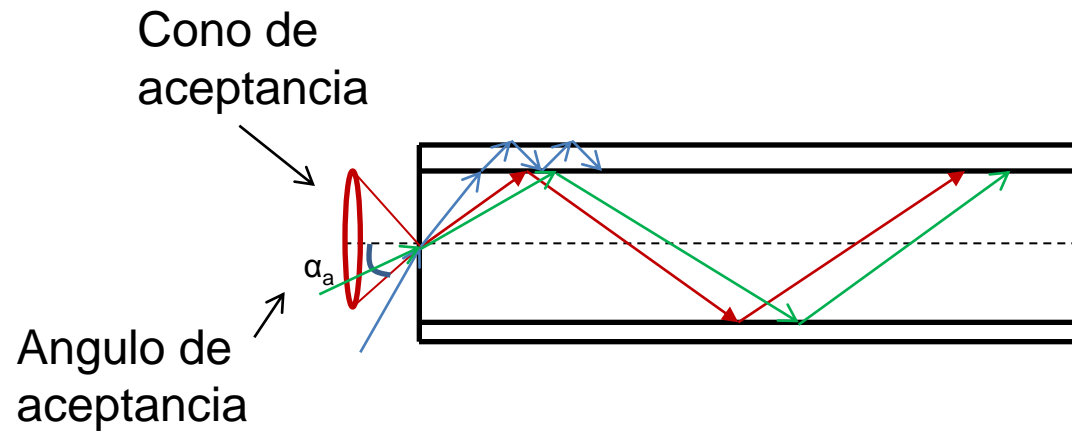


COMUNICACIONES OPTICAS

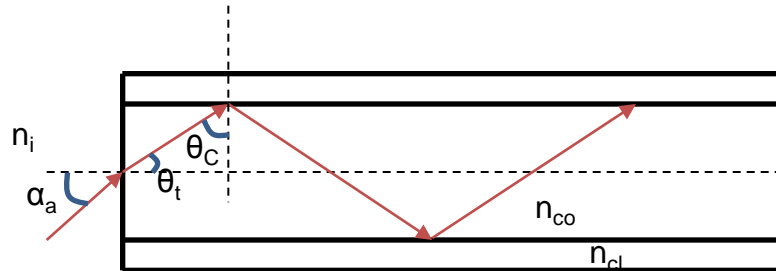
TRANSMISION DELUZ POR MEDIO DE FIBRAS OPTICAS

Universidad Autónoma de Baja California UABC
Facultad de Ingeniería Arquitectura y Diseño, Ensenada
Dr. Horacio Luis Martínez Reyes

CONO DE ACEPTANCIA



APERTURA NUMERICA (NA)



$NA = n_i \text{sen} \alpha_a$ Donde: α_a es el ángulo de aceptación

$$n_i \text{sen} \alpha_a = n_{co} \text{sen} \theta_t = n_{co} \text{sen}(90^\circ - \theta_C)$$

$$n_i \text{sen} \alpha_a = n_{co} \cos \theta_C$$

$$n_i \text{sen} \alpha_a = n_{co} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta_C}$$

$$\theta_C = \text{sen}^{-1} \frac{n_{cl}}{n_{co}}$$

$$NA = n_i \text{sen} \alpha_a = n_{co} \sqrt{1 - \left(\frac{n_{cl}}{n_{co}} \right)^2}$$

$$NA = \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2}$$

MODO: configuración tridimensional del campo eléctrico, caracterizado por la constante de propagación (velocidad).

Un modo representa una de las posibles soluciones de las ecuaciones de Maxwell para la geometría específica y el perfil del índice refractivo de la fibra.

ECUACIONES DE MAXWELL PARA UNA FIBRA OPTICA

Ecuaciones de Maxwell para medios isótropos, no magnéticos y sin carga libre

Isótropos: mismas propiedades en todas direcciones. Sus características físicas (ópticas) no dependen de la dirección en la cual son medidas.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0\end{aligned}$$

Aplicando la siguiente relación: $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

Se tiene las ecuaciones de onda generales

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \epsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Para un medio homogéneo (ϵ no es función de x , y o z)

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Ecuación de ondas (para cada una de las componentes)

$$\vec{\nabla}^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

considerando que: $v = \frac{c}{n} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$

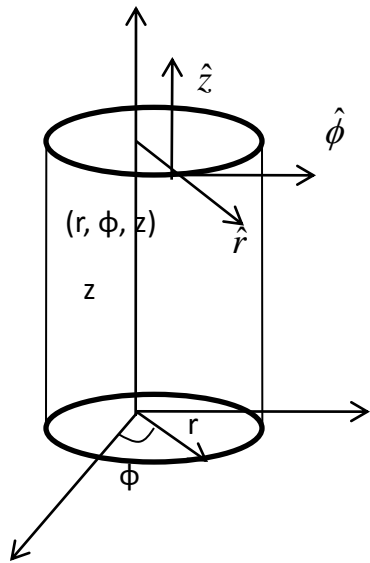
La solución a la ecuación de ondas (modo) es: $\psi = \psi_0 e^{j(\omega t - \beta z)}$

Donde, la constante de propagación es: $\beta = \frac{\omega}{v} = k_0 n_{eff}$

Por la geometría de las fibras ópticas es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas para su estudio, complicando *un poco los cálculos, debido a que las relaciones vectoriales* son más complejas:

Por ejemplo, el vector Laplaciano, esta dado por:

$$\nabla^2 \vec{A} = \left\{ \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} - \frac{A_r}{r^2} \right\} \hat{r} + \left\{ \nabla^2 A_\phi - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{A_\phi}{r^2} \right\} \hat{\phi} + \left\{ \nabla^2 A_z \right\} \hat{z}$$



La solución de las ecuaciones de Maxwell para una simetría cilíndrica en coordenadas cartesianas acoplaría las diferentes componentes de forma que las ecuaciones resultantes serían muy complejas.

$$\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\phi \hat{\phi} + A_z \hat{z} \quad (\vec{A} \equiv \vec{E}, \vec{H})$$

Para una estructura de salto de índice se considera una resolución parcial de las ecuaciones de Maxwell en cada una de las regiones (núcleo, cubierta) como si fuesen medios homogéneos para posteriormente aplicar las condiciones de contorno.

De las ecuaciones obtenidas se calcularan las características de los modos.

