}_1 e^{j\omega t}$ y $\mathcal{V}_2 e^{j\omega t}$ para representar las variables de respuesta $v_1(t)$ y $v_2(t)$. Por consiguiente:

$$i_1(t) = \text{Re} [\mathcal{I}_1 e^{j\omega t}] \quad (1.53)$$

$$i_2(t) = \text{Re} [\mathcal{I}_2 e^{j\omega t}]$$

$$\begin{aligned}v_1(t) &= \operatorname{Re} [\mathcal{V}_1 e^{j\omega t}] \\v_2(t) &= \operatorname{Re} [\mathcal{V}_2 e^{j\omega t}]\end{aligned}\tag{1.54}$$

En donde las constantes complejas \mathcal{I}_1 , \mathcal{I}_2 , \mathcal{V}_1 y \mathcal{V}_2 se definen como:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= I_1 e^{j\phi_1} \\ \mathcal{I}_2 &= I_2 e^{j\phi_2}\end{aligned}\tag{1.55}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1 &= V_1 e^{j\theta_1} \\ \mathcal{V}_2 &= V_2 e^{j\theta_2}\end{aligned}\tag{1.56}$$

Sustituyendo las relaciones de las ecuaciones 1.53 y 1.54 en las ecuaciones diferenciales 1.49 y 1.50, intercambiando el orden de la diferenciación y de la extracción de la parte real, obtenemos:

$$\operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} 2 + j\omega & -2 \\ -j2\omega & 4 + j4\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 e^{j\omega t} \\ \mathcal{V}_2 e^{j\omega t} \end{bmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 e^{j\omega t} \\ j\omega \mathcal{I}_2 e^{j\omega t} \end{bmatrix} \right\}\tag{1.57}$$

Igualando las matrices complejas completas de la ec. 1.57 y multiplicando ambos miembros por $e^{-j\omega t}$, se encuentra:

$$\begin{bmatrix} 2 + j\omega & -2 \\ -j2\omega & 4 + j4\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ j\omega \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}\tag{1.58}$$

Como el segundo miembro de la ec. 1.58 en el término correspondiente a \mathcal{I}_2 , se encuentra multiplicado por $j\omega$, lo cual representa la derivada con respecto al tiempo de $i_2(t)$, se procede a dividir la segunda ecuación por $j\omega$, con lo que se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 + j\omega & -2 \\ -2 & 4 + \frac{4}{j\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix}\tag{1.59}$$

Comparando la ecuación 1.59 con las ecuaciones originales 1.47 y 1.48, se observa que la operación integral en las ecuaciones integro-diferenciales originales produce un factor $1/j\omega$ en las ecuaciones que relacionan los fasores y que la operación derivada genera un factor $j\omega$. En consecuencia, el método de fasores puede aplicarse en forma directa a ecuaciones integro-diferenciales, sin que sea necesario diferenciar estas ecuaciones con el objeto de convertirlas a la forma de ecuaciones puramente diferenciales.

Si representamos la ec. 1.59 de la siguiente manera

$$i = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = r^{-1} \cdot v = g \cdot v\tag{1.60}$$

entonces los valores correspondientes a v serían:

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{g_{11} \cdot g_{22} - g_{21} \cdot g_{12}} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = r \cdot i\tag{1.61}$$

de lo anterior deducimos que la solución del sistema de dos ecs. simultáneas, se convierte en:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{j\omega}{4(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 8} \begin{bmatrix} 4 + \frac{4}{j\omega} & 2 \\ 2 & 2 + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

El circuito mostrado en la figura 1.6 se alimenta con la siguiente excitación: $i_1(t) = \cos t$ e $i_2(t) = 2 \cos(t + \frac{\pi}{2})$

se desea encontrar la respuesta en estado senoidal permanente para $v_1(t)$ y $v_2(t)$.

notamos en primer lugar que $\mathcal{I}_1 = 1e^{j0}$, $\mathcal{I}_2 = 2e^{j\pi/2}$ y $\omega = 1$. Sustituyendo los valores anteriores en 1.62, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{j}{4 + j8} \begin{bmatrix} 4 + \frac{4}{j\omega} & 2 \\ 2 & 2 + j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1e^{j0} \\ 2e^{j\pi/2} \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

al realizar la multiplicación indicada, se llega a:

$$v_1 = \frac{j}{1 + j2} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{j26.57^\circ}$$

$$v_2 = \frac{-1}{1 + j2} = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{j116.57^\circ}$$

Las soluciones correspondientes para las cantidades $v_1(t)$ y $v_2(t)$ son:

$$v_1(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(t + 26.57^\circ)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos(t + 116.57^\circ)$$

Capítulo 2

Respuesta en Frecuencia y Filtros Pasivos

2.1. Diagramas de Bode.

Es un método rápido que sirve para obtener una descripción aproximada de la variación de amplitud y fase de una función de transferencia dada como función de ω . La curva de respuesta aproximada que se construirá recibe el nombre de gráfica asintótica, o gráfica de Bode o diagrama de Bode, en honor de su inventor, Hendrik W. Bode, quien era un ingeniero electricista y matemático de Bell Telephone Laboratories. Tanto las curvas de magnitud como las de fase se muestran usando una escala de frecuencia logarítmica para la abcisa, incluso la magnitud misma también se muestra en unidades logarítmicas llamadas decibeles (dB).

La conversión de valores en magnitud a su equivalente en decibeles se realiza por medio de la siguiente expresión:

$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| \quad (2.1)$$

Algunas conversiones útiles de magnitud a dB se muestran a continuación:

$\log 1$	$= 0$	$ H(j\omega) = 1$	$\Leftrightarrow H_{dB} = 0\text{dB}$
$\log 2$	$= 0.301$	$ H(j\omega) = 2$	$\Leftrightarrow H_{dB} \doteq 6\text{dB}$
$\log 5$	$= 0.698$	$ H(j\omega) = 5$	$\Leftrightarrow H_{dB} \doteq 14\text{dB}$
$\log 10$	$= 1$	$ H(j\omega) = 10$	$\Leftrightarrow H_{dB} \doteq 20\text{dB}$
$\log 10^n$	$= n$	$ H(j\omega) = 10^n$	$\Leftrightarrow H_{dB} \doteq 20n\text{dB}$
$\log \sqrt{n}$	$= \frac{1}{2} \log n$	$ H(j\omega) = \sqrt{2}$	$\Leftrightarrow H_{dB} \doteq 3\text{dB}$

Las funciones de transferencia se escriben en términos de S , posteriormente se factoriza $H(S)$ para mostrar explícitamente sus polos y ceros. Finalmente se sustituye $S = j\omega$ cuando ya se esté en posibilidad de calcular la magnitud o el ángulo de fase.

2.1.1. Cero Simple.

Consideremos como primer caso a un cero en $S = -a$, escrito en forma estandar como:

$$H(S) = 1 + \frac{S}{a} \quad (2.2)$$

$$H(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{a} \quad (2.3)$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} H_{dB} &= 20 \log \left| 1 + j\frac{\omega}{a} \right| \\ &= 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Diagrama de Bode en magnitud.

El diagrama de Bode para esta función consiste de dos curvas asintóticas a las que se aproxima H_{dB} para valores muy grandes y muy pequeños de ω . Entonces,

$$H_{dB} \doteq 20 \log 1 = 0 \quad (\omega \ll a) \quad (2.6)$$

$$H_{dB} \doteq 20 \log \frac{\omega}{a} \quad (\omega \gg a) \quad (2.7)$$

En $\omega = a$, $H_{dB} = 0\text{dB}$; en $\omega = 10a$, $H_{dB} = 20\text{dB}$ y en $\omega = 100a$, $H_{dB} = 40\text{dB}$ por lo tanto el valor de H_{dB} aumenta 20 dB cada vez que la frecuencia aumenta su valor por 10 o sea que tiene una pendiente de 20 dB/década. Como H_{dB} aumenta 6 dB cuando ω se duplica un valor alterno para la pendiente es 6 dB/octava.

El diagrama de Bode representa la respuesta en términos de dos asíntotas, ambas líneas rectas y fáciles de dibujar. Al observar la Figura 2.1 notamos que las dos asíntotas se cortan en $\omega = a$ es decir a la frecuencia en que ocurre el cero. Esta frecuencia recibe el nombre de frecuencia de esquina, de corte, de 3 dB ó de la mitad de potencia.

Ahora se analizará cual es el error que se introduce al usar la curva de respuesta asintótica. A la frecuencia de corte:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = 3\text{dB}$$

comparado con el valor asintótico de 0dB. En $\omega = 0.5a$ se tiene:

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{1.25} \doteq 1\text{dB} \quad (2.8)$$

y en $\omega = 2a$

$$H_{dB} = 20 \log \sqrt{5} \doteq 7\text{dB} \quad (2.9)$$

Cuando $\omega = a$, en ese punto tenemos un error de 3 dB si los comparamos con los 0 dB del punto de cruce de las asíntotas. Para las frecuencias una octava arriba y una octava abajo de la frecuencia de corte, el error es de 1 dB.

Conclusión: El error introducido por el uso de las asíntotas se reducirá a medida que la frecuencia de operación ó bajo prueba se aleje de la frecuencia de corte.

Por lo tanto, la respuesta exacta está presentada por una curva suave localizada 3 dB por encima de la respuesta asintótica en $\omega = a$, y 1 dB por encima de ella en $\omega = 0.5a$ y $\omega = 2a$.

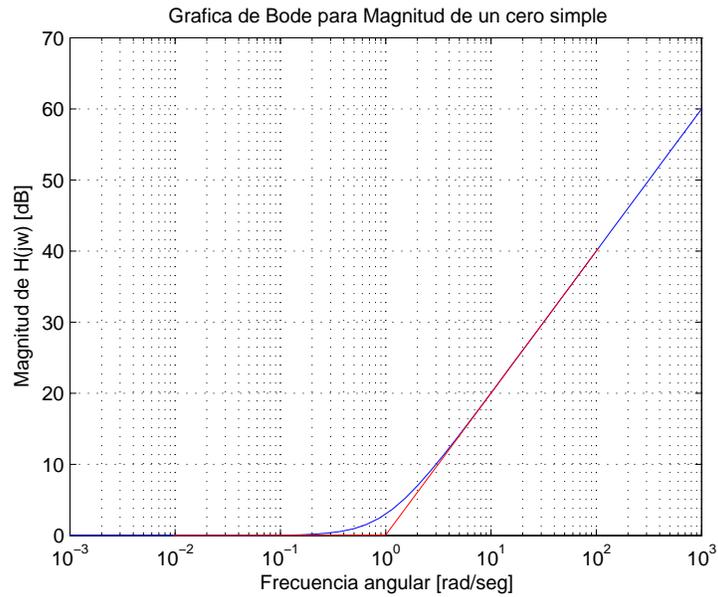


Figura 2.1: Diagrama de Magnitud de un cero simple.

Diagrama de Bode en Fase.

La fase para el cero simple se calcula de la siguiente manera:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\text{Im}[H(j\omega)]}{\text{Re}[H(j\omega)]} \quad (2.10)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega}{a} \quad (2.11)$$

Algunos valores útiles de la función \tan^{-1} se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} \tan^{-1}(0.1) &\approx 5.7^\circ \rightarrow 0^\circ \\ \tan^{-1}(1) &= 45^\circ \\ \tan^{-1}(10) &\approx 84.3^\circ \rightarrow 90^\circ \end{aligned}$$

Para valores de $\omega \ll a$ el ángulo se define como 0° y se puede utilizar como asíntota para valores de ω inferiores a $0.1a$. Cuando $\omega \gg a$ el ángulo se define como 90° y se empleará la asíntota para valores por encima de $10a$.

En $\omega = a$ el ángulo es de 45° y se considera una recta que pasa por , $\omega = a$ y , es decir, es una recta que tiene una pendiente de 45° por década.

$$\begin{aligned} \phi &\approx 0^\circ & (\omega < 0.1a) \\ \phi &= 45^\circ & (\omega = a) \\ \phi &\approx 90^\circ & (\omega > 10a) \end{aligned}$$

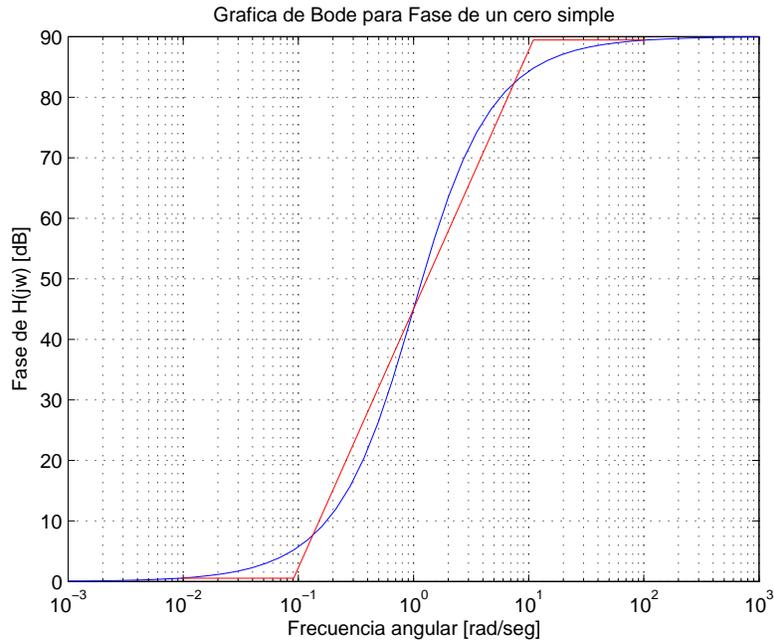


Figura 2.2: Diagrama de Fase del cero.

Las diferencias máximas entre la curva asintótica y la curva real es $\pm 5.71^\circ$ en $\omega = 0.1a$ y $\omega = 10a$. También ocurren errores de $\pm 5.29^\circ$ en $\omega = 0.344a$ y $\omega = 2.54a$; el error es igual a cero en $\omega = 0.159a$ y en $\omega = 6.31a$.

Código Matlab.- El código en lenguaje Matlab® empleado para las gráficas de Bode mostradas en las Figuras 2.1 y 2.2 se muestra a continuación:

```
w=logspace(-3,3);
a=1;
H=1+i*w/a;
H_abs=abs(H);
HdB=20*log10(H_abs);
teta=atan2(imag(H),real(H))*180/pi;

[x_L,y_L,x_H,y_H,x_fase,y_fase]=aprox_rectas(w,a,HdB,teta);

figure(1);
%subplot(2,1,1);
semilogx(w,HdB,'b',x_L,y_L,'r',x_H,y_H,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Magnitud de un cero simple');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Magnitud de H(jw) [dB]');
```

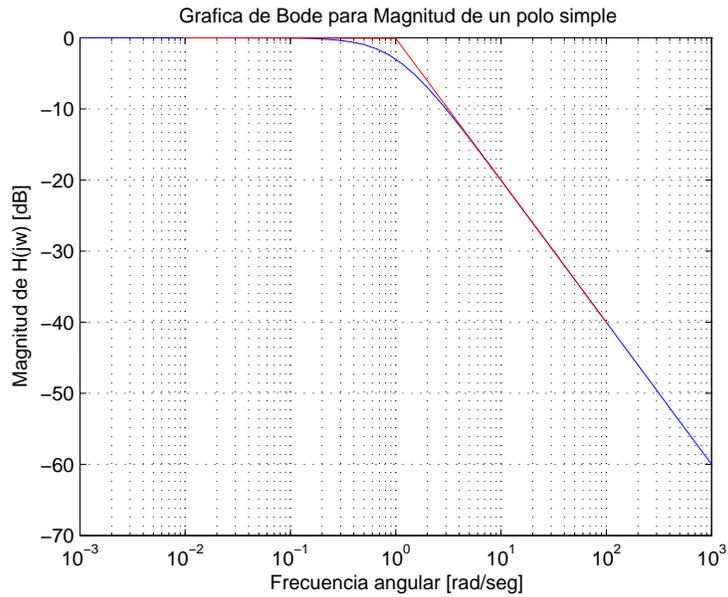


Figura 2.3: Diagrama de Magnitud del polo.

```
figure(2);
%subplot(2,1,2);
semilogx(w,teta,'b',x_fase,y_fase,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Fase de un cero simple');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Fase de H(jw) [dB]');
```

2.1.2. Polo Simple.

Diagrama de Bode en magnitud.

Para graficar en diagramas de Bode un polo simple, como el definido en la ecuación 2.12.

$$H(S) = \frac{1}{1 + \frac{S}{a}} \quad (2.12)$$

En primer lugar observamos que como un polo es el recíproco de un cero, la operación logarítmica conduce a una gráfica de Bode que es el negativo de lo que se obtuvo anteriormente.

La amplitud será de 0 dB hasta la frecuencia $\omega = a$, a partir de ese punto la pendiente será de -20 dB/dec, es decir, para $\omega = a$ se tendrá la otra asíntota. Y la fase de esta función tendrá la forma:

$$\phi = \phi_{num} - \phi_{den} \quad (2.13)$$

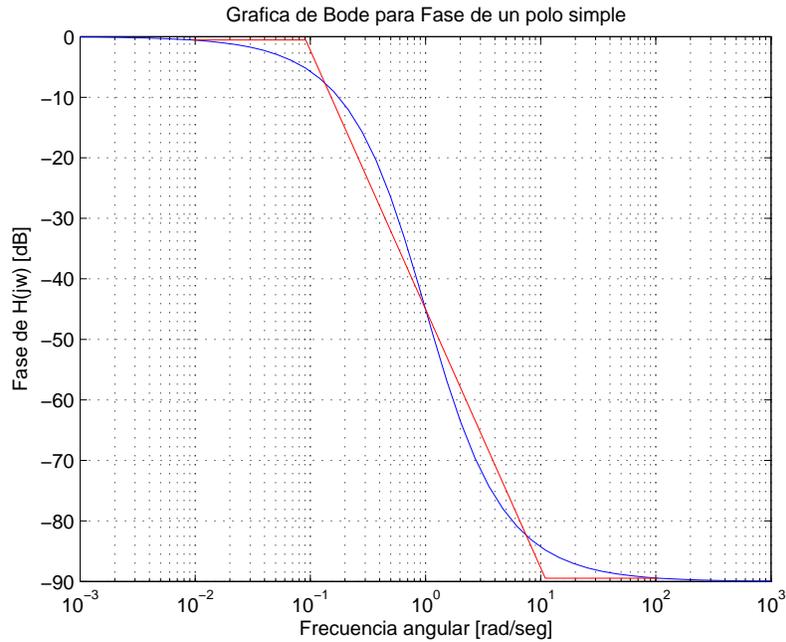


Figura 2.4: Diagrama de Fase del polo.

$$\begin{aligned}\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ &= 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)\end{aligned}\quad (2.14)$$

Código Matlab.- El código en lenguaje Matlab® empleado para las gráficas de Bode mostradas en las Figuras 2.3 y 2.4 se muestra a continuación:

```
a=1;
w=logspace(-3,3);
H=1./(1+i*w/a);
H_abs=abs(H);
HdB=20*log10(H_abs);
teta=atan2(imag(H),real(H))*180/pi;

[x_L,y_L,x_H,y_H,x_fase,y_fase]=aprox_rectas(w,a,HdB,teta);

figure(1);
%subplot(2,1,1);
semilogx(w,HdB,'b',x_L,y_L,'r',x_H,y_H,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Magnitud de un polo simple');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Magnitud de H(jw) [dB]');
```

```

figure(2);
%subplot(2,1,2);
semilogx(w,teta,'b',x_fase,y_fase,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Fase de un polo simple');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Fase de H(jw) [dB]');

```

2.1.3. Comportamiento de un polo o un cero en el origen.

Otro término que puede aparecer en $H(S)$ es un factor S en el numerador o en el denominador.

Diagrama de Bode en magnitud.

Si $H(S)$ es igual a S tendremos:

$$H_{dB(cero)} = 20 \log |\omega| \quad (2.15)$$

Mientras que si $H(S)$ es igual a $1/S$ tendremos:

$$\begin{aligned} H_{dB(polo)} &= 20 \log \left| \frac{1}{\omega} \right| \\ &= -20 \log |\omega| \end{aligned} \quad (2.16)$$

Diagrama de Bode en fase.