Con el empleo de la simetría cilíndrica, las soluciones de las ecuaciones son SEPARABLES en cada una de las variables dentro de cada una de las zonas de núcleo y cubierta:

$$A_i = CF_1(r)F_2(\phi)F_3(z)F_4(t) \Rightarrow \begin{aligned} F_2(\phi) &= e^{j\rho\phi} \\ F_3(z) &= e^{-j\beta z} \\ F_4(t) &= e^{j\omega t} \end{aligned} \quad \text{Donde: } \rho \text{ es numero entero}$$

A_i representa a cada una de las 6 incógnitas

$$E_r, E_\phi, E_z, H_r, H_\phi, H_z$$

Sin embargo, sólo hay que resolver dos de ellas porque las ecuaciones de Maxwell permiten relacionarlas con las demás.

Por ejemplo, las componentes E_z y H_z .

Para obtener E_z y H_z es necesario determinar: la constante C, la forma funcional de $F_1(r)$, el valor de ρ , y el valor de β (constante de propagación).

Basándose en las ecuaciones de Maxwell, se puede encontrar que las componentes E_z y H_z del campo electromagnético cumplen la ecuación de ondas en cilíndricas:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left(q^2 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) E_z = 0 \qquad \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \left(q^2 - \frac{\rho^2}{r^2} \right) H_z = 0$$

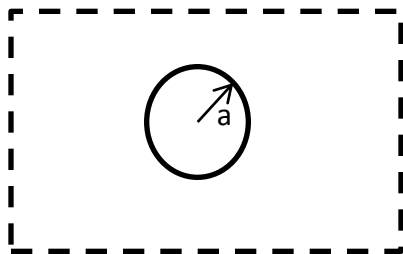
(componente radial $F_1(r)$)

Donde: $q^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} n \right)^2 - \beta^2 = k^2 - \beta^2$ Los valores del resto de las componentes se calculan a partir de éstas

En la resolución de la ecuación de ondas para guías planas las dos ecuaciones son independientes, dando lugar a modos TE o TM.

En este caso, como la guía es bidimensional, E_z y H_z no son completamente independientes, y las condiciones de contorno acoplan las dos componentes.

Las condiciones de contorno para las componentes tangenciales son:



$$E_z(r < a) = E_z(r > a)$$

$$E_\phi(r < a) = E_\phi(r > a)$$

$$H_z(r < a) = H_z(r > a)$$

$$H_\phi(r < a) = H_\phi(r > a)$$

La componente radial del campo eléctrico no va a ser continua en la intercara

Resolución de la ecuación de ondas: Funciones de Bessel

Resolución para una de las ecuaciones en la región de núcleo:

$$(ur)^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial (ur)^2} + ur \frac{\partial E_z}{\partial (ur)} + ((ur)^2 - \rho^2) E_z = 0 \quad \text{con } q_{co}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} n_{co} \right)^2 - \beta^2 = k_{co}^2 - \beta^2 = u^2$$

Y multiplicando por r^2

Ecuación diferencial de Bessel

Solución general de la ecuación diferencial de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad n \geq 0$$

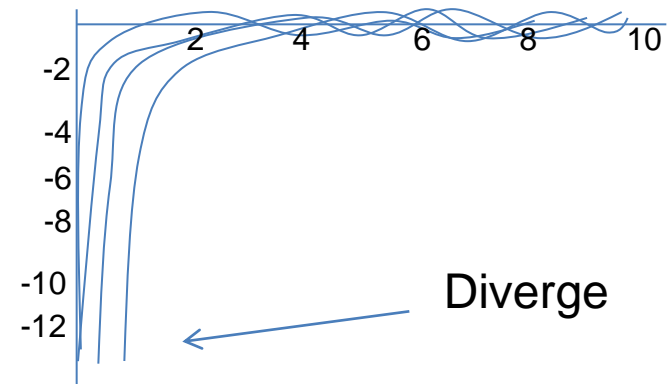
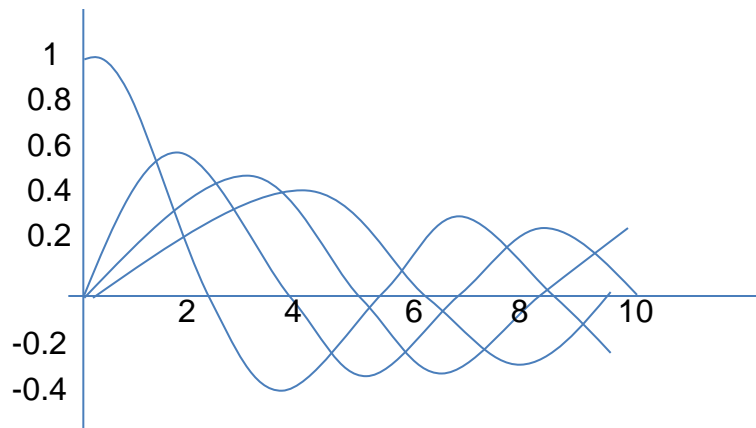
$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x) \quad n \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \quad \text{Para todo } n$$

$$y = AJ_n(x) + BJ_n(x) \int \frac{dx}{x J_n^2(x)} \quad \text{Para todo } n$$

Las soluciones de la parte radial dentro del núcleo son del tipo:

$$E_z(r) = AJ_\rho(ur) + A'Y_\rho(ur)$$



En la región de cubierta:

$$(wr)^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial (wr)^2} + wr \frac{\partial E_z}{\partial (wr)} - ((wr)^2 + \rho^2) E_z = 0 \quad \text{con} \quad q_{cl}^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} n_{cl} \right)^2 - \beta^2 = k_{cl}^2 - \beta^2 = -w^2$$