Respecto a la fase, en primer lugar debemos tener en mente que si:

$$H(j\omega)_{cero} = j\omega \quad (2.17)$$

$$H(j\omega)_{polo} = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega} \quad (2.18)$$

por lo tanto:

$$\phi_{cero} = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{0} \right) = 90^\circ \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \phi_{polo} &= \tan^{-1} \left(\frac{0}{1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{0} \right) = \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{-1}{0} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{0}{\omega} \right) = -90^\circ \end{aligned} \quad (2.20)$$

Código Matlab.- El código en lenguaje Matlab® empleado para las gráficas de Bode mostradas en las Figuras 2.5 y 2.6 se muestra a continuación:

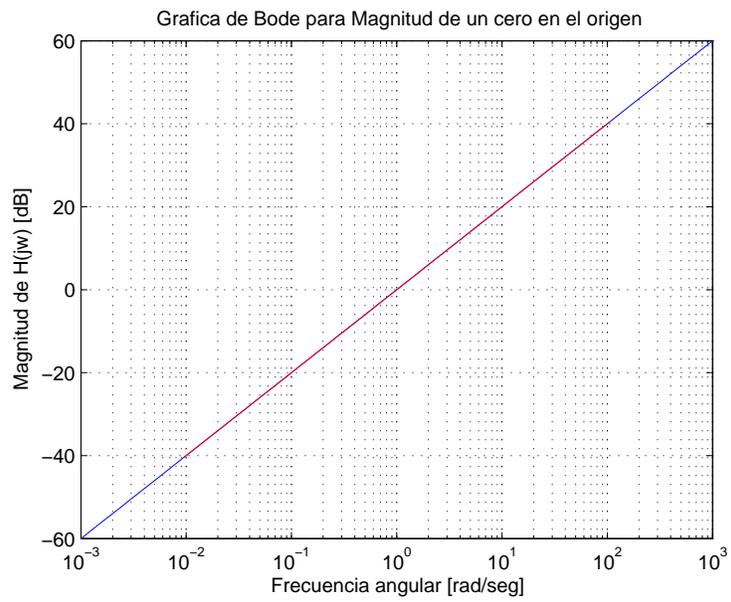
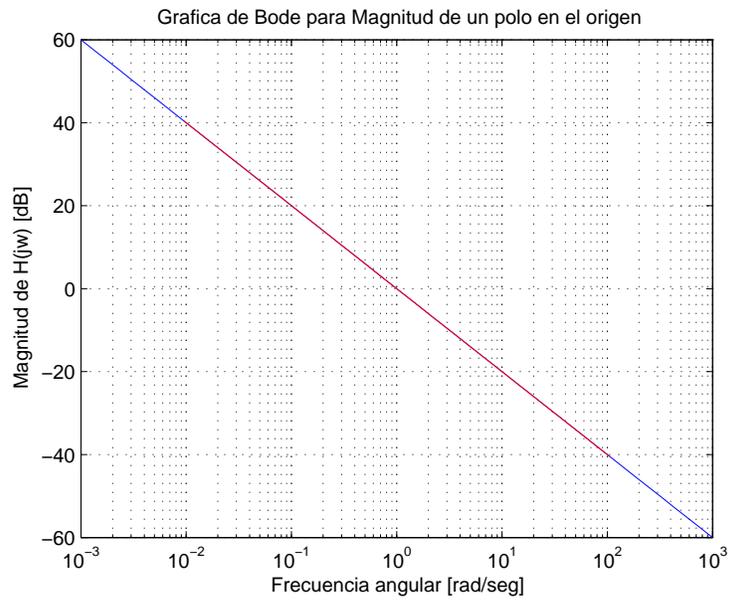


Figura 2.5: Diagrama de Bode de Magnitud de un polo y un cero en el origen.

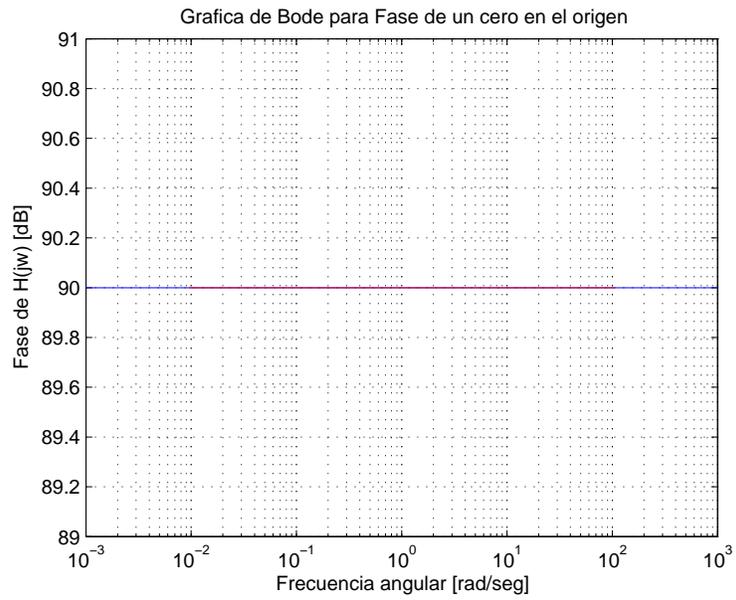
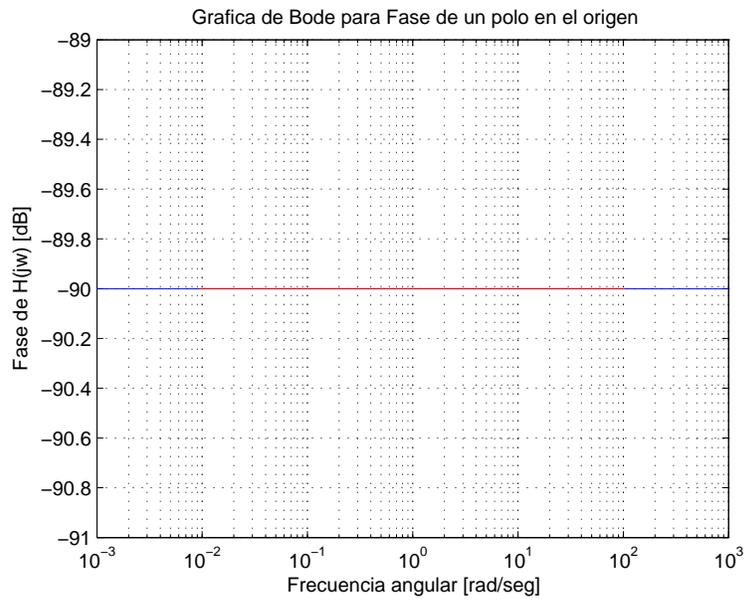


Figura 2.6: Diagrama de Bode de Fase de un polo y un cero en el origen.

```

%%% Código para las gráficas del cero en el origen

a=1;
w=logspace(-3,3);
H=i*w/a;
H_abs=abs(H);
HdB=20*log10(H_abs);
teta=atan2(imag(H),real(H))*180/pi;

[x_L,y_L,x_H,y_H,x_fase,y_fase]=aprox_rectas(w,a,HdB,teta);

figure(1);
%subplot(2,1,1);
semilogx(w,HdB,'b',x_L,y_L,'r',x_H,y_H,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Magnitud de un cero en el origen');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Magnitud de H(jw) [dB]');

figure(2);
%subplot(2,1,2);
semilogx(w,teta,'b',x_fase,y_fase,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Fase de un cero en el origen');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Fase de H(jw) [dB]');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% Código para las gráficas del polo en el origen
a=1;
w=logspace(-3,3);
H=1./(i*w/a);
H_abs=abs(H);
HdB=20*log10(H_abs);
teta=atan2(imag(H),real(H))*180/pi;

[x_L,y_L,x_H,y_H,x_fase,y_fase]=aprox_rectas(w,a,HdB,teta);

figure(1);
%subplot(2,1,1);
semilogx(w,HdB,'b',x_L,y_L,'r',x_H,y_H,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Magnitud de un polo en el origen');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Magnitud de H(jw) [dB]');

figure(2);

```

```

%subplot(2,1,2);
semilogx(w,teta,'b',x_fase,y_fase,'r');
grid;
title('Grafica de Bode para Fase de un polo en el origen');
xlabel('Frecuencia angular [rad/seg]');
ylabel('Fase de H(jw) [dB]');

```

2.1.4. Constante multiplicativa K

Si $H(S)$ contiene una constante multiplicativa, esto da una gráfica de Bode en magnitud que es una recta horizontal colocada en $20 \log |K|$ dB por encima de la abcisa.

2.1.5. Filtro pasa-bajas

Una aplicación básica de las gráficas de Bode es la representación del comportamiento de los filtros, el más básico de ellos es un circuito pasa bajas del tipo RC como el mostrado en la Figura 2.7.

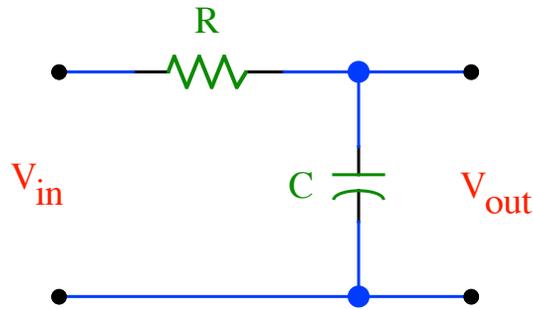


Figura 2.7: Diagrama de un Filtro Pasa Bajas del tipo RC .

$$V_{sal} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} V_{ent} \quad (2.21)$$

$$H(S) = \frac{V_{sal}(S)}{V_{ent}(S)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
 H(j\omega) &= \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\
 &= \frac{1}{j\omega RC + 1}
 \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}
|H(j\omega)| &= \left| \frac{1}{j\omega RC + 1} \right| & (2.24) \\
&= \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + (\omega RC)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{dB} &= 20 \log |H(j\omega)| & (2.25) \\
&= 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \right) \\
&= 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{1 + (\omega RC)^2} \\
&= -20 \log \sqrt{1 + (\omega RC)^2}
\end{aligned}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{0}{1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega RC}{1} \right) = -\tan^{-1} (\omega RC) \quad (2.26)$$

Para graficar la respuesta del filtro en magnitud con respecto a la frecuencia, en primer lugar se calculan los valores de la magnitud cuando la frecuencia tenga los siguientes valores:

- a) la frecuencia de corte
- b) un décimo de la frecuencia de corte
- c) diez veces la frecuencia de corte

Como primer punto es necesario conocer la frecuencia de corte, la cual ocurre cuando:

$$\omega_c RC = 1 \quad (2.27)$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (2.28)$$

cuando $\omega = \omega_c$

$$H(j\omega_c) = \frac{1}{1 + j\omega_c RC} = \frac{1}{1 + j} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned}
|H(j\omega_c)| &= -20 \log \sqrt{1 + 1} & (2.30) \\
&= -20 \log \sqrt{2} \\
&= -3\text{dB}
\end{aligned}$$

cuando $\omega = \omega_c/10$

$$H\left(j\frac{\omega_c}{10}\right) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega_c RC}{10}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{10}} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \left|H\left(j\frac{\omega_c}{10}\right)\right| &= -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} \\ &= -20 \log \sqrt{1 + 0.01} \\ &\approx -20 \log \sqrt{1} \\ &= 0\text{dB} \end{aligned} \quad (2.32)$$

cuando $\omega = 10\omega_c$

$$H(j10\omega_c) = \frac{1}{1 + j10\omega_c RC} = \frac{1}{1 + j10} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} |H(j10\omega_c)| &= -20 \log \sqrt{1 + 10^2} \\ &= -20 \log \sqrt{1 + 100} \\ &\approx -20 \log \sqrt{100} \\ &= -20\text{dB} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para graficar la respuesta del filtro en fase con respecto a la frecuencia seguimos un procedimiento semejante:

cuando $\omega = \omega_c$

$$\phi(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega RC) \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \phi(j\omega_c) &= -\tan^{-1}(\omega_c RC) \\ &= -\tan^{-1}(1) \\ &= -45^\circ \end{aligned} \quad (2.36)$$

cuando $\omega = \omega_c/10$

$$\begin{aligned} \phi\left(j\frac{\omega_c}{10}\right) &= -\tan^{-1}\left(\frac{\omega_c RC}{10}\right) \\ &= -\tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) \\ &\approx 0^\circ \end{aligned} \quad (2.37)$$

cuando $\omega = 10\omega_c$

$$\begin{aligned} \phi(j10\omega_c) &= -\tan^{-1}(10\omega_c RC) \\ &= -\tan^{-1}(10) \\ &\approx -90^\circ \end{aligned} \quad (2.38)$$

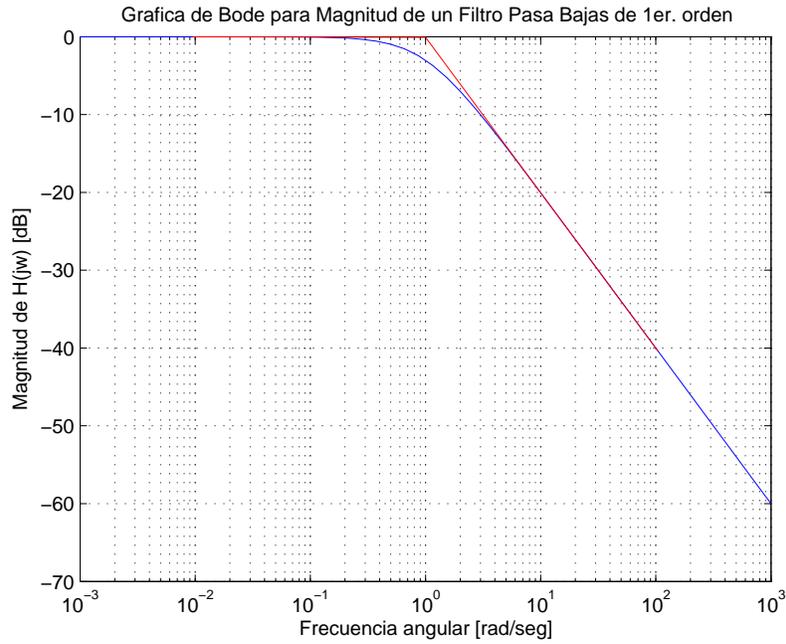


Figura 2.8: Gráfica de Magnitud del Filtro Pasa Bajas.

2.1.6. Filtro pasa-altas

$$V_{sal} = \frac{R}{R + \frac{1}{SC}} V_{ent} \quad (2.39)$$

$$H(S) = \frac{V_{sal}(S)}{V_{ent}(S)} = \frac{R}{R + \frac{1}{SC}} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}} \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega)| &= \left| \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega RC}} \right| \\ &= \frac{\sqrt{1^2}}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.42)$$

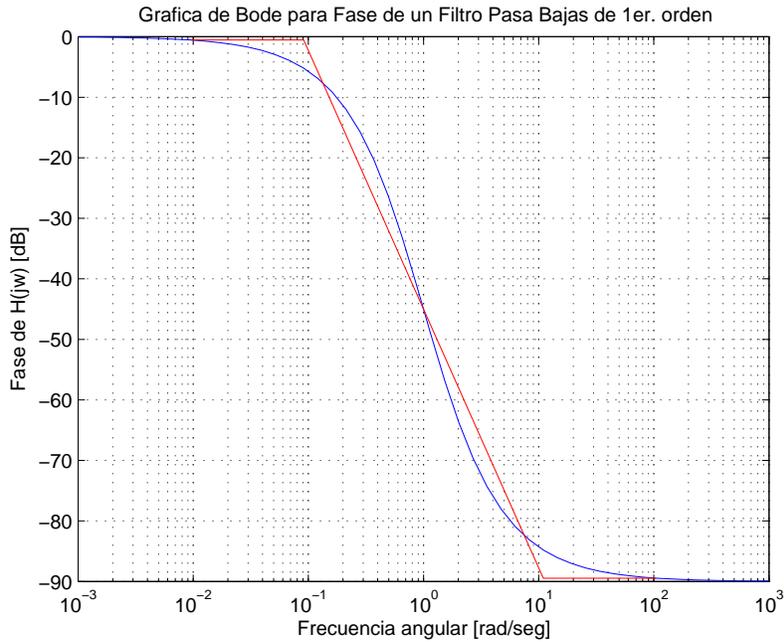


Figura 2.9: Gráfica de Fase del Filtro Pasa Bajas.

$$H_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| \quad (2.43)$$

$$= 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}} \right)$$

$$= 20 \log 1 - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}$$

$$= -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega RC}\right)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{0}{1} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{-1/(\omega RC)}{1} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1}{\omega RC} \right) \quad (2.44)$$

Para graficar la respuesta del filtro en magnitud con respecto a la frecuencia, en primer lugar se calculan los valores de la magnitud cuando la frecuencia tenga los siguientes valores:

- a) la frecuencia de corte
- b) un décimo de la frecuencia de corte
- c) diez veces la frecuencia de corte

Como primer punto es necesario conocer la frecuencia de corte, la cual ocurre cuando:

$$\frac{1}{\omega_c RC} = 1 \quad (2.45)$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad (2.46)$$

cuando $\omega = \omega_c$

$$H(j\omega_c) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega_c RC}} = \frac{1}{1 - j} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} |H(j\omega_c)| &= -20 \log \sqrt{1 + 1} \\ &= -20 \log \sqrt{2} \\ &= -3\text{dB} \end{aligned} \quad (2.48)$$

cuando $\omega = \omega_c/10$

$$H\left(j\frac{\omega_c}{10}\right) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega_c RC/10}} = \frac{1}{1 - j10} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} \left|H\left(j\frac{\omega_c}{10}\right)\right| &= -20 \log \sqrt{1 + (10)^2} \\ &= -20 \log \sqrt{1 + 100} \\ &\approx -20 \log \sqrt{100} \\ &= -20\text{dB} \end{aligned} \quad (2.50)$$

cuando $\omega = 10\omega_c$

$$H(j10\omega_c) = \frac{1}{1 - j\frac{1}{10\omega_c RC}} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{10}} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} |H(j10\omega_c)| &= -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} \\ &= -20 \log \sqrt{1 + 0.01} \\ &\approx -20 \log \sqrt{1} \\ &= 0\text{dB} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para graficar la respuesta del filtro en fase con respecto a la frecuencia seguimos un procedimiento semejante:

cuando $\omega = \omega_c$

$$\phi(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (2.53)$$

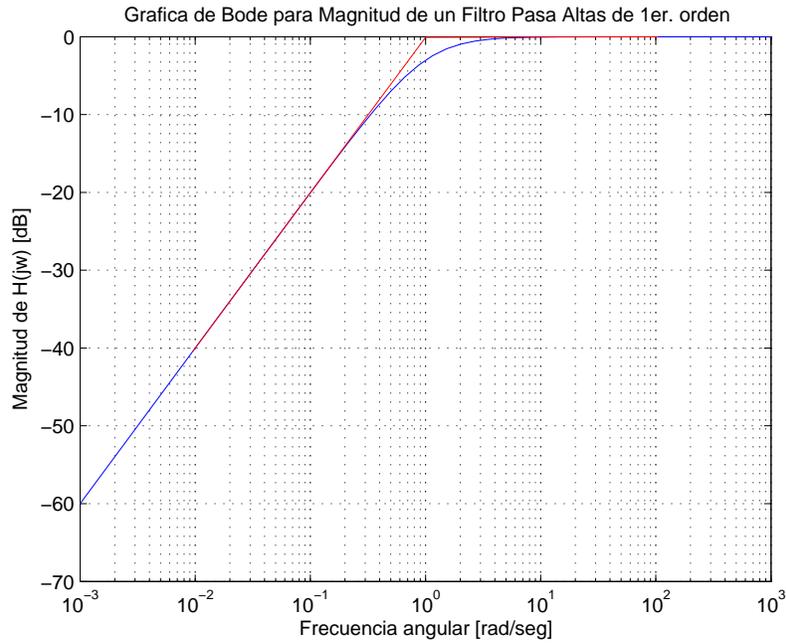


Figura 2.10: Gráfica de Magnitud del Filtro Pasa Altas.

$$\begin{aligned}
 \phi(j\omega_c) &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega_c RC}\right) \\
 &= \tan^{-1}(1) \\
 &= 45^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.54}$$

cuando $\omega = \omega_c/10$

$$\begin{aligned}
 \phi\left(j\frac{\omega_c}{10}\right) &= \tan^{-1}\left(\frac{10}{\omega_c RC}\right) \\
 &= \tan^{-1}(10) \\
 &\approx 90^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.55}$$

cuando $\omega = 10\omega_c$

$$\begin{aligned}
 \phi(j10\omega_c) &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{10\omega_c RC}\right) \\
 &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) \\
 &\approx 0^\circ
 \end{aligned}
 \tag{2.56}$$

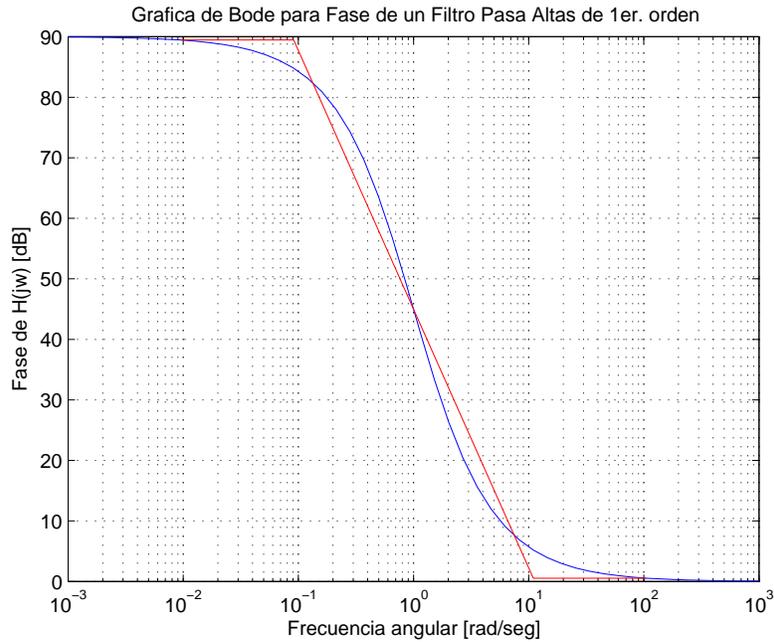


Figura 2.11: Gráfica de fase del Filtro Pasa Altas.

Para obtener las gráficas de Bode se necesita:

1. Obtener la función de transferencia $H(S)$ (polos y ceros).
2. Obtener la función en términos de la frecuencia $H(j\omega)$.
3. Expresiones para: Magnitud ($|H(j\omega)|$) y Ángulo ($\phi(j\omega)$).
4. Se encuentra la frecuencia de corte (ω_c).
5. Se tabulan los datos para $\omega_c/10$, ω_c y $10\omega_c$.
6. Se grafican las rectas.

Ejemplo 3 Trace las gráficas de magnitud y fase para la función de transferencia mostrada a continuación:

$$H(S) = \frac{(S - 100)(S + 10)}{(S - 1000)(S + 1)}$$

Nota: Si alguno de los términos empleados para calcular el ángulo contiene un signo negativo, entonces deberá tenerse en cuenta lo siguiente:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \begin{cases} \phi = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & (x > 0 \text{ y } y > 0) \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-y}{-x} \right) = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & (x < 0 \text{ y } y > 0) \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-y}{x} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & (x > 0 \text{ y } y < 0) \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{-y}{-x} \right) = 180^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) & (x < 0 \text{ y } y < 0) \end{cases} \quad (2.57)$$

Por facilidad se analizan por separado cada uno de los términos correspondientes a polos y ceros de la función, así, si tomamos en primer los ceros :

Primer cero:

$$H(S)_1 = (S - 100)$$

$$H(j\omega)_1 = (j\omega - 100)$$

$$|H(j\omega)_1| = \sqrt{\omega^2 + 100^2}$$

$$\phi(j\omega)_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{-100} \right)$$

ω	$ H(j\omega)_1 $	H_{dB_1}	ϕ_1
$\frac{\omega_c}{10} = 10$	$\sqrt{10^2 + 100^2}$ ≈ 100	$20 \log 100$ $= 40\text{dB}$	$\tan^{-1} \left(\frac{10}{-100} \right) = 180^\circ - \tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right)$ $\approx 180^\circ - 0^\circ = 180^\circ$
$\omega_c = 100$	$\sqrt{100^2 + 100^2}$ $= 100\sqrt{2}$	$20 \log 100\sqrt{2}$ $= 43\text{dB}$	$\tan^{-1} \left(\frac{100}{-100} \right) = 180^\circ - \tan^{-1} (1)$ $= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
$10\omega_c = 1000$	$\sqrt{1000^2 + 100^2}$ ≈ 1000	$20 \log 1000$ $= 60\text{dB}$	$\tan^{-1} \left(\frac{1000}{-100} \right) = 180^\circ - \tan^{-1} (10)$ $\approx 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Segundo cero:

$$H(S)_2 = (S + 10)$$

$$H(j\omega)_2 = (j\omega + 10)$$

$$|H(j\omega)_2| = \sqrt{\omega^2 + 10^2}$$

$$\phi(j\omega)_2 = \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{10} \right)$$

ω	$ H(j\omega)_2 $	H_{dB_2}	ϕ_2
$\frac{\omega_c}{10} = 1$	$\sqrt{1^2 + 10^2}$ ≈ 10	$20 \log 10$ $= 20\text{dB}$	$\tan^{-1} \left(\frac{1}{10} \right) \approx 0$
$\omega_c = 10$	$\sqrt{10^2 + 10^2}$ $= 10\sqrt{2}$	$20 \log 10\sqrt{2}$ $= 23\text{dB}$	$\tan^{-1} \left(\frac{10}{10} \right) = \tan^{-1} (1)$ $= 45^\circ$
$10\omega_c = 100$	$\sqrt{100^2 + 10^2}$ ≈ 100	$20 \log 100$ $= 40\text{dB}$	$\tan^{-1} \left(\frac{100}{10} \right) = \tan^{-1} (10)$ $\approx 90^\circ$

Ahora analizando la respuesta de los polos, tenemos:
Primer polo

$$H(S)_3 = \frac{1}{S - 1000}$$

$$H(j\omega)_3 = \frac{1}{j\omega - 1000}$$

$$|H(j\omega)_3| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1000^2}}$$

$$\phi(j\omega)_3 = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{-1000}\right)$$

ω	$ H(j\omega) _3$	H_{dB_3}	ϕ_3
$\frac{\omega_c}{10} = 100$	$\frac{1}{\sqrt{100^2 + 1000^2}}$ $\approx 1/1000$	$-20 \log 1000$ $= -60\text{dB}$	$-\tan^{-1}\left(\frac{100}{-1000}\right)$ $= -\left(180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)\right)$ $\approx -180^\circ + 0^\circ = -180^\circ$
$\omega_c = 1000$	$\frac{1}{\sqrt{1000^2 + 1000^2}}$ $= 1/(1000\sqrt{2})$	$-20 \log 1000\sqrt{2}$ $= -63\text{dB}$	$-\tan^{-1}\left(\frac{1000}{-1000}\right)$ $= -\left(180^\circ - \tan^{-1}(1)\right)$ $= -180^\circ + 45^\circ = -135^\circ$
$10\omega_c = 10000$	$\frac{1}{\sqrt{10000^2 + 1000^2}}$ $\approx 1/10000$	$-20 \log 10000$ $= -80\text{dB}$	$-\tan^{-1}\left(\frac{10000}{-1000}\right)$ $= -\left(180^\circ - \tan^{-1}(10)\right)$ $\approx -180^\circ + 90^\circ = -90^\circ$

Segundo polo

$$H(S)_4 = \frac{1}{S + 1}$$

$$H(j\omega)_4 = \frac{1}{j\omega + 1}$$

$$|H(j\omega)_4| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}}$$

$$\phi(j\omega)_4 = -\tan^{-1}(\omega)$$

ω	$ H(j\omega) _4$	H_{dB_4}	ϕ_4
$\frac{\omega_c}{10} = 0.1$	$\frac{1}{\sqrt{0.1^2 + 1^2}}$ $\approx 1/1$	$-20 \log 1$ $= 0\text{dB}$	$-\tan^{-1}(0.1)$ $\approx 0^\circ$
$\omega_c = 1$	$\frac{1}{\sqrt{1^2 + 1}}$ $= 1/\sqrt{2}$	$-20 \log \sqrt{2}$ $= -3\text{dB}$	$-\tan^{-1}(1)$ $= -45^\circ$
$10\omega_c = 10$	$\frac{1}{\sqrt{10^2 + 1}}$ $\approx 1/10$	$-20 \log 10$ $= -20\text{dB}$	$-\tan^{-1}(10)$ $\approx -90^\circ$

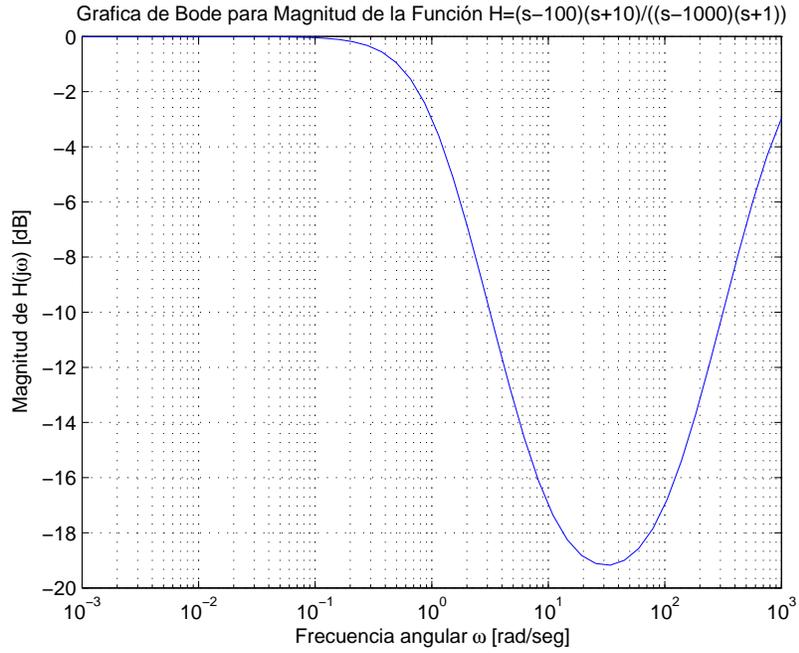


Figura 2.12: Gráfica de la respuesta total en magnitud de la función de transferencia $H(j\omega)$.

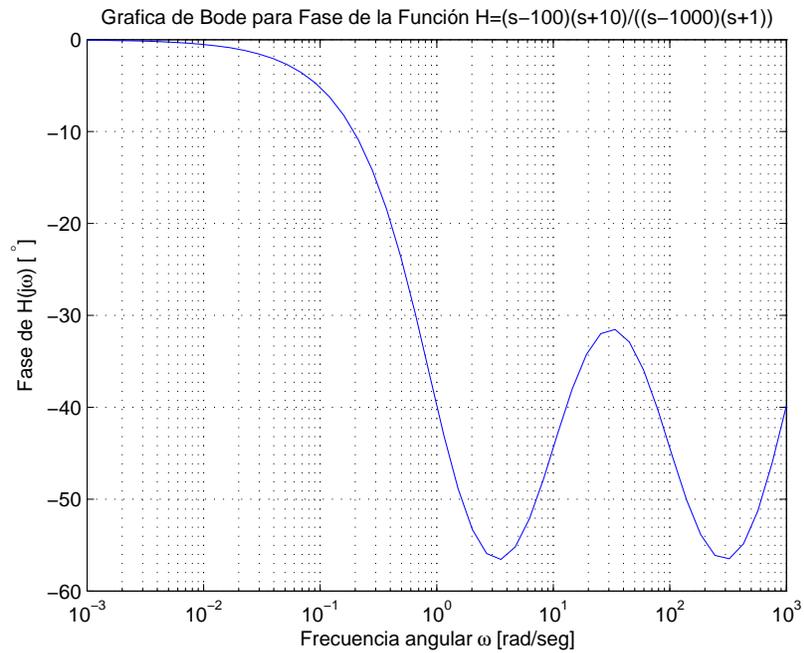


Figura 2.13: Gráfica de la respuesta total en fase de la función de transferencia $H(j\omega)$.

2.2. Equivalencia de redes en paralelo y en serie para una frecuencia específica.

Considerando las redes en serie y en paralelo mostradas a continuación:

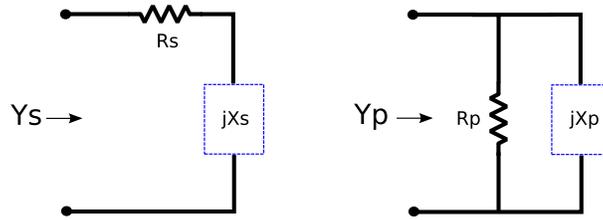


Figura 2.14: Redes Serie y Paralelo.

$$Y_s = \frac{1}{z_s} = \frac{1}{R_s + jX_s} \quad (2.58)$$

$$Y_p = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{jX_p} \quad (2.59)$$

La Q (Factor de calidad) de la red en serie es $|X_s|/R_s$, mientras que la de la red en paralelo es $R_p/|X_p|$.

Para lograr la equivalencia de las redes a una frecuencia específica de igualan los valores de las admittancias.

$$Y_s = \frac{1}{R_s + jX_s} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2} = Y_p = \frac{1}{R_p} - j \frac{1}{X_p} \quad (2.60)$$

de donde se obtiene:

$$R_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{R_s} \quad (2.61)$$

$$X_p = \frac{R_s^2 + X_s^2}{X_s} \quad (2.62)$$

Dividiendo R_p/X_p

$$\frac{R_p}{X_p} = \frac{X_s}{R_s} \quad (2.63)$$

Es decir:

$$Q_p = Q_s = Q \quad (2.64)$$

y entonces:

$$R_p = R_s + \frac{X_s^2}{R_s} = R_s (1 + Q^2) \quad (2.65)$$

$$(2.66)$$

Si $Q \geq 5$

$$R_p \doteq Q^2 R_s \quad (2.67)$$

$$X_p \doteq X_s \quad (C_p \doteq C_s \text{ ó } L_p \doteq L_s) \quad (2.68)$$

Ejemplo 4 Para un circuito en serie que tiene una $R = 5 \Omega$ y una $L = 100 \text{ mH}$, calcule su equivalente en paralelo para una $\omega = 1000 \text{ rad/seg}$.

$$\begin{aligned} X_s &= X_L = \omega L \\ &= (1000 \text{ rad/seg})(100 \times 10^{-3} \text{ H}) = 100 \Omega \end{aligned}$$

$$Q = \frac{|X_s|}{R_s} = \frac{100 \Omega}{5 \Omega} = 20$$

Puesto que se tiene un valor de Q más alto que 5

$$\begin{aligned} X_p &= X_s = 100 \Omega \\ L_p &= L_s = 100 \text{ mH} \\ R_p &= Q^2 R_s = (20)^2 5 \Omega = 2000 \Omega \end{aligned}$$

2.3. Escalamiento.

Se pueden definir dos tipos de escala o escalamiento:

- a) Escalamiento en magnitud
- b) Escalamiento en frecuencia.

El cambio de escala en magnitud se define como el proceso por medio del cual la impedancia de una red de dos terminales aumenta por un factor de K_m permaneciendo constante la frecuencia. K_m es real y positivo, y puede ser mayor o menor a la unidad (1).

Por ejemplo, si decimos que una red sufre un cambio de escala en magnitud por un factor de 2, significa que la nueva red tendrá el doble de impedancia de la red original a cualquier frecuencia.

Por lo anterior, las relaciones de cambio de escala en magnitud serán como se muestra a continuación:

Cambio de $R \rightarrow K_m R$. El escalamiento de la reactancia es un escalamiento en la magnitud de la resistencia imaginaria $L \rightarrow K_m L$, $C \rightarrow C/K_m$.

$$\left. \begin{aligned} R &\rightarrow K_m R \\ L &\rightarrow K_m L \\ C &\rightarrow \frac{C}{K_m} \end{aligned} \right\} \text{Cambio de escala en Magnitud} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned}
Z &= R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \\
K_m Z &= K_m [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \\
&= RK_m + jK_m \omega L - jK_m \frac{1}{\omega C} \\
&= RK_m + jK_m \omega L - j \frac{1}{\omega C / K_m}
\end{aligned}$$

El cambio de escala en frecuencia se define como el proceso por medio del cual la frecuencia a la que ocurre cualquier impedancia aumenta por un factor K_f .

Si decimos que la red sufre un cambio de escala en frecuencia por un factor de 2 significa que ahora se obtendrá la misma impedancia a una frecuencia cuyo valor se ha duplicado y por lo tanto se cumple esta expresión:

$$\left. \begin{aligned}
R &\rightarrow R \\
L &\rightarrow \frac{L}{K_f} \\
C &\rightarrow \frac{C}{K_f}
\end{aligned} \right\} \text{Cambio de escala en Frecuencia} \quad (2.70)$$

Ejemplo 5 Si se realiza simultáneamente un cambio de escala en magnitud $K_m = 2000$ y uno en frecuencia $K_f = 5000$, a un circuito RLC cuyos componentes tienen los siguientes valores: $R=2.5\Omega$, $L=1/2$ H y $C=2$ F. Encuentre los valores de los elementos después del escalamiento.

$$\left. \begin{aligned}
R &= K_m R = (2000)(2.5\Omega) = 5K\Omega \\
L &= K_m L = (1/2H)(2000) = 1000H \\
C &= \frac{C}{K_m} = \frac{2F}{2000} = 10^{-3}F
\end{aligned} \right\} \text{Escalamiento en Magnitud}$$

$$\left. \begin{aligned}
R &= R = 5K\Omega \\
L &= \frac{L}{K_f} = \frac{1000H}{5000} = 200mH \\
C &= \frac{C}{K_f} = \frac{10^{-3}F}{5000} = 0.2\mu F
\end{aligned} \right\} \text{Escalamiento en Frecuencia}$$

A una impedancia dada en función de S y no en función de los elementos (R, L, C) también se le puede aplicar el escalamiento en magnitud haciendo simplemente una multiplicación por

$$K_m \cdot Z'(S) = K_m Z(S) \quad (2.71)$$

y el escalamiento en frecuencia por medio de la siguiente expresión:

$$Z''(S) = Z' \left(\frac{S}{K_f} \right) \quad (2.72)$$

Para el caso de fuentes dependientes de corriente y voltaje del tipo $K_x V_x$ ó $K_y I_y$, el escalamiento en magnitud se realiza si K_x ó K_y tienen unidades de impedancia o admitancia multiplicando por K_m en el primer caso y dividiendo entre K_m en el segundo caso. El cambio de escala en frecuencia no afecta a las fuentes dependientes.

$$\begin{array}{ll} R \rightarrow K_m R & G \rightarrow \frac{G}{K_m} \\ L \rightarrow K_m L & B_L \rightarrow \frac{B_L}{K_m} \\ C \rightarrow \frac{C}{K_m} & B_C \rightarrow K_m B_C \\ Z \rightarrow K_m Z & \frac{1}{Y} \rightarrow K_m \frac{1}{Y} \end{array}$$

Capítulo 3

Resonancia

3.1. Introducción.

En forma general el fenómeno de resonancia es la condición que existe en todo sistema físico cuando una excitación senoidal de amplitud constante produce una respuesta de amplitud máxima.

El sistema resonante puede ser eléctrico, mecánico, hidráulico, acústico, etc. pero aquí se restringirá la atención a sistemas eléctricos con inductores y capacitores.

3.2. Resonancia.

En una red eléctrica de dos terminales que contengan por lo menos un inductor y un capacitor, la resonancia se define como la condición que existe cuando la impedancia de entrada de la red es puramente resistiva. Así, una red está en resonancia (o resonante) cuando el voltaje y la corriente de las terminales de entrada de la red se encuentran en fase.