Ecuación diferencial de
Bessel modificada

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + n^2) y = 0$$

$$n \geq 0$$

Solución general de la ecuación
modificada de Bessel

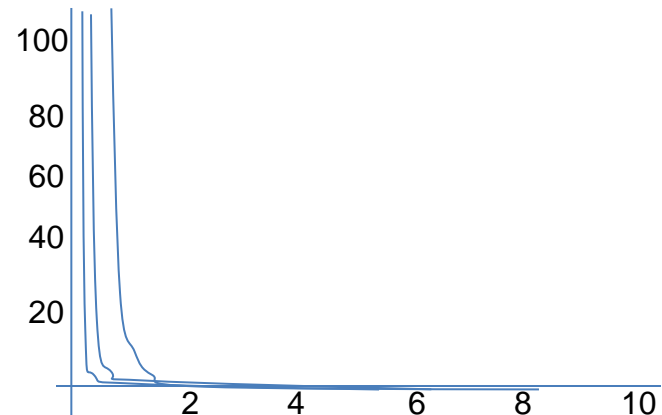
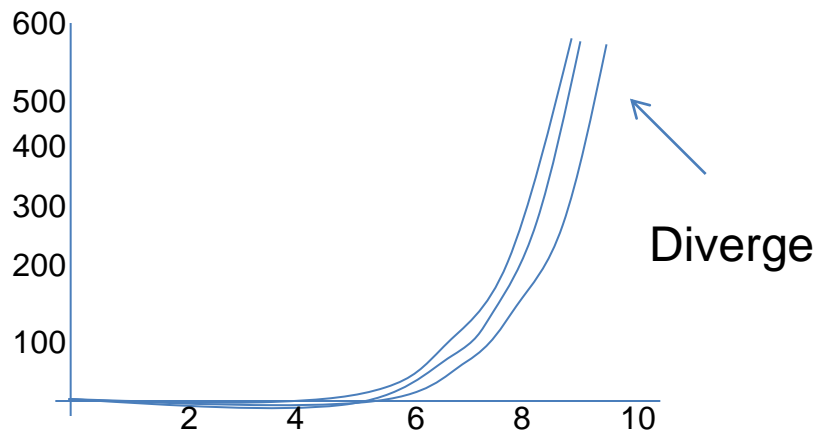
$$y = AI_n(x) + BI_{-n}(x) \quad n \neq 0, 1, 2, \dots$$

$$y = AI_n(x) + BK_n(x) \quad \text{Para todo } n$$

$$y = AI_n(x) + BI_n(x) \int \frac{dx}{x I_n^2(x)} \quad \text{Para todo } n$$

Las soluciones de la parte radial fuera del núcleo son del
tipo:

$$E_z(r) = C' I_p(wr) + CK_p(wr)$$



Así, la solución de la ecuación de ondas para los campos eléctrico y magnético es:

$$E_z(r, \phi, z, t) = \begin{cases} AJ_\rho(ur) e^{j\rho\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} & r \leq a \\ CK_\rho(wr) e^{j\rho\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} & r > a \end{cases}$$

$$H_z(r, \phi, z, t) = \begin{cases} BJ_\rho(ur) e^{j\rho\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} & r \leq a \\ DK_\rho(wr) e^{j\rho\phi} e^{j(\omega t - \beta z)} & r > a \end{cases}$$

Oscilatoria en el núcleo y evanescente en la cubierta, siempre y cuando se cumpla la condición de MODOS GUIADOS

$$k_0 n_{cl} < \beta < k_0 n_{co}$$

El resto de las componentes se pueden obtener de las dos anteriores con relaciones obtenidas a partir de las ecuaciones de Maxwell.

$$H_\phi = \left(\frac{1}{k^2 - \beta^2} \right) \left[-j\omega\epsilon_0 n^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta\rho}{r} H_z \right] \quad H_r = \left(\frac{1}{k^2 - \beta^2} \right) \left[-j\omega\epsilon_0 n^2 \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\beta\nu}{r} H_z \right]$$

$$E_\phi = \left(\frac{1}{k^2 - \beta^2} \right) \left[j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\beta\rho}{r} E_z \right] \quad E_r = \left(\frac{1}{k^2 - \beta^2} \right) \left[j\omega\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial r} + \frac{\beta\nu}{r} E_z \right]$$

Obtención de la constante de propagación: Modos

Faltan por calcular las constantes A,B,C, y D necesarias para que los campos tangenciales (E_z, E_ϕ, H_z, H_ϕ) sean continuos en la intercara $r = a$.

La componente radial del campo eléctrico presenta una discontinuidad en $r = a$, esta discontinuidad es pequeña si la diferencia de índices no es muy grande.

Se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (A, B, C, D) cuya resolución queda supeditada a que se anule el siguiente determinante:

	A	B	C	D
E_z	$J_\rho(ua)$	0	$-K_\rho(wa)$	0
E_ϕ	$\frac{\beta\rho}{au^2} J_\rho(ua)$	$j \frac{\omega\mu_0}{u} \frac{dJ_\rho(ua)}{d(ua)}$	$\frac{\beta\rho}{aw^2} K_\rho(wa)$	$j \frac{\omega\mu_0}{w} \frac{dK_\rho(wa)}{d(wa)}$
H_z	0	$J_\rho(ua)$	0	$-K_\rho(wa)$
H_ϕ	$-j \frac{\omega\varepsilon_1}{u} \frac{dJ_\rho(ua)}{d(ua)}$	$\frac{\beta\rho}{au^2} J_\rho(ua)$	$-j \frac{\omega\varepsilon_2}{w} \frac{dK_\rho(wa)}{d(wa)}$	$\frac{\beta\rho}{aw^2} K_\rho(wa)$

Una de las cuatro incógnitas es arbitraria, y el resto dependientes de ella. Esto se debe a que la forma del modo debe ser independiente de la potencia que lleve

Resolviendo el determinante, se tiene que:

$$(f_{\rho} + g_{\rho})[k_{co}^2 f_{\rho} + k_{cl}^2 g_{\rho}] = \left(\frac{\beta \rho}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)^2$$

donde: $f_{\rho} = \frac{1}{uJ_{\rho}(ua)} \frac{dJ_{\rho}(ua)}{d(ua)}$ $g_{\rho} = \frac{1}{wK_{\rho}(wa)} \frac{dK_{\rho}(wa)}{d(wa)}$

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = \frac{1}{2}(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)) \quad \frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) \quad \frac{dK_n(x)}{dx} = -\frac{1}{2}(K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)) \quad \frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x)$$

Para resolver esta ecuación se estudian dos casos:

1) $\rho = 0$ **No existe variación de las componentes del campo con Φ**

$$(f_0 + g_0)[k_{co}^2 f_0 + k_{cl}^2 g_0] = 0$$

Esta ecuación tiene dos soluciones:

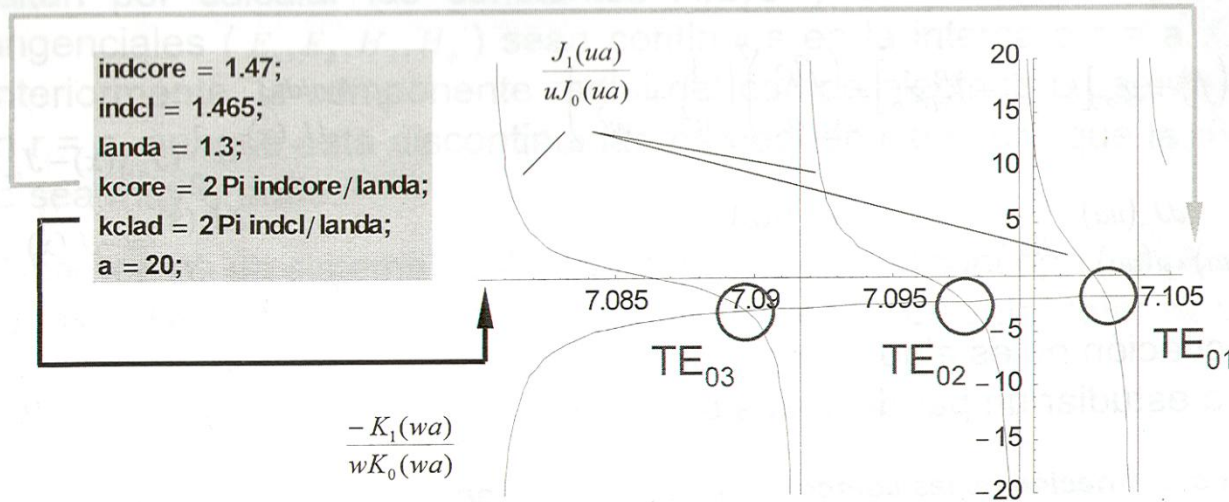
a) $(f_0 + g_0) = 0$



$$\frac{J_1(ua)}{uJ_0(ua)} + \frac{K_1(wa)}{wK_0(wa)} = 0$$

Se puede comprobar que para esta situación $E_z = 0$ (modos TE).

Las m soluciones de esta ecuación que cumplan la relación de modo guiado se denominaran **TE_{0m}**



Soluciones TE_{0m}
para una fibra de
20 micras de radio.

$$b) \quad [k_{co}^2 f_0 + k_{cl}^2 g_0] = 0 \quad \longrightarrow \quad n_{co}^2 \frac{J_1(ua)}{uJ_0(ua)} + n_{cl}^2 \frac{K_1(wa)}{wK_0(wa)} = 0$$

Para $H_z = 0$ (modos TM_{0m}).

Se resuelve de manera similar al caso anterior TE_{0m}.

$$2) \quad \rho > 0$$

Existe variación de las componentes del campo con Φ

En este caso, la componente del campo H_z y la E_z pueden ser diferentes de cero a la vez, por lo que a los modos solución de la estructura se los denomina ***modos híbridos***, y se les designa por HE o EH dependiendo de cuales son las componentes que dominan.

La solución de la ecuación trascendente es compleja.

Se pueden obtener las constantes de propagación de los modos aplicando las relaciones de recurrencia de Bessel y con una resolución numérica.

Se puede hacer una aproximación para cuando los índices de núcleo y cubierta sean muy parecidos, a esta condición se le conoce como **APROXIMACIÓN DE GUIADO DÉBIL**.

Las fibras ópticas comerciales cumplen generalmente esta relación, por lo tanto, se puede aproximar la ecuación trascendente a:

$$\Delta \rightarrow 0$$

$$k_{co}^2 \approx k_{cl}^2 \approx \beta^2 \qquad (f_\rho + g_\rho)^2 = \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2}\right)^2$$

Con esto se supone considerar que $E_z = H_z = 0$ y que sólo hay campo en el plano de sección de la fibra.

$$a) \quad (f_\rho + g_\rho) = \left(\frac{\rho}{a} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$$

Utilizando las relaciones de Bessel:

$$\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n+1}(x) \quad \frac{dK_n(x)}{dx} = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x) = \frac{n}{x} K_n(x) - K_{n+1}(x)$$

$$\frac{J_{\rho+1}(ua)}{uJ_\rho(ua)} + \frac{K_{\rho+1}(wa)}{wK_\rho(wa)} = 0 \quad \rho > 0$$

En este caso, operando sobre el determinante se observa que predominan las componentes del campo eléctrico: modos **EH_{pm}**.

$$b) \quad (f_\rho + g_\rho) = - \left(\frac{\rho}{a} \right) \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right)$$

Utilizando las relaciones anteriores y sabiendo que:

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

$$K_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} K_n(x) + K_{n-1}(x)$$

$$\frac{J_{\rho-1}(ua)}{uJ_\rho(ua)} - \frac{K_{\rho-1}(wa)}{wK_\rho(wa)} = 0 \quad \rho > 0$$

modos **HE_{pm}**.

Modos linealmente polarizados (LP)

$$\frac{J_p(ua)}{uJ_{p+1}(ua)} - \frac{K_p(wa)}{wK_{p+1}(wa)} = 0$$

Con $p = p-1$

$$\frac{J_p(ua)}{uJ_{p-1}(ua)} + \frac{K_p(wa)}{wK_{p-1}(wa)} = 0$$

Con $p = p+1$

Condiciones ***equivalentes***
para el mismo orden p

Para las ecuaciones diferentes tipos de modos cumplen la misma ecuación:

Modos HE_{1m}

$$\frac{J_0(ua)}{uJ_1(ua)} - \frac{K_0(wa)}{wK_1(wa)} = 0$$

$LP_{0m} \rightarrow HE_{1m}$

Modos $TE_{0m}, TM_{0m}, HE_{2m}$

$$\frac{J_1(ua)}{uJ_0(ua)} + \frac{K_1(wa)}{wK_0(wa)} = 0$$

$LP_{1m} \rightarrow TE_{0m} + TM_{0m} + HE_{2m}$

Modos $EH_{p-1,m}, HE_{p+1,m}$

$$\frac{J_p(ua)}{uJ_{p-1}(ua)} + \frac{K_p(wa)}{wK_{p-1}(wa)} = 0$$

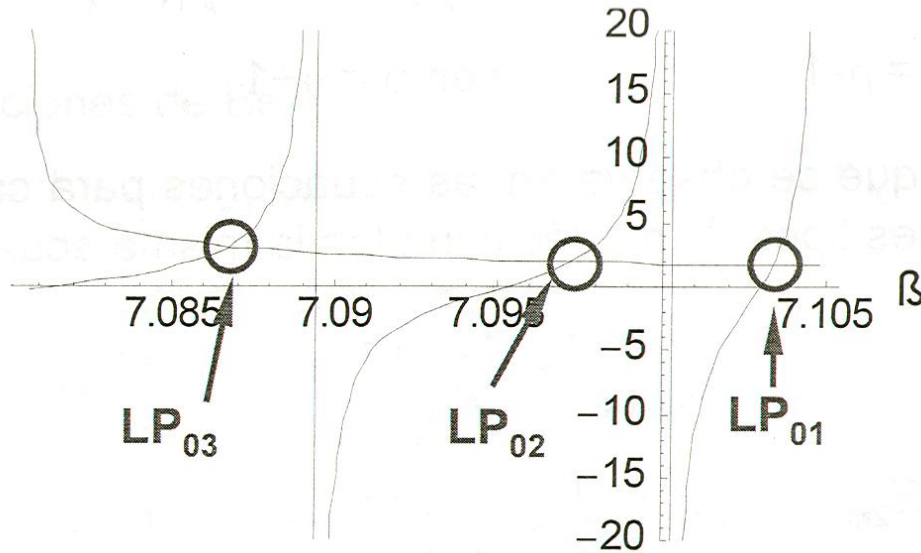
$LP_{pm} \rightarrow EH_{p-1,m} + HE_{p+1,m}$

modos linealmente polarizados (LP): los que cumplen la misma ecuación. Combinación de modos con constantes de propagación idénticas.

Componiendo adecuadamente estos modos LP, se puede conseguir una vibración del vector campo en un plano (linealmente polarizados).

LP_{0m}

$a = 15 \mu m$

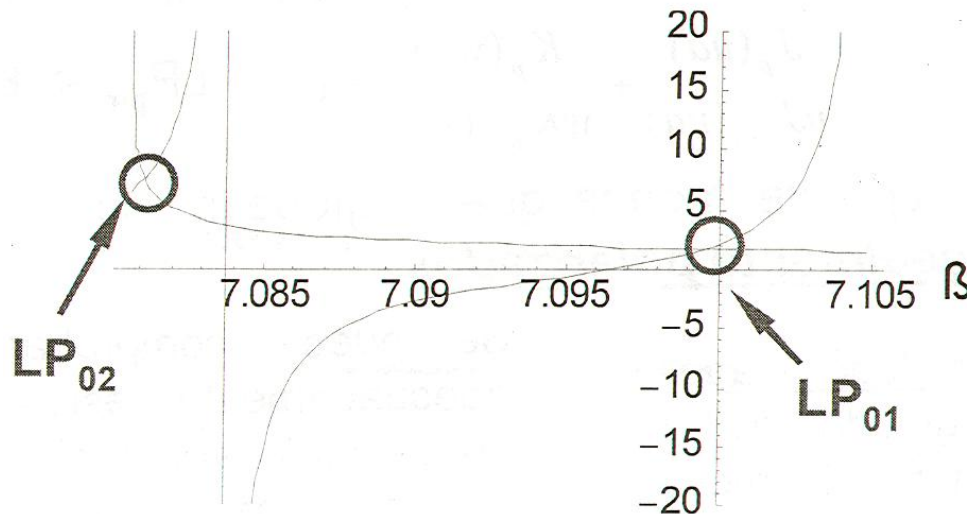


El modo LP_{01} es siempre el modo con mayor índice efectivo, y por eso se le denomina **modo fundamental**.

Este modo no se corta.

LP_{0m}

$a = 7 \mu m$



El resto de los modos $LP_{p,m}$ se calculan de la misma forma y se cortan dependiendo del valor de V .

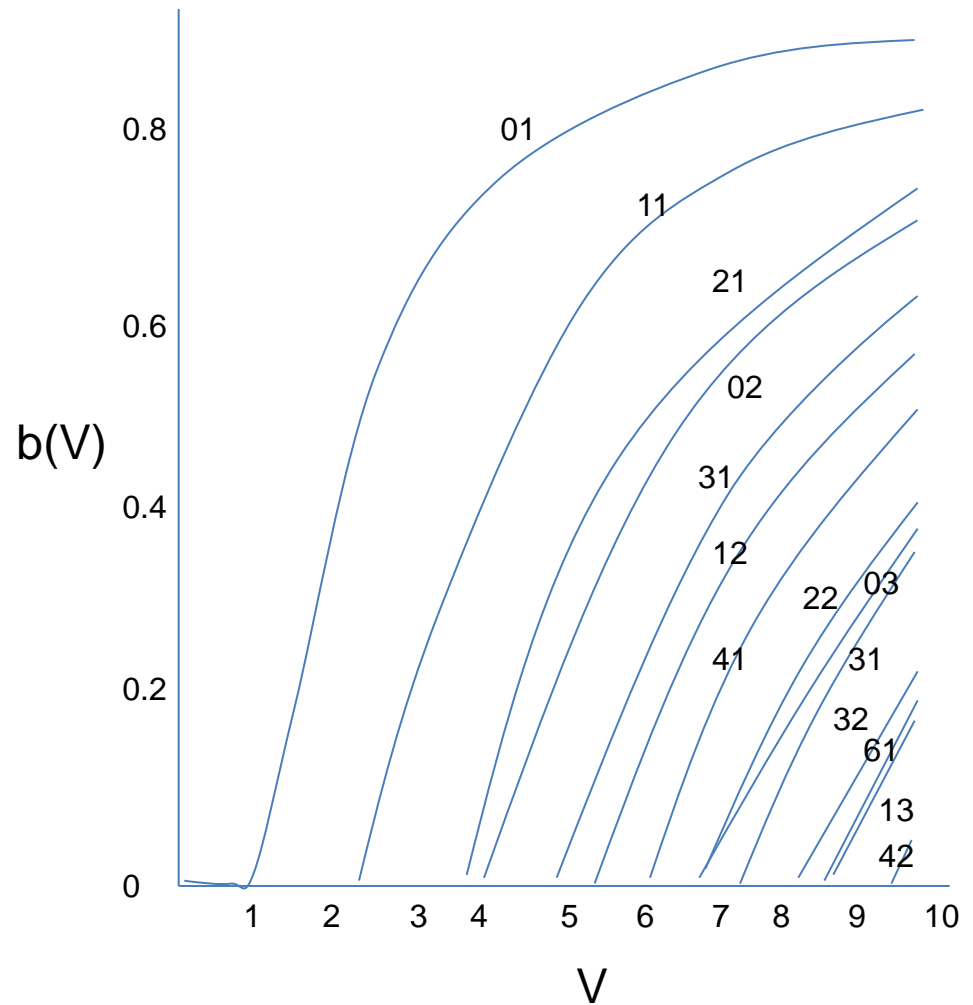
La frecuencia normalizada se define:

$$V = k_0 a \sqrt{n_{co}^2 - n_{cl}^2} \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Y al índice normalizado:

$$b = \frac{n_{eff}^2 - n_{cl}^2}{n_{co}^2 - n_{cl}^2}$$

Para obtener las **curvas generales**



Las condiciones de corte para modos $LP_{p,m}$ es:

Modos con $p = 0 \rightarrow$ ceros de la función $J_1(V_c) = 0$

Modos con $p = 1 \rightarrow$ ceros de la función $J_0(V_c) = 0$

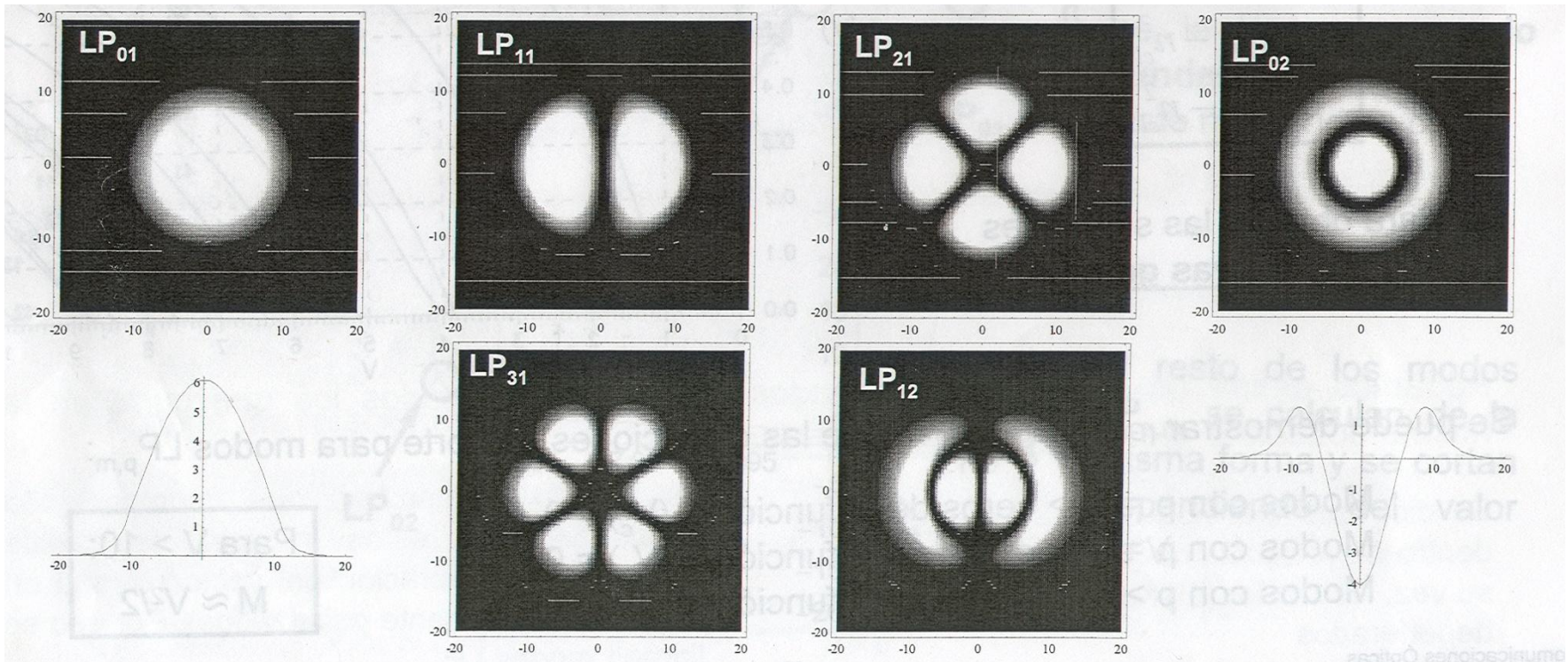
Modos con $p > 1 \rightarrow$ ceros de la función $J_{p-1}(V_c) = 0$

Para $V > 10$:

$$M \approx V^2/2$$

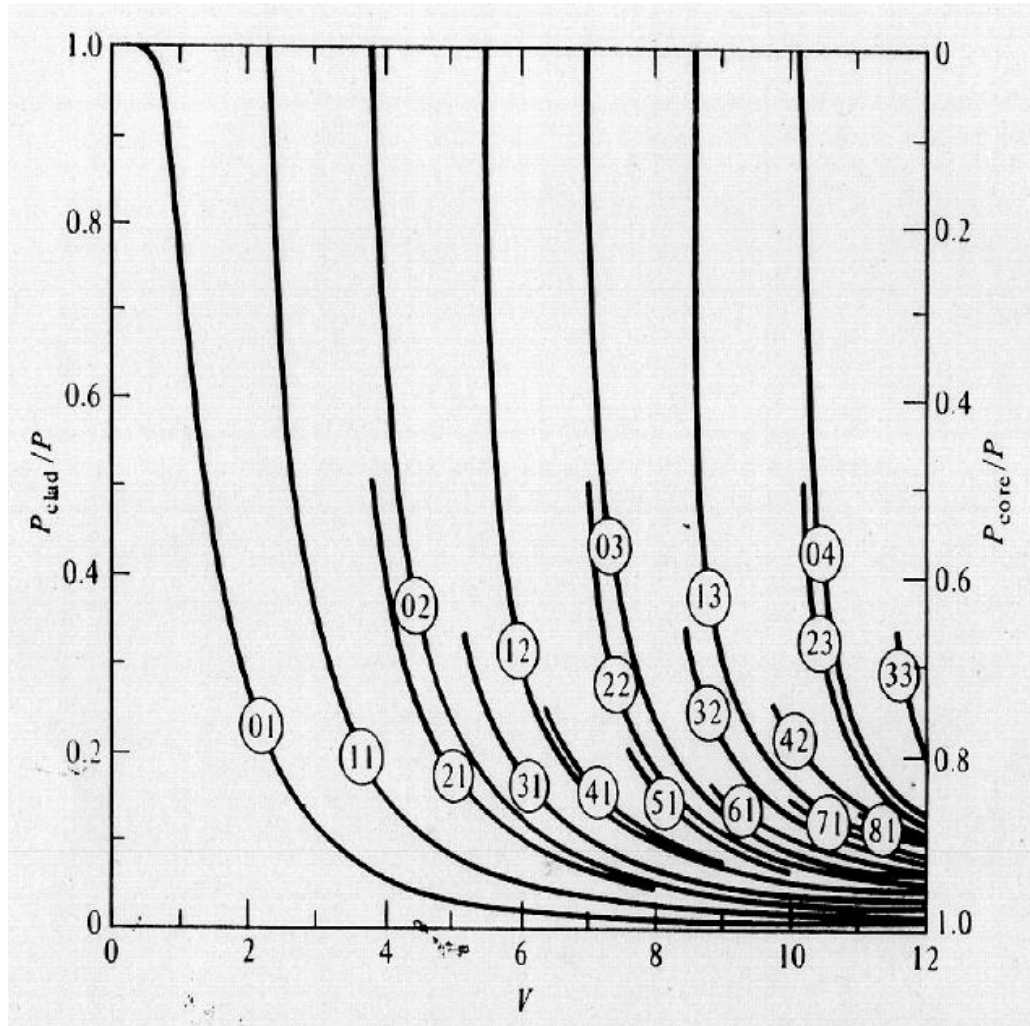
El corte del modo LP_{01} se produce para $V = 2.405 \rightarrow$ **condición de propagación monomodo en fibras ópticas cilíndricas de salto de índice.**

La forma de los campos (intensidad del campo) para algunos de los modos que pueden propagarse en una fibra óptica con $V = 7$



Cada uno de los modos solución de la estructura cilíndrica propaga su energía entre el núcleo y la cubierta. La fracción de potencia guiada por el núcleo se puede obtener a partir de:

$$\frac{P_{co}}{P_{tot}} = \frac{\int_{co} S_z dA}{\int S_z dA} \quad \text{con} \quad S_z = \frac{1}{2} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{z} = \frac{1}{2} (E_r H_\phi^* - E_\phi H_r^*)$$

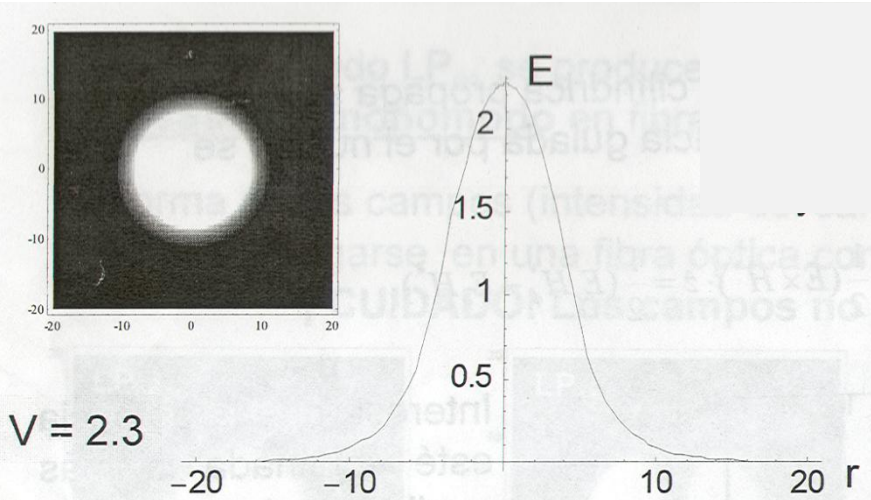


Es conveniente que la potencia esté confinada principalmente en la región del núcleo.

A mayor longitud de onda, menor es el confinamiento del modo.

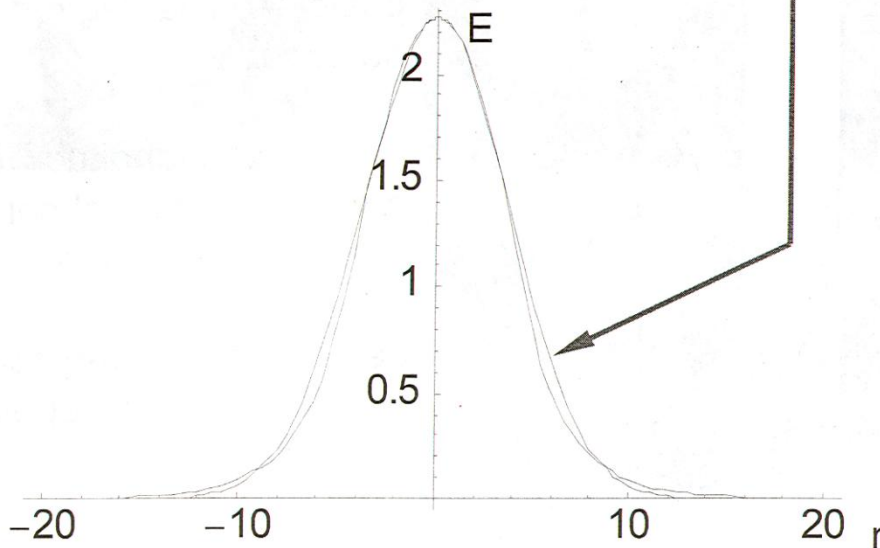
Las fibras monomodo se diseñan para operar cerca del corte.

Fibra monomodo: diámetro de campo modal



El modo LP_{01} (fibra monomodo) presenta una forma casi-*gaussiana del campo eléctrico*. Se puede aproximar al campo como:

$$E = E_0 e^{-(r/w_0)^2}$$



Al valor de $2w_0$ se le denomina **diámetro de campo modal**, y es un parámetro importante a definir en las fibras ópticas, el cual da información del tamaño del campo guiado, que es diferente del radio de la fibra.