De lo anterior, la red produce una respuesta de amplitud máxima cuando se encuentra en la condición resonante, o casi en la condición resonante.

3.3. Resonancia en paralelo.

Considerando el circuito RLC paralelo mostrado en la figura 3.1:

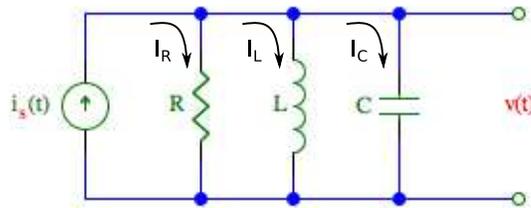


Figura 3.1: Circuito RLC paralelo.

la admitancia presentada a la fuente ideal de corriente es

$$Y = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (3.1)$$

por lo que, según la definición de resonancia, ésta ocurre cuando

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 \quad (3.2)$$

De la ecuación anterior notamos que la condición de resonancia puede obtenerse ajustando ω , L o C . Tomando como variable a ω :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{ó} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (3.3)$$

donde ω_0 es la frecuencia resonante.

$$Y(s) = \frac{1}{R} + \frac{1}{Ls} + Cs \quad (3.4)$$

ó

$$Y(s) = C \frac{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}{s} \quad (3.5)$$

ó

$$Y(s) = C \frac{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)}{s} \quad (3.6)$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (3.7)$$

y

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (3.8)$$

α : coeficiente de amortiguamiento exponencial
 ω_d : frecuencia resonante natural } (relacionados con la respuesta natural del circuito *RLC* en paralelo).

El patrón de polos y ceros de la admitancia de entrada se muestra en la figura 3.2

De la figura 3.2 notamos que puede obtenerse la frecuencia resonante por medio de métodos gráficos a partir de la configuración de polos y ceros, simplemente trazamos un arco con centro en el origen del plano S y a través de uno de los ceros. La intersección de este arco con el eje $j\omega_0$ positivo localiza al punto $S = j\omega_0$. Nótese como ω_0 es ligeramente mayor que ω_d , pero su cociente tiende a uno conforme la razón de ω_d a α aumente.

La magnitud de la respuesta del voltaje $V(s)$ conforme varía la frecuencia de excitación se obtiene al multiplicar la impedancia de entrada con la fuente de corriente a la que supondremos de tipo senoidal y de amplitud constante, por lo que:

$$V(s) = Z(s) I(s) = \frac{I(s)}{C} \frac{s}{(s + \alpha - j\omega_d)(s + \alpha + j\omega_d)} \quad (3.9)$$

La gráfica de la respuesta en frecuencia del voltaje de salida $V(j\omega)$ se muestra en la figura 3.3, dicha gráfica se obtiene a partir de la representación de Fourier del voltaje, que se expresa como:

$$V(j\omega) = Z(j\omega) I(j\omega) = \frac{I(j\omega)}{C} \frac{j\omega}{(j\omega + \alpha - j\omega_d)(j\omega + \alpha + j\omega_d)}$$

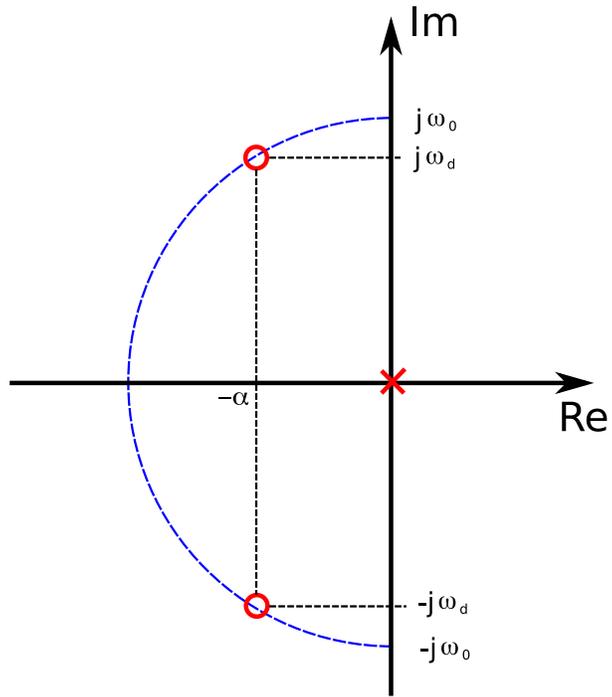


Figura 3.2: Gráfica de polos y ceros en el plano complejo de la función de admitancia $Y(s)$ de un Circuito Resonante RLC en paralelo.

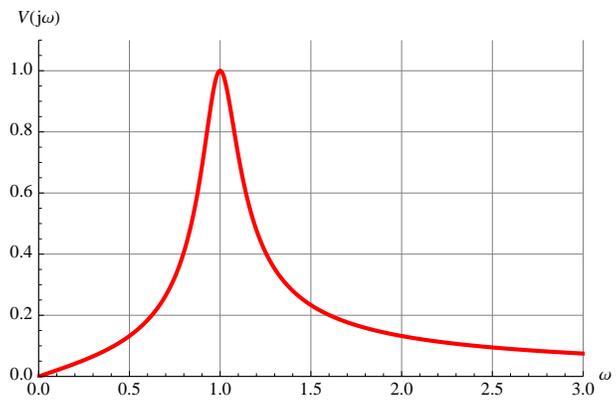


Figura 3.3: Respuesta en frecuencia de un Circuito Resonante RLC en paralelo.

Se observa que el máximo de la respuesta se obtiene en ω_0 y que su valor vale $|I| R$ implicando que el valor máximo de la impedancia del circuito vale R y ocurre a la frecuencia de resonancia ω_0 .

Entonces, a la frecuencia resultante, el voltaje entre las terminales del circuito en paralelo es IR y toda la corriente de la fuente I circula a través del resistor. Sin embargo, también hay corriente en L y C dadas por:

$$I_{L,0} = \frac{IR}{j\omega_0 L} \quad (3.10)$$

$$I_{C,0} = j\omega_0 C R I \quad (3.11)$$

y como, bajo la condición de resonancia $\frac{1}{\omega_0 C} = \omega_0 L$ entonces

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 C R I \quad (3.12)$$

e

$$I_{C,0} + I_{L,0} = I_{LC} = 0 \quad (3.13)$$

Mientras que la altura de la curva depende únicamente de R , la anchura de la curva o ancho de banda, delimitada por ω_1 y ω_2 , depende de los otros dos elementos, como se verá más adelante.

3.4. Factor de calidad Q .

La esbeltez de la curva de la respuesta de cualquier circuito resonante está determinada por la máxima cantidad de energía que puede almacenarse en el circuito comparada con la energía que se pierde durante un periodo completo de la respuesta. Q se define como:

$$Q = \text{factor de calidad} = 2\pi \frac{\text{máxima energía almacenada}}{\text{energía total perdida por periodo}} \quad (3.14)$$

Como los elementos que almacenan son el inductor y el capacitor y los que disipan es el resistor se tiene:

$$Q = 2\pi \frac{[W_L(t) + W_C(t)]}{P_R T} \quad (3.15)$$

donde T es el periodo de la frecuencia senoidal a la que se evalúa Q .

Para el circuito RLC en paralelo se calculará el valor de Q para la frecuencia resonante.

Sea $i(t) = I_m \cos \omega_0 t$ la corriente de excitación, entonces el voltaje en resonancia será:

$$v(t) = R i(t) = R I_m \cos \omega_0 t \quad (3.16)$$

La energía instantánea almacenada en el capacitor es:

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \cos^2 \omega_0 t \quad (3.17)$$

y en el inductor es

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{1}{L} \int_0^t u dt \right)^2 \quad (3.18)$$

por lo cual

$$W_L(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \sin^2 \omega_0 t \quad (3.19)$$

entonces

$$W(t) = W_L(t) + W_C(t) = \frac{I_m^2 R^2 C}{2} \quad (3.20)$$

Por otra parte, la potencia promedio absorbida por el resistor es $PR = \frac{1}{2} I_m^2 R$ y en un periodo: $P_{RT} = \frac{1}{2f_0} I_m^2 R$ Por lo que el factor de calidad en resonancia para una red RLC en paralelo es:

$$Q_0 = 2\pi \frac{I_m^2 R^2 \frac{C}{2}}{I_m^2 R \frac{1}{2f_0}} = 2\pi f_0 RC = \omega_0 RC \quad (3.21)$$

ó

$$Q_0 = R \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{X_{C0}} = \frac{R}{X_{L0}} \text{ (constante adimensional)} \quad (3.22)$$

Al introducirse el factor Q en las ecuaciones de corriente del capacitor y del inductor

$$I_{C,0} = -I_{L,0} = j\omega_0 CRI = jQ_0 I \quad (3.23)$$

Notamos que que la corriente en magnitud se amplifica Q_0 veces y que las corrientes estan 180° fuera de fase por lo que el circuito resonante en paralelo actúa como amplificador de corriente (pero no de potencia por ser una red pasiva).

3.4.1. Relación entre los parámetros de respuesta natural y el factor Q .

La resonancia, por definición, esta asociada fundamentalmente con la respuesta forzada ya que está definida en términos de una impedancia de entrada puramente resistiva, un concepto de estado senoidal permanente. Los dos parámetros más importantes de un circuito resonante son la frecuencia de resonancia ω_0 y el factor de calidad Q_0 . Tanto el coeficiente de amortiguamiento exponencial como la frecuencia resonante natural pueden expresarse en términos de ω_0 y Q_0 como:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(Q_0/\omega_0 C)C} = \frac{\omega_0}{2Q_0} \quad (3.24)$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \quad (3.25)$$

El factor característico del numerador de $Y(s)$ para la red RLC en paralelo puede escribirse como $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$ o $s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$ (ζ factor de amortiguamiento relativo).

Al comparar las expresiones se obtiene que

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} = \frac{1}{2Q_0} \quad (3.26)$$

Figura 3.4: Localización de los polos y ceros de la admitancia $Y(s)$.

Figura 3.5: Polos y ceros de la admitancia $Y(s)$.

3.4.2. Interpretación de Q_0 en términos de la localización de los polos y ceros de la admitancia $Y(s)$ del circuito RLC en paralelo.

Supóngase L , C y ω_0 constantes y varíese R . Entonces si R aumenta Q_0 aumenta y si $R \rightarrow \infty$ Q_0 también y $\omega_d = \omega_0$ y $\alpha = 0 \Rightarrow$ los ceros se localizan en $S = \pm j\omega_0$. Si R disminuye Q_0 disminuye y cuando R valga $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$ o sea $Q_0 = \frac{1}{2}$, se tiene un doble cero en $S = -\omega_0$. Valores menores de R representan valores de Q_0 tan poco comunes que no se les prestará atención. Finalmente cuando $Q_0 = 5$ los ceros se localizarán en $S = -0.1\omega_0 \pm j0.9950\omega_0$ por lo que la diferencia entre ω_d y ω_0 es menor que el 1%.

$$Z = \frac{(R + j\omega L)\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R + j\omega L}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} \quad (3.27)$$

$$Z = \frac{(R + j\omega L)[(1 - \omega^2 LC) - j\omega RC]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \quad (3.28)$$

$$Z = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + \omega^2 LRC + j[\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C]}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} \quad (3.29)$$

$$j[\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C] = \phi \quad (3.30)$$

$$\omega L - \omega^3 L^2 C - \omega R^2 C = \phi \quad (3.31)$$

$$\omega(L - R^2 C - \omega^2 L^2 C) = \phi \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{L - R^2 C}{L^2 C} \quad (3.32)$$

Ejemplo 6 (Ejemplo 14.2 del libro Hyatt) $R=6K\Omega$, $C=0.1mF$, $L=0.1 H$

- a) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1000$
- b) $Q_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 6$
- c) $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} = 9965.22$
- d) $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} =$
- e) $\zeta = \frac{1}{2Q_0} =$

Ejemplo 7 (Ejemplo 14.3 del libro Hyatt) $Q_0 = 40$, $f_0 = 440Hz$, $Y(f\omega_0) = 500\mu S$ red resonante RLC paralelo,

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 500 \times 10^{-6} = C \frac{S + 2d + \omega_0^2}{S}$$

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0} = \frac{1}{2RC},$$

$$R = 2K\Omega$$

$$C = 6.23m\mu F$$

$$L = 18.09mH$$

3.5. Frecuencias de mitad de potencia y ancho de banda de un circuito resonante.

A las frecuencias ω_1 y ω_2 se les denominan frecuencias de mitad de potencia dado que el voltaje cuyo valor es 0.707 veces el voltaje resonante es equivalente a un voltaje al cuadrado cuyo valor es la mitad del voltaje al cuadrado en resonancia. Por lo tanto a dichas frecuencias el resistor absorbe la mitad de potencia que absorbería en resonancia. A ω_1 se le conoce como frecuencia inferior de la mitad de potencia y ω_2 se le conoce como frecuencia superior de la mitad de potencia.

El ancho de banda (de la mitad de potencia) se define como la diferencia de las frecuencias de la mitad de potencia

$$B = \omega_2 - \omega_1 \quad (3.33)$$

Para poder expresar a B en terminos de Q_0 y ω_0 considere la ecuación de admitancia del circuito RLC en paralelo

$$Y = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \quad (3.34)$$

en términos de Q_0 :

$$Y = \frac{1}{R} + j \frac{1}{R} \left(\frac{\omega \omega_0 C R}{\omega_0} - \frac{\omega_0 R}{\omega \omega_0 L} \right) \quad (3.35)$$

o

$$Y = \frac{1}{R} \left[1 + j Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right] \text{ [en resonancia } Y = \frac{1}{R} \text{]} \quad (3.36)$$

Para obtener una magnitud de $Z = \frac{R}{\sqrt{2}}$ es necesario que $Y = \sqrt{2} \frac{1}{R}$ en ω_1 y ω_2 y esto se lograra haciendo:

$$Q_0 \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = 1 \text{ y } Q_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -1 \quad (3.37)$$

despejando:

$$\omega_2 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} - \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (3.38)$$

$$\omega_1 = \omega_0 \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^2} + \frac{1}{2Q_0} \right] \quad (3.39)$$

el tomar la diferencia:

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (3.40)$$

al multiplicar ω_1 por ω_2 se obtiene

$$\omega_0^2 = \omega_1 \omega_2 \quad (3.41)$$

Figura 3.6: Polos y ceros del circuito *RLC*.

Figura 3.7: Vector $S - S_2$.

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad (3.42)$$

o sea que ω_0 es la media geométrica de las frecuencias de mitad de potencia.

Entre mas alta sea la Q , la banda es mas angosta, es decir, se tiene una mayor selectividad de frecuencia.

3.5.1. Aproximaciones de $Y(s)$ para Q alta.

De manera arbitraria se establecerá que un circuito con un valor alto de Q es aquel para el cual Q_0 es mayor que o igual a 5.

En la figura 3.6 se muestra el patron de polos y ceros de $Y(s)$ para un circuito *RCL* en paralelo cuya Q_0 es de 5.

Como $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q_0}$ entonces $\alpha = \frac{1}{2}B$ y puede hacerse una aproximación de los ceros a:

$$S_{2,4} = -\alpha \pm j\omega_d \doteq -\frac{1}{2}B \pm j\omega_0 \quad (3.43)$$

y ω_1 y ω_2 :

$$\omega_{1,2} \doteq \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q_0} \right) \quad (3.44)$$

o

$$\omega_{1,2} \doteq \omega_0 \pm \frac{1}{2}B \begin{cases} \omega_1 \text{ y } \omega_2 \text{ estan a la mitad} \\ \text{de un ancho de banda de la} \\ \text{frecuencia de resonancia} \end{cases}$$

Obtengamos ahora la magnitud de la admitancia para frecuencia cercana a la de resonancia. Para ello se constituye los tres valores desde las frecuencias críticas hasta el punto de prueba. Como el punto esta cercano a $j\omega_0$ entonces el vector desde el polo vale $j\omega_0$ aproximadamente y el que viene desde el cero inferior valdra $j2\omega_0$ aproximadamente.

Entonces la admitancia esta dada por

$$Y(s) \doteq C \frac{(j2\omega_0)(S - S_2)}{j\omega} \doteq 2c(S - S_2) \quad (3.45)$$

C es la constante multiplicada como se ve en $Y(s) = C \frac{S^2 + \frac{S}{RC} + \frac{1}{LC}}$

Observe la siguiente figura:

de la figura3.7 el vector $S - S_2$ viene siendo aproximadamente:

$$S - S_2 \doteq \frac{1}{2}B + j(\omega - \omega_0) \quad (3.46)$$

la expresión sería exacta si se reemplaza ω_0 por ω_d .

Sustituyendo esta expresión en la anterior y factorizando $\frac{1}{2}B$:

$$Y(s) = 2C \left(\frac{1}{2}B \right) \left(1 + j \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \right) \quad (3.47)$$

o

$$Y(s) \doteq \frac{1}{R} \left(1 + j \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \right) \quad (3.48)$$

la fracción $\frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$ puede interpretarse como "el número de semianchos de banda fuera de la resonancia" y abreviarse por N, así:

$$Y(s) \doteq \frac{1}{R} (1 + jN) \quad (3.49)$$

donde

$N = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B}$ número de semianchos de bandas fuera de la resonancia.

De lo anterior, para ω_2 $N = 1$ y para ω_1 $N = -1$.

La aproximación de $|Y(j\omega)|$ viene siendo muy sencilla:

$$|Y(j\omega)| \doteq \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} \quad (3.50)$$

y el ángulo

$$\text{ang}Y(j\omega) \doteq \tan^{-1} N \quad (3.51)$$

Estas aproximaciones son válidas para frecuencias que no dirieren de la frecuencia resonante en mas de un décimo de la frecuencia de resonancia

$$0.9\omega_0 \leq \omega \leq 1.1\omega_0 \quad Q_0 \geq 5 \quad (3.52)$$

Con ésto se comete un error en magnitud o en fase menor que el 5%.

Ejemplo 8 (Ejemplo 14.4 del libro Hyatt)

$$\begin{aligned} f_0 &= 600Hz \\ f_1 &= \\ f_2 &= \\ f_{1aprox} &= \\ f_{2aprox} &= \\ Q_0 &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 9 (Ejemplo 14.5 del libro Hyatt) RCL paralelo $R = 1000\Omega$, $C = 50\mu F$, $L = 80mH$, Q alto Z entrada?

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &\doteq \frac{1}{R} \sqrt{1 + N^2} & N &= \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \\ Z(j\omega) &= \frac{1}{Y(j\omega)} & \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ & & B &= \frac{\omega_0}{Q_0} & Q_0 &= \omega RC \end{aligned}$$

Ejemplo 10 (Ejemplo 14.6 del libro Hyatt) Obtener los valores exactos del ejemplo 14-5

Figura 3.8: Resonancia en Serie.

3.6. Resonancia en Serie

Considere el circuito RLC en serie mostrado en la siguiente figura

[La frecuencia de resonancia ω_{0s} , es la frecuencia a la cual la parte imaginaria de la impedancia de entrada se hace cero, o el ángulo de la impedancia se hace cero; entonces:]

$$\omega_{0,s} = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (3.53)$$

[Q_{0s} se define como 2π que multiplicar al cociente de la máxima energía almacenada en el circuito, entre la energía perdida durante cada periodo del circuito] es decir:

$$Q_{0s} = \omega_0 \frac{L_s}{R_s} \quad (3.54)$$

ω_1 y ω_2 son la frecuencia a las cuales la respuesta de corriente es igual al 70.7% de la respuesta máxima. Las expresiones exactas y aproximadas (para valores altos de Q_{0s}) para estas dos frecuencias son:

$$\omega_{1S,2S} = \omega_{0s} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2Q_{0s}}\right)^2} \mp \frac{1}{2Q_{0s}} \right] \doteq \omega_{0s} \mp \frac{1}{2}B \quad (3.55)$$

donde B_s , ancho de banda de mitad de potencia, esta dado por

$$B_s = \omega_{2S} - \omega_{1S} = \frac{\omega_{0s}}{Q_{0s}} \quad (3.56)$$

También, para Q_s altos, la expresión aproximada de la impedancia de entrada es:

$$Z_s \doteq R_s(1 + jN_s) = R_s \sqrt{1 + N_s^2} \angle \tan^{-1} N_s \quad (3.57)$$

donde

$$N_s = \frac{\omega - \omega_0}{\frac{1}{2}B} \quad (3.58)$$

La ecuación anterior es válida para frecuencias que no difieren de la frecuencia resonante en más de un décimo de la frecuencia resonante.