La aproximación gaussiana permite realizar un calculo rápido para la estimación de pérdidas debido a desalineamientos de los núcleos de fibras ópticas.

Una aproximación para calcular el valor de w_0 (Marcuse, 1977):

$$\frac{w_0}{a} \approx 0.65 + \frac{1.619}{V^{3/2}} + \frac{2.879}{V^6} \quad \text{para } 0.8 \leq V \leq 2.5$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} n_{co} &= 1.4542; & \lambda &= 1.3; \\ n_{cl} &= 1.45; & V &= 2.40208; \\ a &= 4.5; & w_0 &= 4.95; \end{aligned}$$

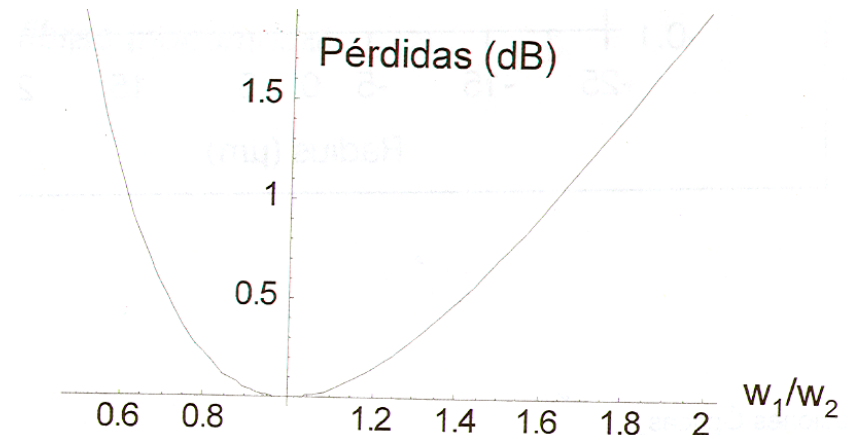
El valor del diámetro de campo modal en fibras monomodo está estandarizado a valores entre 4.5 y 5 micras para evitar problemas de pérdidas por empalmar diferentes fibras ópticas. Si un modo LP_{01} en una fibra óptica con diámetro de campo modal w_1 excita un modo en otra fibra que tiene w_2 la potencia acoplada viene determinada por:

$$T = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_1 E_2^* dx dy \right|^2$$

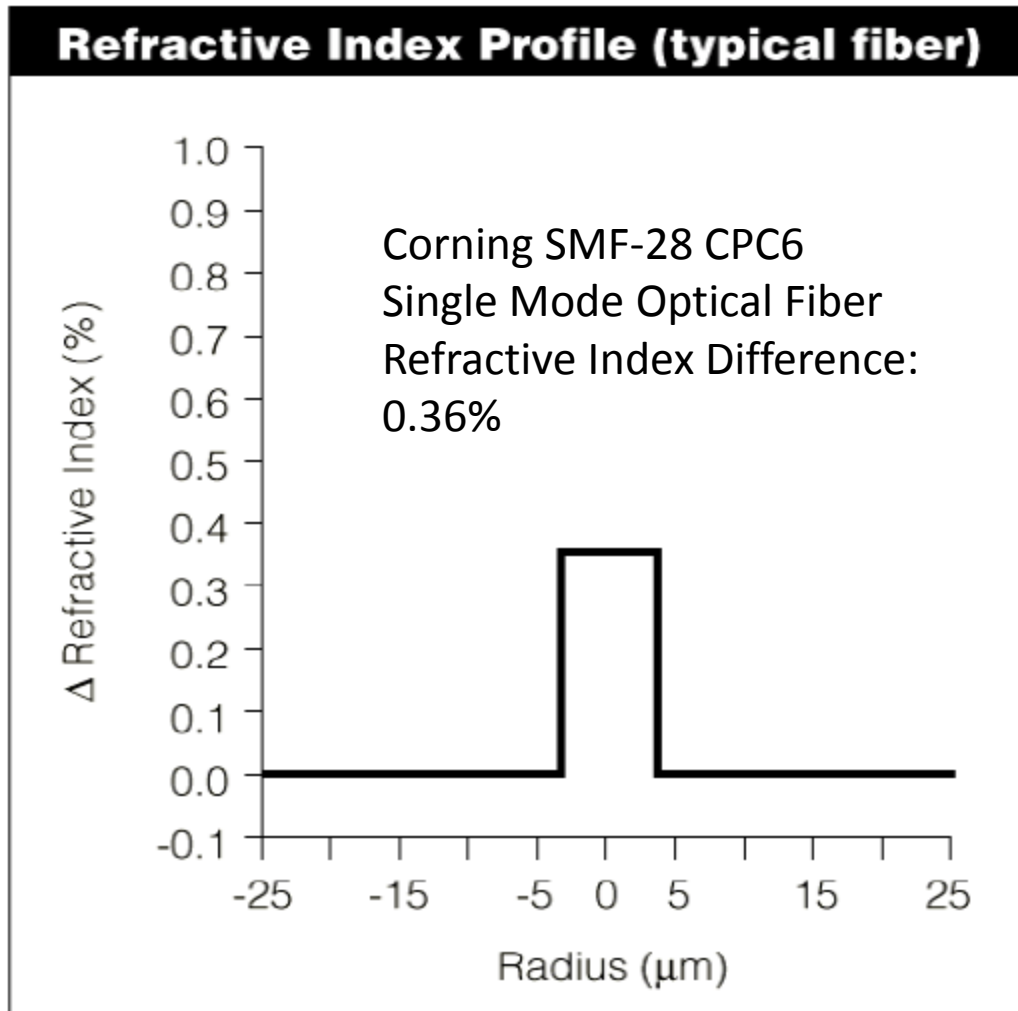
con

$$E_{1,2}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_{1,2}} e^{-(x^2 + y^2 / w_{1,2}^2)}$$

$$T = \left(\frac{2w_1 w_2}{w_1^2 + w_2^2} \right)^2$$



Fibras ópticas monomodo comerciales



Core Diameter:
8.3 μm

Numerical aperture:
0.13

NA was measured at the one percent power angle of a one-dimensional far-field scan at 1310 nm

Cable Cutoff Wavelength (λ_{ccf})
 $\lambda_{\text{ccf}} < 1260$ nm

Mode-Field Diameter
8.8 to 9.8 μm at 1310 nm
9.5 to 11.5 μm at 1550 nm