Este circuito produce una baja impedancia en resonancia mientras que el circuito resonante paralelo produce una alta impedancia, además produce voltajes en el capacitor y en el inductor dos veces mayor que el de la fuente [amplificador voltaje en resonancia].

Ejemplo 11 (*Ejemplo 14.7 del libro Hyatt*)

$$C = 1\mu F \quad R = 16\Omega \quad B = 500\text{rad/s}$$

a) ω_0 ?

$$B = 2\alpha = \frac{2R}{2L} \implies L = \frac{R}{B} = \frac{16}{500}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

b) Q_0 ?

$$B = \frac{\omega_0}{Q_0} \implies Q_0 = \frac{\omega_0}{B}$$

c) $\omega_1 \doteq \omega_0 - \frac{1}{2}B =$

Capítulo 4

Redes Generales de dos Puertos o Bipuertos

Una red cualquiera que tenga dos pares de terminales, uno de ellos denominado "terminales de entrada" y el otro "terminales de salida", es un elemento muy importante en sistemas electrónicos, sistemas de comunicación, sistemas de control automático, sistemas de distribución y de transmisión, u otros sistemas en los que una señal eléctrica o la energía eléctrica entra por las terminales de entrada, sufre la acción de la red y la abandona por las terminales de salida. El par de terminales de salida puede estar conectado con las terminales de entrada de alguna otra red. Un par de terminales por las que entra o sale una señal de la red recibe el nombre de puerto, y una red que solo tenga un par de dichas terminales recibe el nombre de red de un puerto. No pueden hacerse conexiones a ningún otro nodo interno a la red de un puerto, por lo cual es evidente que en la figura 4.1, i_a debe ser igual a i_b . Cuando ésta presente mas de un par de terminales la red recibe el nombre de red de varios puertos. En la figura 4.2 se muestra la red de dos puertos a la cual esta dedicada principalmente este capítulo. Las corrientes en los dos alambres integran cada puerto deben ser iguales, por consiguiente $i_a = i_b$ e $i_c = i_d$ en la red de dos puertos mostrada en la figura 4.2. Las fuentes y las cargas deben conectarse directamente entre las dos terminales del puerto si se van a usar los métodos de este capítulo, en otras palabras, cada puerto puede conectarse solo a una red de un puerto o a un puerto de una red de varios puertos.

Los métodos especiales de análisis que se desarrollan para las redes de dos puertos, o simplemente bipuertos hacen resaltar las relaciones de voltaje y corriente en las terminales de las redes y eliminan la naturaleza específica de las corrientes y voltajes dentro de las redes.

4.1. Red de un puerto

Parte del estudio introductorio de las redes de uno y dos puertos se efectúa mejor utilizando una notación de redes generalizadas y la nomenclatura abreviada para los determinantes. En consecuencia, si se escribe un sistema de ecuaciones de lazos para una red pasiva.

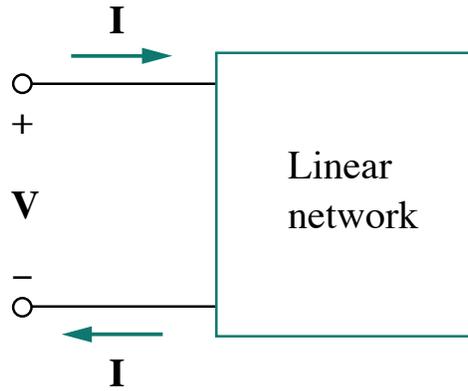


Figura 4.1: Red de un puerto.

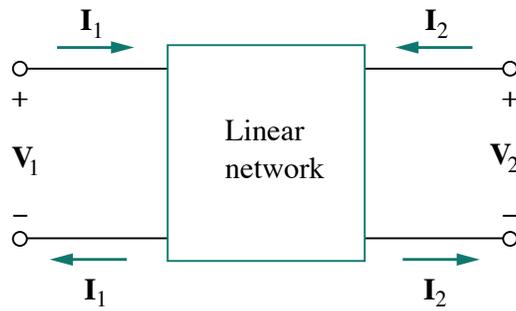


Figura 4.2: Red de dos puertos.

$$\begin{aligned}
 Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \cdots + Z_{1N}I_N &= V_1 \\
 Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \cdots + Z_{2N}I_N &= V_2 \\
 Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 + \cdots + Z_{3N}I_N &= V_3 \\
 \vdots & \\
 Z_{N1}I_1 + Z_{N2}I_2 + Z_{N3}I_3 + \cdots + Z_{NN}I_N &= V_N
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Donde se ha supuesto que se tienen N lazos, las corrientes aparecen en el orden de los subíndices en cada ecuación, y el orden de las ecuaciones es el mismo de las corrientes. También se supone que la LVK se aplica de forma que el signo de cada término Z_{ij} sea positivo; el signo de cualquier $Z_{ij} (i \neq j)$ o el término mutuo puede ser positivo o negativo.

Si hay fuentes dependientes dentro de la red, entonces no todos los coeficientes en las ecuaciones de lazos tienen que ser resistencias o impedancias.

Supóngase que la red de un puerto que se muestra en la figura 4.3a tiene solo un elemento pasivo

y fuentes dependientes; también se supone aplicable la linealidad. Una fuente ideal de voltaje V_1 esta conectada al puerto, y la corriente de la fuente se identifica como la corriente en el lazo 1. Entonces por el proceso ya conocido,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} & Z_{13} & Z_{1N} \\ 0 & Z_{22} & Z_{23} & Z_{2N} \\ 0 & Z_{32} & Z_{33} & Z_{3N} \\ 0 & Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{NN} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{2N} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{3N} \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & Z_{NN} \end{vmatrix}} \quad (4.2)$$

o de manera mas breve,

$$I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta Z} \quad (4.3)$$

por lo tanto,

$$Z_{ent} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{\Delta Z}{\Delta_{11}} \quad (4.4)$$

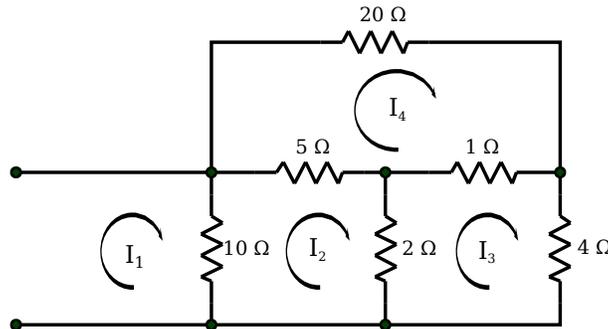


Figura 4.3: Red resistiva de un puerto.

Ejemplo 12 : Calcule la impedancia de entrada para la red resistiva de un puerto que se muestra en la figura 4.3. Solución: Primero se asignan las 4 corrientes de malla como se muestra y después se escribe el determinante del circuito por inspección:

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & 26 \end{vmatrix}$$

Su valor es $9680 \Omega^4$. Al eliminar el primer renglón y la primera columna se tiene:

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ -5 & -1 & 26 \end{vmatrix} = 2778 \Omega^3$$

Así la ec.4.4 proporciona el valor de la impedancia de entrada. $Z_{ent} = \frac{9680}{2778} = 3.48 \Omega$.

Ejemplo 13 Encuentre la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 4.3. Solución: Las 4 ecuaciones de malla se escriben en términos de las 4 corrientes asignadas:

$$\begin{aligned} 10I_1 - 10I_2 &= V_1 \\ -10I_1 + 17I_2 - 2I_3 - 5I_4 &= 0 \\ -2I_2 + 7I_3 - I_4 &= 0 \\ -0.5I_3 + 1.5I_4 &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\Delta Z = \begin{vmatrix} 10 & -10 & 0 & 0 \\ -10 & 17 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 590 \Omega^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -5 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{vmatrix} = 159 \Omega^2$$

lo que da:

$$Z_{ent} = \frac{590}{159} = 3.71 \Omega$$

También puede optarse por un procedimiento similar que se usa con ecuaciones de nodo y que da la admitancia de entrada:

$$Y_{ent} = \frac{1}{Z_{ent}} = \frac{\Delta Y}{\Delta_{11}} \quad (4.5)$$

En donde Δ_{11} ahora se refiere al menor de ΔY

Ejemplo 14 use la ecuación 4.5 para determinar otra vez la impedancia de entrada de la red que se muestra en la figura 4.4. Solución para este ejemplo se ordenan los voltajes en los nodos V_1, V_2, V_3 de izquierda a derecha, se elige la referencia en el nodo inferior, y se escribe en la matriz se admitancias del sistema por inspección:

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} 0.35 & -0.2 & -0.05 \\ -0.2 & 1.7 & -1 \\ -0.05 & -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 0.347 S^3$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1.7 & 1 \\ -1 & 1.3 \end{vmatrix} = 1.21 S^2$$

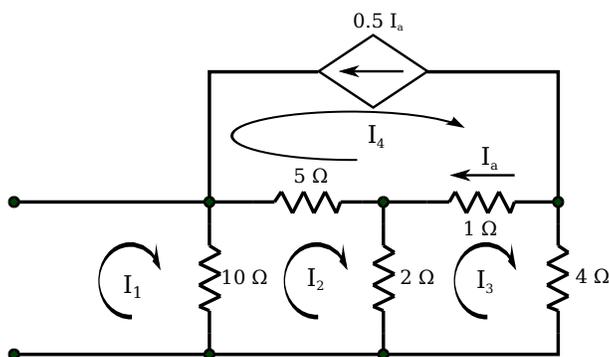


Figura 4.4: Red resistiva de un puerto que incluye una fuente dependiente.

de forma que:

$$Y_{ent} = \frac{0.347}{1.21} = 0.287 \text{ S}$$

lo que corresponde a:

$$Z_{ent} = \frac{1}{0.287} = 3.48 \Omega$$

4.2. Teorema de la reciprocidad:

Cualquier dispositivo para el cual $Z_{ij} = Z_{ji}$ recibe el nombre de *elemento bilateral*, y un circuito que contiene solo elementos bilaterales se llama *circuito bilateral*. Por lo tanto una propiedad importante de una red bilateral de dos puertos es:

$$y_{12} = y_{21}$$

y se le distingue llamándole *teorema de reciprocidad*:

En cualquier red bilateral lineal pasiva, si la única fuente de voltaje V_x en la rama x produce las respuestas de corriente I_y en la rama y , entonces al quitar la fuente de voltaje de la rama x y colocarla en la rama y producirá la respuesta de la corriente I_y en la rama x .

4.2.1. Teorema de reciprocidad en su forma dual:

En cualquier red bilateral lineal pasiva si la única fuente de corriente I_x entre los nodos x y x' produce las respuestas de voltaje V_x entre los nodos y y y' entonces al quitar la fuente de corriente de los nodos x y x' y colocarla en los nodos y y y' producirá la respuesta de la corriente V_y entre los nodos x y x' .

Figura 4.5: Parámetros de Admitancia.

Figura 4.6: Ejemplo.

4.3. Parámetros de admitancia Y

En todo lo que sigue se supondrá que la red esta compuesta de elementos lineales y no contiene fuentes independientes; las fuentes dependientes si están permitidas en algunos casos especiales se impondrán condiciones adicionales a la red.

Se considerara la red de 2 puertos en la figura 4.5; el voltaje y la corriente en las terminales de entrada son V_1 e I_1 y V_2 e I_2 y están definidas en el puerto de salida. I_1 e I_2 se eligen entrando a la red por los conductores superiores y saliendo en los conductores inferiores. Como la red es lineal y no contiene fuentes independientes dentro de ella, puede considerarse que I_1 es la superposición de dos componentes, una de ellas causadas por V_1 y la otra por V_2 . Cuando se aplica el mismo argumento a I_2 puede emplearse el sistema de ecuaciones.

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \quad (4.6)$$

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \quad (4.7)$$

Donde las Y no son mas que constantes de proporcionalidad, sus dimensiones deben ser A/V o siemens. Reciben el nombre de parámetros Y y están definidos por las ecuaciones 4.6 y 4.7, se pueden expresar de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Cada uno de los parámetros Y pueden escribirse como una razón de corriente-voltaje ya sea $V_1 = 0$ (las terminales de entrada en corto circuito), o bien $V_2 = 0$ (las terminales de salida en corto circuito):

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} & Y_{12} &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \\ Y_{21} &= \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} & Y_{22} &= \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Debido a que cada parámetro es una admitancia que se obtiene poniendo un corto circuito en el puerto de entrada o salida, los parámetros Y reciben el nombre de parámetros de admitancia de corto circuito.

- Y_{11} = admitancia de entrada de corto circuito
- Y_{12} = admitancia de transferencia de corto circuito
- Y_{22} = admitancia de salida de corto circuito
- Y_{21} = admitancia de transferencia de corto circuito

Ejemplo 15 Encuentre los parámetros de admitancia de corto circuito para la red de 2 puertos de la figura 4.6a.

Solución: Los valores de los parámetros pueden obtenerse aplicando la ecuación 4.9. Para determinar Y_{11} , la salida se conecta en corto circuito y se calcula a razón de I_1 a V_1 . Esto puede

Figura 4.7: Parámetros de impedancia.

lograrse haciendo $V_1 = 1V$, ya que entonces $Y_{11} = I_1$. Por inspección es evidente que $1V$ aplicado a la entrada, con la salida en corto circuito, causara un corriente de entrada de $(\frac{1}{5} + \frac{1}{10}) = 0.3A$. En consecuencia, $Y_{11} = 0.3\mathcal{U}$.

Para obtener Y_{12} , las terminales de entrada se ponen en corto circuito y se aplica $1V$ a las terminales de salida. La corriente de entrada circula a través del corto circuito y vale $I_1 = -\frac{1}{10}A$. Así que $Y_{12} = -0.1\mathcal{U}$.

Usando métodos similares: $Y_{21} = -0.1\mathcal{U}$ $Y_{22} = 0.15\mathcal{U}$

Por lo tanto las ecuaciones que describen esta red de 2 puertos esta determinada por los parámetros de admitancia son

$$\begin{aligned} I_1 &= 0.3V_1 - 0.1V_2 \\ I_2 &= -0.1V_1 + 0.15V_2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 \\ -0.1 & 0.15 \end{bmatrix} \quad (\text{Todos en } \mathcal{U}) \quad (4.11)$$

Cualquier dispositivo para el cual $Z_{ij} = Z_{ji}$ recibe el nombre de elemento bilateral, y un circuito que contiene solo elementos bilaterales se llama circuito bilateral.

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (4.12)$$

4.4. Parámetros de impedancia

De nuevo se comienza con la red de dos puertos lineal general que no contiene ninguna fuente independiente. Las corrientes y los voltajes se definen en la figura 4.7.

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (4.13)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (4.14)$$

$$[V] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} [I] \quad (4.15)$$

Los parámetros Z se conocen como parámetros de impedancia de circuito abierto y se obtienen igualando a cero cada una de las corrientes de las ecuaciones 4.13 y 4.14:

$$Z_{11} = \frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad (4.16)$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} \quad Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$

Transformación de parámetros de impedancia a parámetros de admitancia.

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} \\ V_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} \\ V_2 & Z_{22} \end{vmatrix}}{\Delta Z} \quad (4.17)$$

Figura 4.8: Construcción del equivalente Thevenin general de la red de 2 puertos.

De la ecuacion 4.17 se obtiene en forma matricial:

$$I_1 = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} V_1 + \left(-\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \right) V_2 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta Z} V_1 + \left(-\frac{\Delta_{21}}{\Delta Z} \right) V_2 \quad (4.18)$$

e

$$I_2 = \left(-\frac{Z_{21}}{\Delta Z} \right) V_1 + \frac{Z_{11}}{\Delta Z} V_2 = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta Z} V_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta Z} V_2 \quad (4.19)$$

es decir:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta Z} = \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & Y_{12} &= -\frac{\Delta_{21}}{\Delta Z} = -\frac{Z_{12}}{\Delta Z} \\ Y_{21} &= -\frac{\Delta_{12}}{\Delta Z} = -\frac{Z_{21}}{\Delta Z} & Y_{22} &= \frac{\Delta_{22}}{\Delta Z} = \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Primero necesita suponerse a una configuración específica del circuito de entrada, y se seleccionará una fuente de voltaje V_s (signo positivo en la parte superior) en serie con una impedancia Z_g , así, $V_S = V_1 + I_1 Z_g$.

al combinar este resultado con las ecuaciones 4.13 y 4.14 puede eliminarse V_1 e I_1 , y se obtiene:

$$V_2 = \frac{Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} V_s + \left[Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} \right] I_2 \quad (4.21)$$

$$Z_{sal} = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_{11} + Z_g} \quad (4.22)$$

Si la impedancia del generador $Z_g = 0$ se obtiene una expresión mas sencilla:

$$Z_{sal} = \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{\Delta Z}{Z_{11}} = \frac{1}{Y_{22}} \quad (4.23)$$

4.5. Parámetros híbridos

Los parámetros híbridos se definen escribiendo el par de ecuaciones que relacionan a V_1 , I_1 , V_2 , e I_2 como si V_1 e I_2 fuesen las variables dependientes:

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2 \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

La naturaleza de los parametros se comprenden haciendo primero $V_2 = 0$

$h_{11} = \frac{V_1}{I_1} |_{V_2=0}$: impedancia de entrada de corto circuito

$h_{21} = \frac{I_2}{I_1} |_{V_2=0}$: ganancia de corriente directa de corto circuito

Haciendo $I_1 = 0$

$h_{12} = \frac{V_1}{V_2} |_{I_1=0}$: ganancia de voltaje inverso de circuito abierto

$h_{22} = \frac{I_2}{V_2} |_{I_1=0}$: admitancia de salida de circuito abierto

Figura 4.9: Parámetros de transmisión.

Como los parámetros representan una impedancia, una admitancia, una ganancia de voltaje y una de corriente, es comprensible que reciban el nombre de parámetros híbridos.

Estos parámetros se emplean principalmente en el análisis de transistores y normalmente se le asignan los siguientes subíndices: *i* (*input*) entrada *f* (*forward*) directa *r* (*reverse*) inverso o (*output*) salida.

4.6. Parámetros de transmisión

$$\begin{aligned} V_1 &= t_{11}V_2 - t_{12}I_2 \\ I_1 &= t_{21}V_2 - t_{22}I_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Los signos menos que aparecen en las ecuaciones deben asociarse con la corriente de salida ($-I_2$). En consecuencia, tanto I_1 como $-I_2$ están dirigidos hacia la derecha, es decir hacia la dirección de la energía o transmisión de la señal.

4.7. Redes equivalentes

La red de 3 terminales mostrada en la figura 4.10 recibe el nombre de Δ de impedancias, mientras que la red de la figura 4.11 se llama Y.

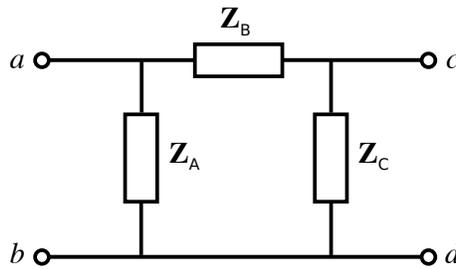


Figura 4.10: Red de dos puertos en configuración π o Δ .

$$Z_A = \frac{(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)}{Z_2} \quad (4.28)$$

$$Z_B = \frac{(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)}{Z_3} \quad (4.29)$$

$$Z_C = \frac{(Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1)}{Z_1} \quad (4.30)$$

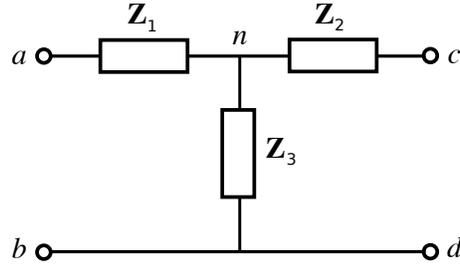


Figura 4.11: Red de dos puertos en configuración T o Y .

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (4.31)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (4.32)$$

$$Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (4.33)$$

Una red puede sustituirse por la otra si se satisfacen ciertas relaciones específicas entre las impedancias, y estas interrelaciones pueden establecerse mediante el uso de los parámetros Y y se tiene que:

$$Y_{11} = \frac{1}{Z_A} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_1 + (Z_2 Z_3)/(Z_2 + Z_3)} \quad (4.34)$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{Z_B} = -\frac{Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \quad (4.35)$$

$$Y_{22} = \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_B} = \frac{1}{Z_2 + (Z_1 Z_3)/(Z_1 + Z_3)} \quad (4.36)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para Z_A , Z_B , Z_C en términos de Z_1 , Z_2 , Z_3 :

$$Z_A = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2} \quad (4.37)$$

$$Z_B = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_3} \quad (4.38)$$

$$Z_C = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_1} \quad (4.39)$$

O para las relaciones inversas:

$$Z_1 = \frac{Z_A Z_B}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (4.40)$$

$$Z_2 = \frac{Z_B Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (4.41)$$

$$Z_3 = \frac{Z_A Z_C}{Z_A + Z_B + Z_C} \quad (4.42)$$

Estas transformaciones con frecuencia son útiles al simplificar redes pasivas, y evitar la necesidad de efectuar análisis de mallas o nodos.

Ejemplo 16 Encuentre la resistencia de entrada del circuito de la figura 15-11a

Solución: primero se hace la transformación Δ -Y. La suma de las 3 resistencias que forman esta Δ es $1 + 4 + 3 = 8 \Omega$. El producto de los 2 resistores conectados al nodo superior es $1 * 4 = 4 \Omega^2$. De este modo, el resistor de la Y es $4/8 \Omega$. si se repite este procedimiento para los otros 2 resistores se obtiene la red que se muestra en la figura b.

La ganancia de voltaje se define como:

$$G_V = \frac{V_2}{V_1}$$

La ganancia de corriente se define como:

$$G_I = \frac{I_2}{I_1}$$

La ganancia de potencia se define como:

$$G_P = \frac{P_{sal}}{P_{ent}} = \frac{Re(-\frac{1}{2}V_2 I_2^*)}{Re(\frac{1}{2}V_1 I_1^*)} = 45$$

Ejemplo 17 Para un transistor en configuración emisor común representado por sus parámetros $[Z]$, el cual esta excitado por una fuente senoidal ideal V_s en serie con un resistor de 500Ω . Encuentre: G_V , G_I , G_P , Z_{ent} , Z_{sal} .

$$[Z] = \begin{bmatrix} 10^3 & 10 \\ -10^6 & 10^4 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = 10^3 I_1 + 10 I_2 \quad (4.43)$$

$$V_2 = -10^6 I_1 + 10^4 I_2 \quad (4.44)$$

$$V_s = 500 I_1 + V_1 \quad (4.45)$$

$$V_2 = -10^4 I_2 \quad (4.46)$$

sustituyendo 4.43 en 4.45

$$V_s = 1500 I_1 + 10 I_2 \quad (4.47)$$

sustituyendo 4.46 en 4.44

$$0 = -10^6 I_1 + 2 * 10^4 I_2 \quad (4.48)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$I_1 = \frac{2 * 10^4}{4 * 10^7} V_s = \frac{1}{2 * 10^3} V_s \quad (4.49)$$

$$I_2 = \frac{1}{40} V_s \quad (4.50)$$

$$G_I = \frac{\frac{1}{40} V_s}{\frac{1}{2000} V_s} = 50 \quad (4.51)$$

$$V_1 = 10^3 \frac{1}{2000} V_s + 10 \frac{1}{40} V_s = 0.75 V_s \quad (4.52)$$

$$V_2 = -10^6 \frac{1}{2000} V_s + 10^4 \frac{1}{40} V_s = -250 V_s \quad (4.53)$$

$$G_V = \frac{-250 V_s}{0.75 V_s} = -333.333 \quad (4.54)$$

$$G_p = \frac{Re[-\frac{1}{2} V_2 I_2^*]}{Re[\frac{1}{2} V_1 I_1^*]} = \frac{Re[-\frac{1}{2} (-250 V_s) (\frac{1}{40} V_s)]}{Re[\frac{1}{2} (0.75 V_s) (\frac{1}{2000} V_s)]} = 16670 \quad (4.55)$$

$$Z_{ent} = \frac{0.75 V_s}{0.0005 V_s} = 1500 \Omega \quad (4.56)$$

$$Z_{sal} = 10^4 - \frac{(-10^6)(10)}{10^3 + 500} = 16.66666 K\Omega \quad (4.57)$$

4.8. Conexiones en paralelo de redes de 2 puertos

Cada bipuerto tiene un nodo de referencia a sus puertos de entrada y salida, y si los bipuertos están conectados en paralelo de modo que tengan un nodo de referencia común, entonces para la red A:

$$[I_A] = [Y_A] [V_A] \quad (4.58)$$

$$I_A = I_{A_1} + I_{A_2} \quad (4.59)$$

$$V_A = V_{A_1} = V_{A_2} \quad (4.60)$$

Para la red B:

$$[I_B] = [Y_B] [V_B] \quad (4.61)$$

pero

$$V_A = V_B = V \quad (4.62)$$

e

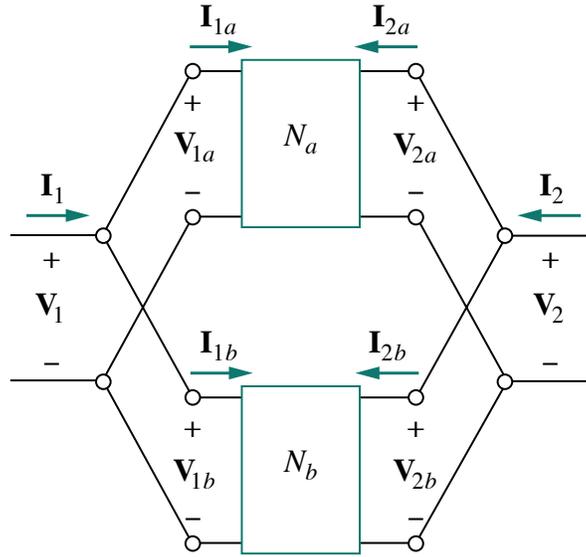


Figura 4.12: Conexión en paralelo de redes de 2 puertos.

$$I = I_A + I_B \quad (4.63)$$

así que:

$$[I] = ([Y_A] + [Y_B])[V] \quad (4.64)$$

4.9. Conexión en serie de redes de 2 puertos

Si cada una de las redes de 2 puertos tiene un nodo de referencia para su entrada y salida, y si estas referencias están conectadas entre si, entonces I_1 circula a través de los puertos de entrada de las 2 redes en serie, esto es valido también para I_2 (Ver Figura 4.13).

$$\begin{aligned} [V_A] &= [Z_A][I_A] \\ [V_B] &= [Z_B][I_B] \\ [I] &= [I_B] = [I_A] \\ [V] &= [V_A] + [V_B] = ([Z_A] + [Z_B])[I] \\ [Z_T] &= [Z_A] + [Z_B] \end{aligned}$$

4.10. Red de 2 puertos en cascada

Los voltajes y las corrientes terminales se indican para cada uno de los bipuertos y las relaciones correspondientes de los parámetros t son, Para la red A:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [t_A] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [t_A] \begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

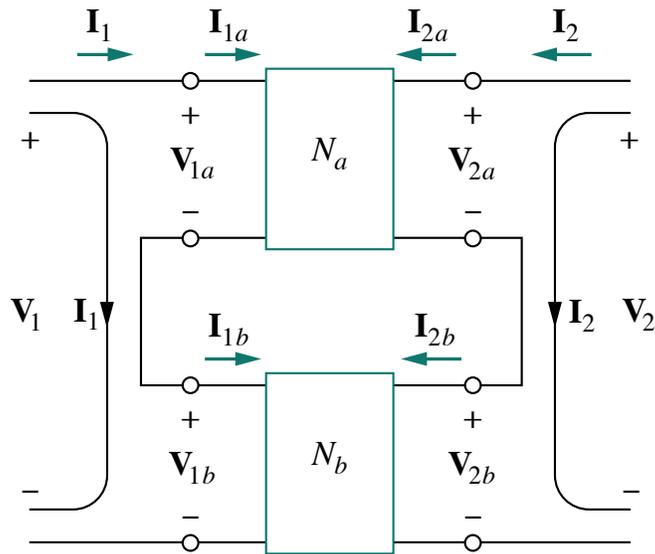


Figura 4.13: Conexión en serie de redes de 2 puertos.

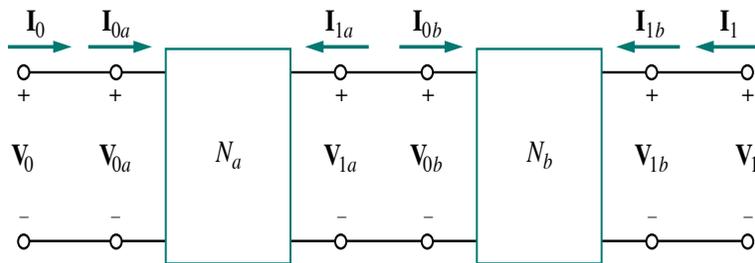


Figura 4.14: Conexión en cascada de redes de 2 puertos.

Para la red B:

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = [t_B] \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Combinando A y B, se tiene:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [t_A][t_B] \begin{bmatrix} V_4 \\ -I_4 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Por lo tanto, los parámetros t para las redes en cascada (Figura 4.14) se calculan mediante el producto matricial:

$$[t] = [t_A][t_B] \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} t_{11} &= \frac{V_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} & t_{12} &= \frac{V_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \\ t_{21} &= \frac{I_1}{V_2} \Big|_{I_2=0} & t_{22} &= \frac{I_1}{-I_2} \Big|_{V_2=0} \end{aligned} \tag{4.69}$$

Capítulo 5

Circuitos Polifásicos.

5.1. Potencia instantanea.

La potencia instantanea en estado senoidal permanente debida a un voltaje senoidal general $v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$ y la corriente $i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$ asociados con el dispositivo en cuestión es:

$$\begin{aligned} p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi) \\ &= V_m I_m \left[\frac{1}{2} \cos(2\omega t + \theta + \phi) + \frac{1}{2} \cos(\theta - \phi) \right] \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Partiendo de la ecuación 5.1, encontramos que la potencia promedio es:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ó en términos de sus valores eficaces:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \sqrt{2} V_{ef} \sqrt{2} I_{ef} \cos(\theta - \phi) \\ &= V_{ef} I_{ef} \cos(\theta - \phi) \end{aligned} \quad (5.3)$$

al producto $V_{ef} I_{ef}$ se le conoce con el nombre de potencia aparente y esta dada en términos de VA (volts-amperes). Dado que $\cos(\theta - \phi)$ no puede tener una magnitud mayor a 1, la magnitud de la potencia real nunca puede ser mayor que la potencia aparente.

La razón de la potencia promedio o real a la potencia aparente recibe el nombre de factor de potencia FP .

entonces:

$$FP = \frac{\text{Potencia promedio}}{\text{Potencia aparente}} = \frac{P}{V_{ef} I_{ef}} \quad (5.4)$$

Por lo que para el caso senoidal:

$$FP = \cos(\theta - \phi) \quad (5.5)$$

En donde $\theta - \phi$ es el ángulo que el voltaje adelanta a la corriente.

En una carga puramente resistiva, el voltaje y la corriente están en fase y $FP = 1$ es decir la potencia real es igual a la potencia aparente, aunque si se eligen valores adecuados de inductancias y capacitancias a una frecuencia de operación específica, es posible obtener una impedancia de entrada con un ángulo de fase igual a cero.

Las cargas puramente reactivas producen un $FP = 0$ pues la diferencia de fase entre el voltaje y la corriente es de $\pm 90^\circ$ (-90° para cargas inductivas y $+90^\circ$ para cargas capacitivas).

Por definición el FP se define en función de la fase de la corriente con respecto al voltaje. Así una carga inductiva tendrá un FP atrasado y una carga capacitiva un FP adelantado.

Ejemplo 18 Para el circuito de la figura 5.1, encuentre la potencia promedio entregada por una de las cargas, la potencia aparente suministrada por la fuente y el factor de potencia de las cargas combinadas.

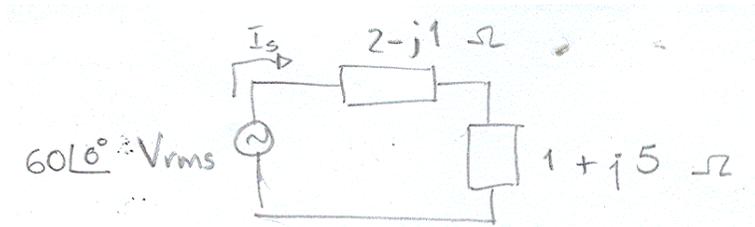


Figura 5.1: Circuito para el ejemplo.

$$I_s = \frac{60\angle 0^\circ}{2 - j1 + 1 + j5} = \frac{60\angle 0^\circ}{3 + j4} = \frac{60\angle 0^\circ}{5\angle 53.1^\circ} = 12\angle -53.1^\circ A_{rms}$$

$$P_{\text{aparente de la fuente}} = 60(12) = 720VA$$

$$P_{\text{promedio de la fuente}} = 720 \cos(0 + 53.1^\circ) = 432W$$

La carga superior recibe una potencia promedio de

$$12^2(2) = 288W$$

y la carga de la derecha:

$$12^2(1) = 144W$$

La suma de las potencias promedio da:

$$288W + 144W = 432W$$

Entonces la fuente proporciona 432W de los cuales 288W se disipan en $2 - j1\Omega$ y 144W en $1 + j5\Omega$.

Finalmente

$$FP = \frac{P}{V_{ef}I_{ef}} = \frac{432}{60(12)} = 0.6$$

ó del coseno de la diferencia de ángulos entre la corriente y el voltaje:

$$\cos [0^\circ - (-53.1^\circ)] = \cos(53.1^\circ) = 0.6$$

5.2. Potencia Compleja.

La potencia compleja esta definida por :

$$S = V_{ef}I_{ef}^* = V_{ef}I_{ef} e^{j(\theta-\phi)} = P + jQ \quad (5.6)$$

de la ecuación 5.6 observamos que la magnitud de la potencia compleja es igual a la potencia aparente y el ángulo de la potencia compleja es igual al ángulo del factor de potencia. Se observa también que la potencia promedio o real es igual al término P y por lo tanto el término Q se le conoce como potencia reactiva y se cuantifica en VAR (volts-ampere reactivos). Por lo tanto:

$$P = V_{ef}I_{ef} \cos(\theta - \phi) \quad (5.7)$$

$$Q = V_{ef}I_{ef} \sin(\theta - \phi) \quad (5.8)$$

Ejemplo 19 Para el circuito mostrado en la figura 5.3. Calcule:

a) $P_L, |S|_L$

b) $P_{línea}, |S|_{Pérdidas de la línea}$

c) $|S|_{fuente}$

d) FP

a)

$$I_s = \frac{230\angle 0^\circ}{1 + 1 + 11 + j4} = \frac{230\angle 0^\circ}{13 + j4} = \frac{230\angle 0^\circ}{13.6\angle 17.1^\circ} = 16.91\angle -17.1^\circ$$

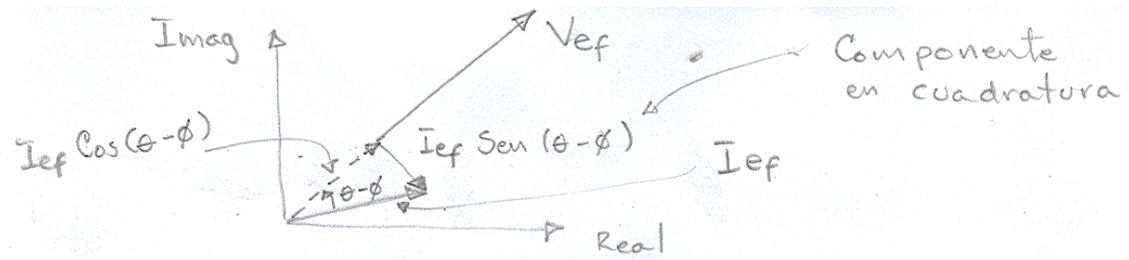


Figura 5.2: Diagrama vectorial de la potencia compleja.

Por el signo $-$ se deduce que la carga es inductiva.

$$P_L = (16.91)^2 (11) = 3145W$$

$$\begin{aligned} V_L &= (11 + j4\Omega) (16.91 \angle -17.1^\circ) \\ &= (11.7 \angle 19.98^\circ) (16.91 \angle -17.1^\circ) \\ &= 197.84 \angle 2.88^\circ \end{aligned}$$

$$|S|_L = (16.91) (197.84) = 3345VA$$

$$P_{línea} = (16.91)^2 (2) = 571.9W$$

$$|S|_{línea} = P_{línea} = 571.9VA \quad (\text{puesto que es puramente resistiva})$$

Calcule:

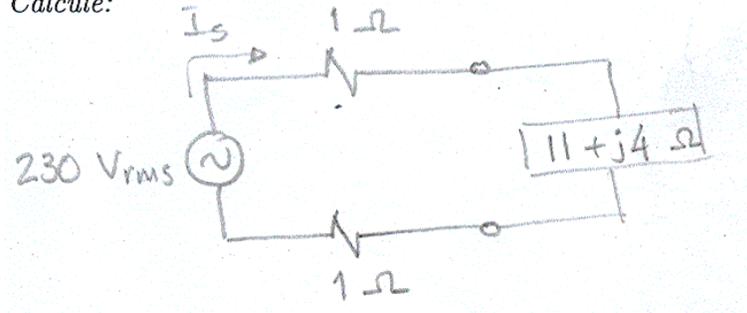


Figura 5.3: Circuito del ejemplo.

$$|S|_{fuente} = 230 (16.91) = 3889.3VA$$

En este caso la potencia real es igual a la potencia aparente debido a que la carga es puramente resistiva (ó real)

$$FP = \cos(\theta - \phi) = \cos[0^\circ - (-17.1^\circ)] = \cos(17.1^\circ) = 0.95$$

5.3. Sistemas Polifásicos.

Para designar corrientes y voltajes polifasicos es conveniente utilizar una notación de doble subíndice por definición V_{ab} es el voltaje de el punto a al punto b independientemente de la trayectoria elegida para unir estos dos puntos tomando como ejemplo la figura 5.4.

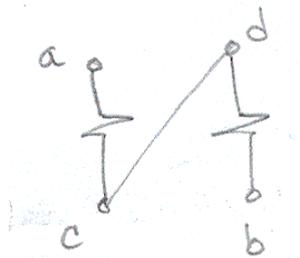


Figura 5.4: Diagrama de trayectorias entre los puntos a y b .

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= V_{ac} + V_{cd} + V_{db} \\
 &= V_{ad} + V_{db} \\
 &= V_{ax} + V_{xb}
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

donde x es cualquier punto.

Partiendo de lo anterior podemos representar un sistema trifásico de voltajes de la siguiente manera (figura 5.5):

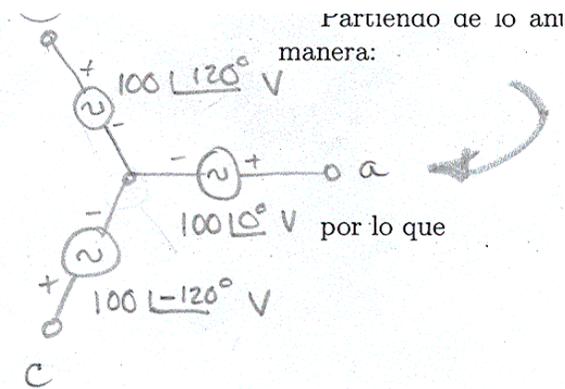


Figura 5.5: Sistema trifásico de voltajes.

$$\begin{aligned}
 V_{an} &= 100\angle 0^\circ V_{rms} \\
 V_{bn} &= 100\angle -120^\circ \\
 V_{cn} &= 100\angle -240^\circ
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

por lo que

$$V_{ab} = V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn}
 \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= 100\angle 0^\circ - 100\angle -120^\circ \\
 &= 100 - (-50 - j86.6) \\
 &= 173.2\angle 30^\circ
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

La ecuación 5.12 esta representada en la figura 5.6.

De manera semejante es posible emplear la notación de doble subíndice a las corrientes así la corriente I_{ab} se define como la corriente que circula de a hacia b a través de la trayectoria directa, generalmente esta trayectoria pasa por un solo elemento los subíndices indican el sentido de las corrientes sin embargo se emplean flechas que indican la dirección cuando pudiera existir confusión (ver Figura 5.7).

Ejemplo 20 Si $V_{13} = 20\angle 30^\circ = 17.32 + j10$, $V_{24} = 15\angle -100^\circ = -2.6 - j14.77$, $V_{14} = 30\angle 80^\circ = 5.2 + j29.5$ calcular V_{12} , V_{23} y V_{34} .

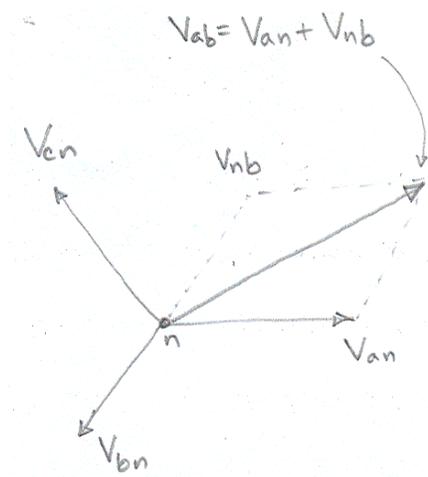


Figura 5.6: Diagrama fasorial de voltajes.

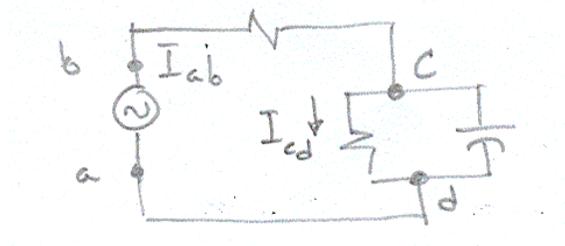


Figura 5.7: Ejemplo de trayectorias confusas.

$$\begin{aligned}
 V_{12} &= V_{14} + V_{42} = V_{14} - V_{24} \\
 &= 30\angle 80^\circ - 15\angle -100^\circ \\
 &= (5.2 + j29.5) - (-2.6 - j14.7) \\
 &= 7.81 + j44.3 = 45\angle 80^\circ
 \end{aligned}$$

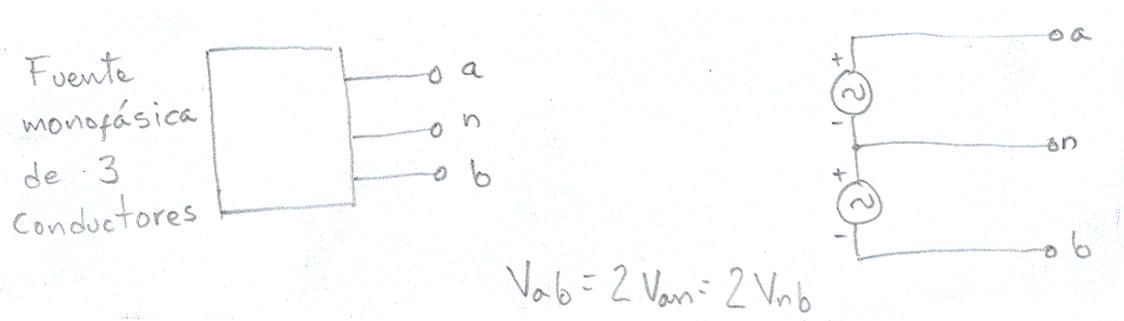


Figura 5.9: Fuente monofásica de tres conductores.

$$V_{ab} = 2V_{an} = 2V_{nb} \quad (5.13)$$

Los voltajes V_{an} y V_{nb} tienen el mismo ángulo de fase, de ahí el nombre monofásico, sin embargo el voltaje de los alambres exteriores y el alambre central ó neutro están desfasados 180° . Es decir:

$$V_{an} = -V_{bn} \quad (5.14)$$

y

$$V_{an} + V_{bn} = 0 \quad (5.15)$$

Si se colocan cargas idénticas Z_p entre cada conductor exterior y el conductor central (como se muestra en la Figura 5.10), la corriente en el neutro es igual a cero y por lo tanto el conductor central se puede eliminar sin modificar ninguna corriente o voltaje en el sistema.

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} = I_{Bb} = \frac{V_{nb}}{Z_p} \quad (5.16)$$

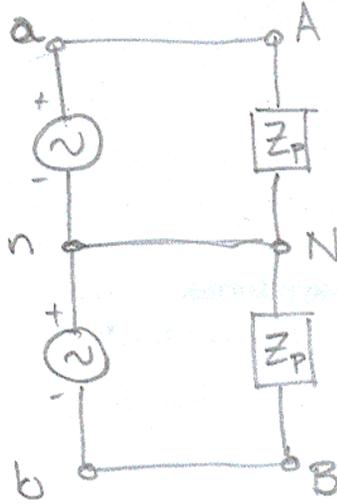


Figura 5.10: Circuito con cargas idénticas.

por lo que:

$$I_{nN} = I_{Bb} + I_{Aa} = I_{Bb} - I_{aA} = 0 \quad (5.17)$$

Lo anterior se consigue gracias a que las cargas y las fuentes son iguales, por lo que recibe el nombre de carga balanceada y fuente balanceada respectivamente. En otras palabras, como consecuencia de una carga balanceada o simétrica la corriente en el conductor central o neutro será igual a cero y esta condición se mantendrá independientemente de la carga que se coloque entre las puntas.

Consideremos ahora el caso mas general de un sistema monofásico con cargas distintas entre cada línea y neutro y otra carga conectada entre las dos líneas externas, tal como el mostrado en la figura 5.11.

obteniendo las ecuaciones de malla por la LCK:

$$\begin{aligned} V &= 54I_1 - 50I_2 - 3I_3 \\ 0 &= -50I_1 + (170 + j10)I_2 - 100I_3 \\ V &= -3I_1 - 100I_2 + 104I_3 \end{aligned}$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 & -50 & -3 \\ -50 & 170 + j10 & -100 \\ -3 & -100 & 104 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 135.35 \times 10^3 \angle 24.47^\circ$$

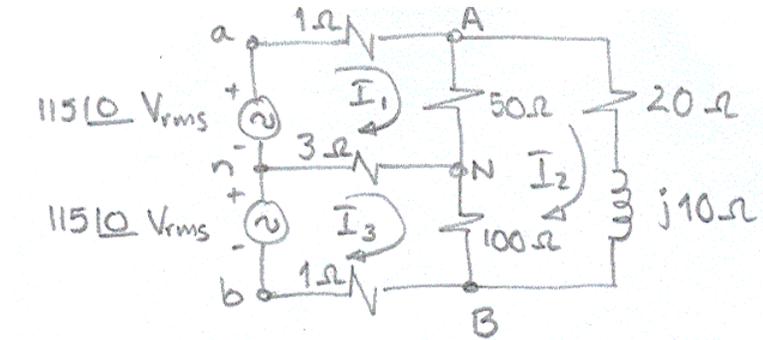


Figura 5.11: Circuito con cargas desbalanceadas.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{\begin{vmatrix} V & -50 & -3 \\ 0 & 170 + j10 & -100 \\ V & -100 & 104 \end{vmatrix}}{\Delta} \\
 &= \frac{V \begin{vmatrix} 170 + j10 & -100 \\ -100 & 104 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -50 & -3 \\ -100 & 104 \end{vmatrix} + V \begin{vmatrix} -50 & -3 \\ 170 + j10 & -100 \end{vmatrix}}{\Delta} \\
 &= 11.24 \angle -19.84^\circ A_{rms} = 10.57 - j3.81 A_{rms}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 54 & V & -3 \\ -50 & 0 & -100 \\ -3 & V & 104 \end{vmatrix}}{\Delta} \\
 &= \frac{-V \begin{vmatrix} -50 & -100 \\ -3 & 104 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 54 & -3 \\ -3 & 104 \end{vmatrix} - V \begin{vmatrix} 54 & -3 \\ -50 & -100 \end{vmatrix}}{\Delta} \\
 &= 9.38 \angle -24.47^\circ A_{rms} = 8.53 - j3.88 A_{rms}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 54 & -50 & V \\ -50 & 170 + j10 & 0 \\ -3 & -100 & V \end{vmatrix}}{\Delta} \\
&= \frac{V \begin{vmatrix} -50 & 170 + j10 \\ -3 & -100 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 54 & -50 \\ -3 & -100 \end{vmatrix} + V \begin{vmatrix} 54 & -50 \\ -50 & 170 + j10 \end{vmatrix}}{\Delta} \\
&= 10.36\angle -21.79^\circ A_{rms} = 9.62 - j3.84 A_{rms}
\end{aligned}$$

la corriente en el conductor central o neutro será:

$$I_{nN} = I_3 - I_1 = (9.62 - j3.84) - (10.57 - j3.81) = -0.95 - j0.03 = 0.95\angle -178.19^\circ A_{rms}$$

las corrientes de línea son:

$$I_{aA} = I_1 = 10.57 - j3.81 = 11.24\angle -19.84^\circ A_{rms}$$

$$I_{Bb} = I_3 = 9.62 - j3.84 = 10.36\angle -21.79^\circ A_{rms}$$

las potencias disipadas en cada carga son:

$$P_{50} = |I_1 - I_2|^2 (50) = |2.04 + j0.07|^2 (50) = (2.045)^2 (50) = 208.2 W$$

$$P_{100} = |I_3 - I_2|^2 (100) = |1.09 + j0.04|^2 (100) = 118.97 W$$

$$P_{20+j10} = |I_2|^2 (20) = (9.38)^2 (20) = 1759.68 W$$

$$\sum P_{carga} = 2086.85 W$$

las pérdidas en cada línea son:

$$P_{aA} = |I_1|^2 (1) = 126.33 W$$

$$P_{bB} = |I_3|^2 (1) = 107.34 W$$

$$P_{nN} = |I_{nN}|^2 (3) = |I_3 - I_1|^2 (3) = 2.7 W$$

$$\sum P_{línea} = 236.37 W$$

La potencia proporcionada por las fuentes debe ser igual a:

$$\sum P_{carga} + \sum P_{línea} = 2323.2 W$$

verificando:

$$P_{an} = 115(11.24) \cos(19.84^\circ) = 1215.87 \text{ W}$$

$$P_{bn} = 115(10.36) \cos(21.79^\circ) = 1106.27 \text{ W}$$

La potencia entregada por las fuentes es:

$$P_{an} + P_{bn} = 2322.14 \text{ W}$$

La eficiencia de la transferencia de potencia es de:

$$\eta = \frac{\sum P_{carga}}{\sum P_{carga} + \sum P_{línea}} = \frac{2086.85}{2323.2} \times 100 = 89.82\%$$

5.5. Circuitos Trifásicos.

Las fuentes trifásicas tienen tres terminales, llamadas las terminales de línea, y pueden tener o no una cuarta terminal, la conexión neutra. Se comenzará analizando una fuente trifásica que tiene una conexión neutra. Puede representarse como tres fuentes ideales de voltaje conectadas en Y, como se ve en la fig.5.12; se dispone de las terminales a , b , c y n . Sólo se considerarán fuentes trifásicas balanceadas, que pueden definirse como :

$$|V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| \quad (5.18)$$

y

$$V_{an} + V_{bn} + V_{cn} = 0 \quad (5.19)$$

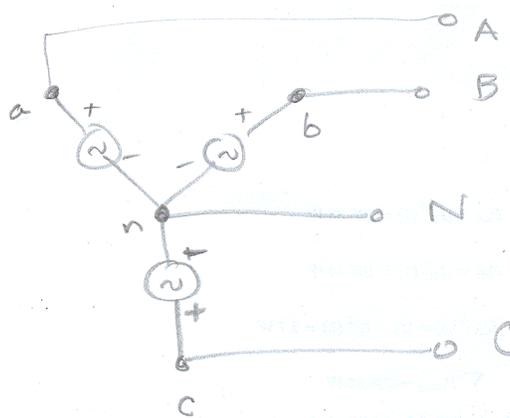


Figura 5.12: Fuentes ideales de voltaje conectadas en Y.

Estos tres voltajes, cada uno definido entre una línea y el neutro, reciben el nombre de voltajes de fase. Si arbitrariamente se escoge a V_p , como la referencia, donde V_p representa la amplitud *rms* de cualquiera de los voltajes de fase; entonces, la definición de la fuente trifásica indica que :

Si se elige como referencia $V_{an} = V_p \angle 0^\circ$

$$\left. \begin{aligned} V_{bn} &= V_p \angle -120^\circ \\ V_{cn} &= V_p \angle -240^\circ \end{aligned} \right\} \text{Secuencia de fase positiva } \acute{o} \text{ abc} \quad (5.20)$$

ó

$$\left. \begin{aligned} V_{bn} &= V_p \angle 120^\circ \\ V_{cn} &= V_p \angle 240^\circ \end{aligned} \right\} \text{Secuencia de fase negativa } \acute{o} \text{ cba} \quad (5.21)$$

La primera se llama secuencia de fase positiva, o secuencia de fase *abc*, y se muestra en la fig.5.13a, la segunda recibe el nombre de secuencia de fase negativa, o secuencia de fase *cba*, y se indica por medio del diagrama fasorial de la fig.5.13b. Es evidente que la secuencia de fase de una fuente trifásica física depende de como se elijan (arbitrariamente) las terminales nombradas *a*, *b* y *c*. Siempre pueden elegirse de manera que se tenga una secuencia de fase positiva, y se supondrá que esto se ha hecho en la mayor parte de los sistemas con los que se trate en este curso.

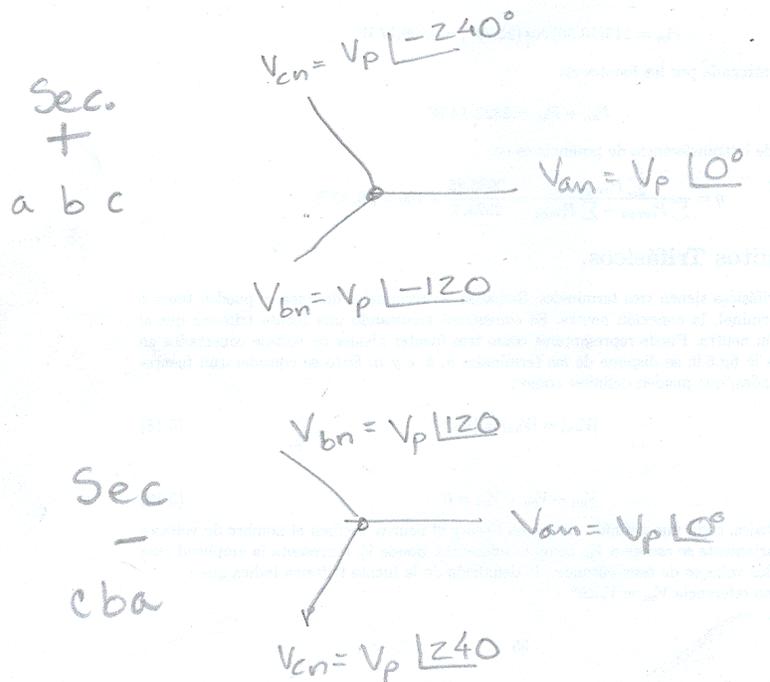


Figura 5.13: Secuencias de Fase: a)Positiva y b)Negativa.

A continuación, se determinarán los voltajes de línea a línea (o simplemente voltajes de "línea"), los cuales están presentes cuando los voltajes de fase son como los mostrados en la fig.5.13a. Es más fácil hacer esto con la ayuda de un diagrama fasorial, ya que todos los ángulos son múltiplos de 30°. En la fig. 5.14 se muestra la construcción resultante.

$$V_{ab} = \sqrt{3}V_p \angle 30^\circ \quad V_{bc} = \sqrt{3}V_p \angle -90^\circ \quad V_{ca} = \sqrt{3}V_p \angle -210^\circ \quad (5.22)$$

La ley de voltajes de Kirchhoff requiere que esta suma sea cero, y, en efecto, es igual a cero.

$$V_{ab} + V_{bc} + V_{ca} = 0 \quad (5.23)$$

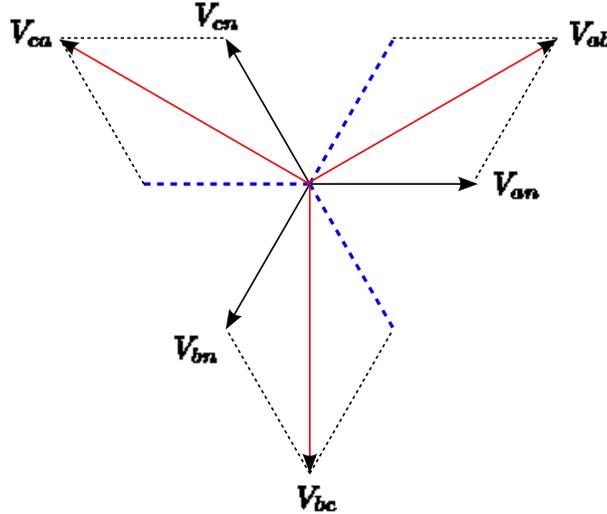


Figura 5.14: Diagrama Fasorial de voltajes.

Denotando por V_l , la amplitud de los voltajes de línea, entonces una de las características importantes de una fuente trifásica conectada en Y puede expresarse como:

$$\text{Voltaje de Línea} = V_l = \sqrt{3}V_p \quad (5.24)$$

Obsérvese que, con la secuencia de fase positiva, V_{an} adelanta a V_{bn} y V_{bn} adelanta a V_{cn} , 120° en cada caso, y también que V_{ab} , adelanta a V_{bc} y V_{bc} adelanta a V_{ca} , de nuevo por 120° . Lo anterior es cierto para la secuencia negativa si "atrás" se pone en lugar de "adelanta".

Ahora se conectará la fuente una carga trifásica balanceada conectada en Y, usando tres líneas y un neutro, como se ve en la figura 5.15. La carga está representada por una impedancia Z_p , conectada entre cada línea y el neutro. Las tres corrientes de línea se calculan muy fácilmente, ya que en realidad se tienen tres circuitos monofásicos con una conexión común :

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} \quad (5.25)$$

$$I_{bB} = \frac{V_{bn}}{Z_p} = \frac{V_{an} \angle -120^\circ}{Z_p} = I_{aA} \angle -120^\circ \quad (5.26)$$

$$I_{cC} = I_{aA} \angle -240^\circ \quad (5.27)$$

y por lo tanto,

$$I_{nN} = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} = 0 \quad (5.28)$$

Así, si tanto la carga como la fuente, y si los cuatro alambres tienen una impedancia igual a cero, el neutro no transporta corriente. ¿Cómo cambiaría si se insertase una impedancia Z_L en serie con

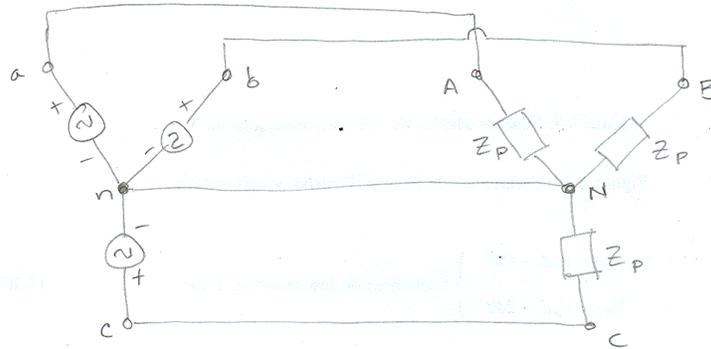


Figura 5.15: Fuente trifásica conectada a una carga trifásica.

una de las tres líneas y una impedancia Z_n , en el neutro? Evidentemente, las impedancias de línea pueden reducirse con las impedancias de la carga; esta carga efectiva sigue estando balanceada, y, si el neutro es un conductor perfecto, podría eliminarse. Entonces, si no se producen cambios en el sistema con un cortocircuito o un circuito abierto entre n y N , puede insertarse cualquier impedancia en el neutro y la corriente en el neutro seguirá siendo igual a cero.

Por lo tanto, si se tienen fuentes balanceadas, cargas balanceadas e impedancias de línea balanceadas, un alambre neutro de cualquier impedancia puede reemplazarse por cualquiera otra impedancia, incluyendo un cortocircuito y un circuito abierto. A menudo es útil visualizar un cortocircuito entre los dos puntos neutros, ya sea que realmente esto presente o no un alambre neutro; así, el problema se reduce a tres problemas monofásicos, todos idénticos excepto por las diferencias de fase. En este caso se dice que el problema se resuelve "por fases".

Ejemplo 22 Para el circuito de la fig.5 calcule las corrientes y voltajes en el circuito, y la potencia total. Como uno de los voltajes de fase es dado, y como se supone una secuencia de fase positiva, los tres voltajes de fase son:

$$V_{an} = 200\angle 0^\circ \quad V_{bn} = 200\angle -120^\circ \quad V_{cn} = 200\angle -240^\circ$$

$$Z_P = 100\angle 60^\circ \Omega$$

El voltaje de línea vale $200\sqrt{3}$, ó $346 V_{rms}$; el ángulo de fase de cada voltaje de línea puede determinarse construyendo un diagrama fasorial, como se hizo anteriormente. De hecho, puede aplicarse el diagrama de la figura 5.14, y V_{ab} , es $346\angle 30^\circ V$.

Se resolverá la fase A. La corriente de línea es

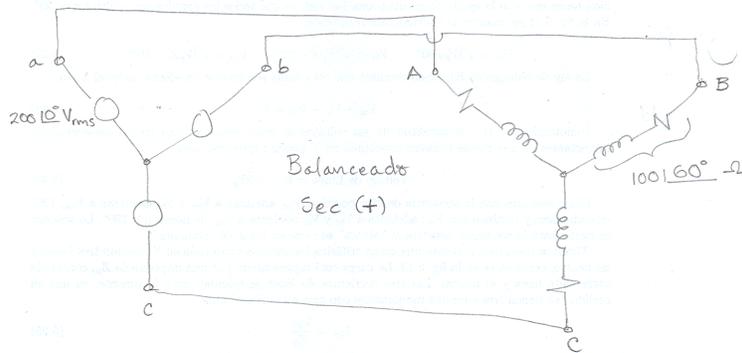


Figura 5.16: Circuito trifásico del ejemplo.

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} = \frac{200\angle 0^\circ}{100\angle 60^\circ} = 2\angle -60^\circ A_{rms}$$

y la potencia absorbida por esta fase es, por tanto,

$$P_{AN} = 200(2) \cos(0^\circ + (-60^\circ)) = 200W$$

Entonces, la potencia total absorbida por la carga trifásica es de $(3)200 = 600 W$. La solución del problema se completa dibujando un diagrama fasorial y obteniendo de éste los ángulos de fase apropiados que se aplican a los demás voltajes y corrientes de línea. El diagrama completo se muestra en la fig.5.17.

Ejemplo 23 Los métodos por fase también se pueden utilizar para resolver problemas en lo que podría llamarse la dirección opuesta. Supóngase que se tiene un sistema trifásico balanceado con un voltaje de línea de $300 V_{rms}$, y que se sabe que está alimentando a una carga balanceada conectada en Y con $1200 W$ a un FP de 0.8 adelantado. Cuál es la corriente de línea y la impedancia de carga, por fase? Es evidente que el voltaje de fase vale $300/\sqrt{3} V_{rms}$ y que la potencia, por fase es de $400 W$. Entonces la corriente de línea puede obtenerse a partir de la relación de potencia,

$$400 = \frac{300}{\sqrt{3}}(I_L)(0.8)$$

$$\Rightarrow I_L = 2.89 A_{rms}$$

La impedancia de fase esta dada por :

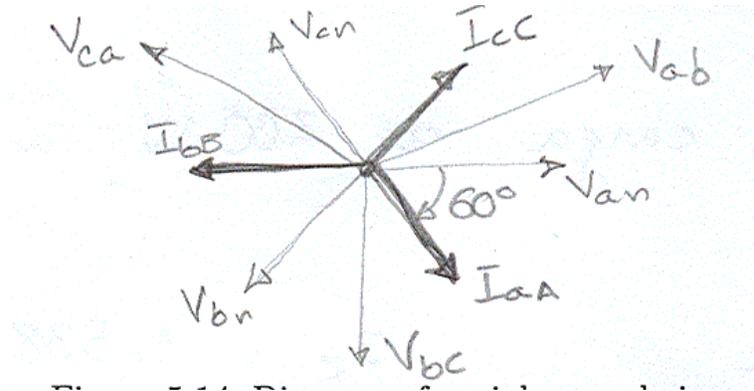


Figura 5.17: Diagrama fasorial para el ejemplo.

$$|Z_p| = \frac{V_p}{I_L} = \frac{300/\sqrt{3}}{2.89} = 60\Omega$$

Como el FP es de 0.8 adelantado (es decir el voltaje se adelanta a la corriente), el ángulo de fase de la impedancia es $\cos^{-1}(0.8) = -36.9^\circ$, y $Z_p = 60\angle -36.9^\circ \Omega$.

Pueden manejarse cargas más complicadas con facilidad, ya que los problemas se reducen a problemas monofásicos más simples.

Si una carga conectada en Y desbalanceada esta conectada a un sistema trifásico que por lo demás está balanceado, el circuito aún puede ser analizado por fases si el alambre neutro está presente y si tiene una impedancia igual a cero. Si cualquiera de estas dos condiciones no se cumple, deben usarse otros métodos, tales como el análisis de mallas o el de nodos. Sin embargo, aquellos, ingenieros que traten la mayor parte del tiempo con sistemas trifásicos desbalanceados, verán que el uso de las componentes simétricas representa un gran ahorro de tiempo.

Capítulo 6

Circuitos Acoplados Magnéticamente.

6.1. Inductancia Mutua:

En Circuitos I se definió la inductancia especificando la relación entre el voltaje y la corriente entre las terminales como (empleando la convención pasiva de signos):

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (6.1)$$

y que el fundamento físico de esta relación se basa en:

1. La producción de un flujo magnético por una corriente, siendo el flujo proporcional a la corriente en inductores lineales
2. La producción de un voltaje por el campo magnético variable con el tiempo, siendo el voltaje proporcional a la rapidez de cambio con respecto al tiempo del campo magnético o del flujo magnético.

Considere ahora un par de bobinas cercanas una de la otra. Una corriente que fluye en una bobina establece un flujo magnético alrededor de esa bobina y también alrededor de la segunda; el flujo variable con el tiempo que rodea a la segunda bobina produce un voltaje entre sus terminales. Este voltaje es proporcional a la rapidez de cambio con respecto al tiempo de la corriente que circula en la primer bobina.

Así la inductancia mutua M para el circuito 6.1a es

$$v_2(t) = M_{21} \frac{di_1(t)}{dt} \quad (6.2)$$

y en 6.1b,

$$v_1(t) = M_{12} \frac{di_2(t)}{dt} \quad (6.3)$$

Figura 6.1: Inductancia Mutua 1.

Figura 6.2: Inductancia Mutua 2.

Figura 6.3: Inductancia Mutua 3.

donde:

M_{21} : Inductancia que en L_2 produce una respuesta de voltaje debido a una fuente de corriente en L_1 .

M_{12} : Inductancia que en L_1 produce una respuesta de voltaje debido a una fuente de corriente en L_2 .

Más adelante se mostrará que $M_{12} = M_{21} = M$.

El acoplamiento mutuo entre dos bobinas se indica por medio de una flecha doble. La inductancia mutua se mide en Henrys y siempre es (+).

6.2. Convención de los puntos.

La convención de los puntos hace uso de un punto colocado en uno de los extremos de cada una de las bobinas que están mutuamente acopladas. El signo del voltaje mutuo se determina como sigue.

”Una corriente que entra por la terminal punteada de una bobina produce un voltaje de circuito abierto entre las terminales de la segunda bobina, cuyo sentido es el de la dirección indicada por una referencia de voltaje positiva en la terminal punteada en esta segunda bobina”.

Así mismo,

”Una corriente que entra por la terminal no punteada de una bobina suministra un voltaje de marcado positivamente en la terminal no punteada de la segunda bobina”.

Ejemplo:

En general

Así, el voltaje entre las terminales de L_1 estará compuesta de 2 términos dado que circula una corriente diferente de cero en cada una de las bobinas produciéndose un voltaje mutuo en cada una de ellas debido a la corriente que circula en la otra bobina. Dicho voltaje mutuo estará presente independientemente de, y en adición a, cualquier voltaje de autoinducción. De lo anterior el voltaje en L_1 es:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (6.4)$$

donde cada uno de los signos de los componentes es dependiente de las direcciones de las corrientes, polaridad adoptada por el voltaje y la colocación de los puntos.

Para L_2 el voltaje es:

$$v_2 = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (6.5)$$

Ejemplo:

Figura 6.4: Inductancia Mutua 4.

Figura 6.5: Inductancia Mutua 5.

$$v_1 = -L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \quad (6.6)$$

$$v_2 = -L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \quad (6.7)$$

y la misma convención de signos aplica a la frecuencia compleja s

$$V_1 = -sL_1I_1 + sMI_2 \quad (6.8)$$

$s = j\omega$ y en estado senoidal permanente $s = j\omega$

$$V_1 = -j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \quad (6.9)$$

Tarea: Leer pag. 449 y 450 sobre "Enlace de flujos y convenciones de puntos" Ref. fig 15-4

Ejemplo:

En estado senoidal permanente $s = j\omega$,

$$I_1(1 + j10) - j90I_2 = 10 \quad (6.10)$$

$$I_2(400 + j1000) - j90I_1 = 0 \quad (6.11)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + j10 & 10 \\ -j90 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 + j10 & -j90 \\ -j90 & 400 + j1000 \end{vmatrix}} = .1724 \angle -16.7^\circ \quad (6.12)$$

6.3. Consideraciones de Energía

En esta sección se tomará en cuenta la energía almacenada en un par de inductores acoplados mutuamente, para ello se hace referencia a la figura 6.6

Figura 6.6: Inductancia Mutua 6.

En dicha figura se considera que i_1 , i_2 , v_1 y v_2 valen inicialmente cero estableciéndose así una energía inicial almacenada igual a cero en la red. Si ahora aumentamos la corriente i , desde cero hasta un valor constante I_1 en el tiempo $t = t_1$ manteniendo en circuito abierto las terminales del lado derecho, la potencia que entra a la red en cualquier instante es:

$$v_1 i_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 \quad (6.13)$$

y la que entra desde la derecha es

$$v_2 i_2 = 0 \quad (6.14)$$

ya que $i_2 = 0$, entonces la energía almacenada dentro de la red hasta el tiempo t_1 es:

$$\int_0^{t_1} v_1 i_1 dt = \int_0^{t_1} L_1 i_1 di_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (6.15)$$

Ahora se mantiene a i_1 constante, $i_1 = I_1$ y se deja que i_2 varíe desde cero en $t = t_1$ hasta un valor constante I_2 en $t = t_2$. La energía entregada por la fuente de la derecha es:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2 i_2 dt = \int_0^{t_2} L_2 i_2 di_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \quad (6.16)$$

durante este mismo periodo de tiempo la fuente de la izquierda también entrega energía dada por:

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1 i_1 dt = \int_{t_1}^{t_2} M_{12} \frac{di_2}{dt} i_1 dt = M_{12} I_1 \int_0^{t_2} di_2 = M_{12} I_1 I_2 \quad (6.17)$$

y la energía total almacenada en la red cuando ambas i_1 e i_2 han alcanzado valores constantes es:

$$W_{total} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \quad (6.18)$$

De manera semejante puede realizarse el cálculo de la energía almacenada si partiendo de cero ahora se incrementa i_2 desde cero hasta un valor constante I_2 en $t = t_1$ y luego i_1 desde cero en $t = t_1$ hasta un valor constante I_1 en $t = t_2$, así:

$$W_{total} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{21} I_1 I_2 \quad (6.19)$$

dado que las condiciones iniciales y finales son las mismas, los valores de energía almacenada son idénticos por lo que se deduce que:

$$M_{12} = M_{21} = M \quad (6.20)$$

Si una corriente entra por la terminal punteada mientras que la otra sale también por la terminal punteada, el signo del término de la energía mutua se invierte

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 - M I_1 I_2 \quad (6.21)$$

De manera general

$$w(t) = \frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + \frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) \pm M i_1(t) i_2(t) \quad (6.22)$$

dado que la ecuación 6.22 representa correctamente la energía almacenada cuando los valores instantáneos de i_1 e i_2 son I_1 e I_2 .

Como $w(t)$ representa la energía almacenada en una red pasiva, ésta no puede ser negativa para ningún valor de i_1, i_2, L_1, L_2 o M . Empleando el concepto anterior puede establecerse el límite superior para el valor de M .

Figura 6.7: Inductancia Mutua 5.

Figura 6.8: Transformador Lineal.

Suponga que i_1 e i_2 son ambas positivas o ambas negativas, entonces de la ec. 6.22 el único caso en que la energía podría ser negativa es:

$$W = \frac{1}{2}L_1i_1^2 + \frac{1}{2}L_2i_2^2 - Mi_1i_2 \quad (6.23)$$

completando el cuadrado

$$W = \frac{1}{2}(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2)^2 + \sqrt{L_1L_2}i_1i_2 - Mi_1i_2 \quad (6.24)$$

como $\omega \geq 0$ y $\frac{1}{2}(\sqrt{L_1}i_1 - \sqrt{L_2}i_2)^2 \geq 0$ entonces:

$$\sqrt{L_1L_2}i_1i_2 \geq Mi_1i_2 \quad (6.25)$$

$$M \leq \sqrt{L_1L_2} \quad (6.26)$$

Por lo que el límite superior de M es la media geométrica de las inductancias de las dos bobinas entre las que existe la inductancia mutua. Si i_1 e i_2 tuviesen signos contrarios se llegaría al mismo resultado eligiendo el signo positivo de la ecuación 6.22.

El grado en el que M se aproxima su valor máximo se describe en forma exacta por el coeficiente de acoplamiento k que se define como:

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (6.27)$$

Los valores mayores de k corresponden a bobinas cercanas físicamente que se arrollan y orientan para dar un flujo magnético común más grande o bien se les proporciona una trayectoria común a través de un material con alta permeabilidad (que permite concentrar y localizar el flujo magnético). Bobinas que tienen un coeficiente de acoplamiento cercano a uno se dice que están fuertemente acopladas.

Ejemplo 15.4

6.4. El transformador lineal

Un transformador puede definirse como una red que contiene dos o más bobinas acopladas magnéticamente. En la figura se muestra un transformador lineal con dos corrientes de malla.

Las inductancias L_1 y L_2 se conocen como primario y secundario del transformador respectivamente. Así mismo, la malla que usualmente contiene la fuente recibe el nombre de primario mientras que la segunda malla que es la que usualmente contiene la carga recibe el nombre de secundario. Se supondrá que el transformador es lineal, es decir, que no se usará un material magnético que origine una relación no lineal de flujo contra corriente.

Considere la impedancia de entrada en las terminales del circuito primario.

Figura 6.9: Red equivalente T.

$$V_s = I_1 Z_{11} - I_2 s M \quad (6.28)$$

$$0 = -I_1 s M + I_2 Z_{22} \quad (6.29)$$

donde

$$Z_{11} = R_1 + sL_1 \quad (6.30)$$

$$Z_{22} = R_2 + sL_2 + Z_2 \quad (6.31)$$

de donde

$$Z_{entrada} = \frac{V_s}{I_1} = Z_{11} - \frac{s^2 M^2}{Z_{22}} \quad (6.32)$$

donde al término $-\frac{s^2 M^2}{Z_{22}}$ se le denominará impedancia reflejada.

Si el acoplamiento se reduce a cero la impedancia de entrada es simplemente Z_{11} y conforme va aumentando, la impedancia de entrada difiere de Z_{11} por la cantidad $-\frac{s^2 M^2}{Z_{22}}$.

Haciendo $s = j\omega$ (operación en estado senoidal permanente).

$$Z_{entrada}(j\omega) = Z_{11}(j\omega) + \frac{\omega^2 M^2}{R_{22} + jX_{22}} \quad (6.33)$$

$$= Z_{11} + \frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} - \frac{j\omega^2 M^2 X_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2} \quad (6.34)$$

como $\frac{\omega^2 M^2 R_{22}}{R_{22}^2 + X_{22}^2}$ debe ser positivo, la presencia del secundario aumenta las pérdidas en l circuito primario. Por otra parte, la reactancia del secundario se refleja en el primario con un signo opuesto al de X_{22} , la reactancia neta alrededor del lazo secundario es decir $\omega L_2 + X_L$ que será positiva para cargas puramente inductivas y para cargas capacitivas puede ser $+$ o $-$ dependiendo de la magnitud de la reactancia de la carga.

6.5. Transformación T y π entre redes de tres terminales con acoplamiento magnético.

A menudo resulta conveniente reemplazar un transformador con sus dos terminales inferiores conectadas formando una red de tres terminales por una red equivalente en forma de T o π .

6.5.1. Red equivalente T

Las ecuaciones diferenciales del circuito son:

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (6.35)$$

Figura 6.10: Representación esquemática.

Figura 6.11: Representación esquemática.

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \quad (6.36)$$

que puede escribirse como

$$v_1 = (L_1 - M) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad (6.37)$$

y

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + (L_2 - M) \frac{di_2}{dt} \quad (6.38)$$

cuya representación esquemática es

Si cualquiera de los puntos en los arrollamientos del transformador se coloca en el extremo opuesto de su respectiva bobina, el signo de los términos mútuos será negativo, $-M$. Para este caso los tres valores de autoinductancia son $L_1 + M$, $-M$ y $L_2 + M$.

Las inductancias en el equivalente T son todas autoinductancias; no hay inductancia mutua. Puede llegar a suceder que matemáticamente se obtengan valores negativos de inductancia para el circuito equivalente partiendo del circuito transformador, sin embargo la red no podrá construirse en la realidad. Si por el contrario el análisis matemático nos lleva a obtener un circuito equivalente T con inductancias negativas entonces la red puede realizarse usando un transformador lineal adecuado.

6.5.2. Red π equivalente

Se desarrolla resolviendo 6.36 para $\frac{di_2}{dt}$ y sustituyendo el resultado en 6.35

$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + v_2 \frac{M}{L_2} - \frac{M^2}{L_2} \frac{di_1}{dt} \quad (6.39)$$

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} v_1 - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} v_2 \quad (6.40)$$

integrando de 0 a t

$$i_1 - i_1(0)u(t) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (6.41)$$

de manera similar se obtiene

$$i_2 - i_2(0)u(t) = \frac{-M}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_1 dt + \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} \int_0^t v_2 dt \quad (6.42)$$

cuya representación esquemática es donde

$$L_B = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M} \quad (6.43)$$

$$\frac{1}{L_A} = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} - \frac{1}{L_B} = \frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2} \quad (6.44)$$

$$L_A = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_2 - M} \quad (6.45)$$

y

$$\frac{1}{L_C} = \frac{L_1}{L_1 L_2 - M^2} - \frac{1}{L_B} = \frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2} \quad (6.46)$$

$$L_C = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 - M} \quad (6.47)$$

De nuevo, en el circuito equivalente no existe acoplamiento magnético entre inductores y las corrientes iniciales valen cero en las tres autoinductancias. Para compensar un cambio de cualquiera de los puntos en el transformador dado, simplemente se cambia el signo de M en la red equivalente. También en este circuito pueden aparecer autoinductancias negativas en la red equivalente.