Universidad Autónoma de Baja California

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño

INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

ETAPA BÁSICA

APUNTES

13180 CÁLCULO AVANZADO

Prof. E. Efren García G.

Ensenada, B.C. México 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. RECTAS EN $\Re^3$

Una línea en el plano xy se determina cuando se dan un punto sobre la línea y la dirección de ésta (su pendiente o ángulo de inclinación). La ecuación de la línea se puede escribir entonces con la forma punto-pendiente.

De igual forma, una línea en el espacio tridimensional se determina cuando se conoce un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ sobre L y la dirección de L. En tres dimensiones la dirección de una línea se describe convenientemente por un vector, así sea $\vec{v}$ un vector paralelo a L. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario sobre L y sean $\vec{r_o}$ y $\vec{r}$ los vectores de posición de P_o y P (es decir, tiene representaciones $\vec{OP_o}$ y $\vec{OP}$). Si $\vec{a}$ es el vector con representación $\vec{P_oP}$, como en la figura 1, entonces la ley del triángulo para la suma de vectores da $\vec{r} = \vec{r_o} + \vec{a}$.

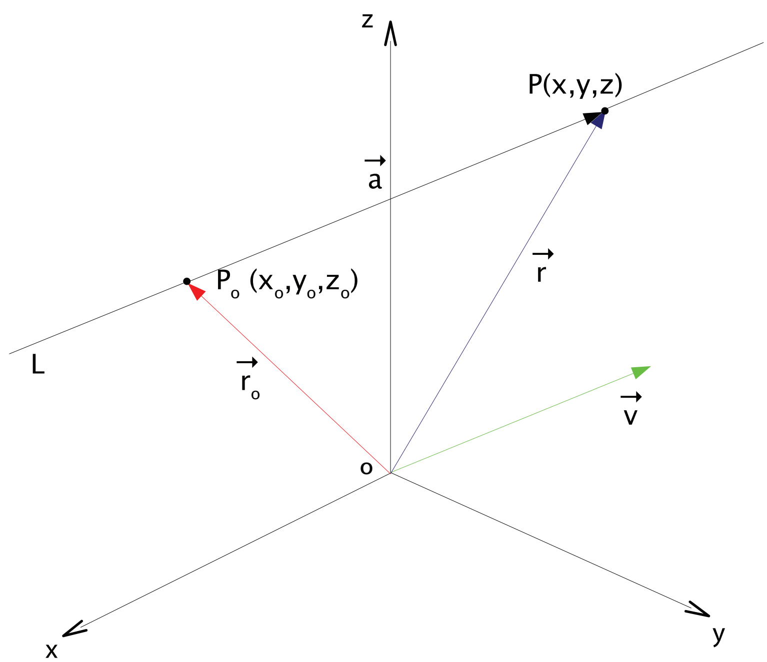

FIG. 1: Línea recta en $\Re^3$

Pero puesto que $\vec{a}$ y $\vec{v}$ son vectores paralelos, hay un escalar t tal que $\vec{a} = t\vec{v}$. Así

$$\vec{r} = \vec{r_o} + t\vec{v}, \tag{1}$$

es una **ecuación vectorial** de L. Cada valor del **parámetro** t da el vector de posición $\vec{r}$ de un punto sobre L. En otras palabras, cuando t varía, la línea es trazada por la punta del vector $\vec{r}$. Como indica la figura 2, los valores positivos de t, corresponden a puntos sobre L que están sobre un lado de P_o, mientras que los valores negativos de t corresponden a puntos que están sobre el otro lado de P_o.

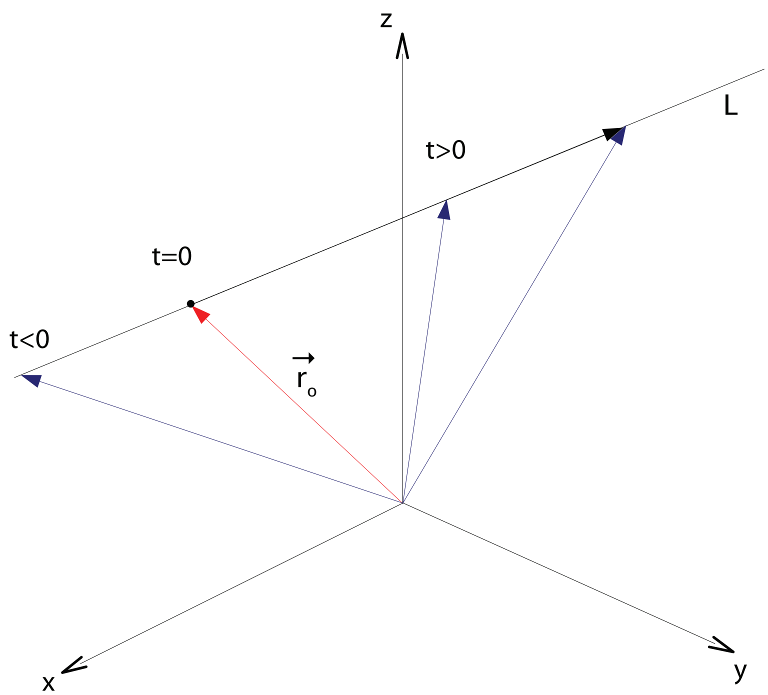

FIG. 2: Cuando t varía, la línea es trazada por la punta del vector $\vec{r}$

Si el vector $\vec{v}$ que da la dirección de la línea L se escribe en forma de componentes como $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, entonces se tiene $t\vec{v} = (tv_x, tv_y, tv_z)$. Se puede escribir también $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r_o} = (x_o, y_o, z_o)$, por lo tanto la ecuación vectorial (1) se transforma en

$$(x, y, z) = (x_o + tv_x, y_o + tv_y, z_o + tv_z). \tag{2}$$

Dos vectores son iguales si y sólo si las componentes correspondientes son iguales. Por lo tanto, se tienen tres ecuaciones escalares:

$$x = x_o + tv_x, \qquad y = y_o + tv_y, \qquad z = z_o + tv_z \tag{3}$$

donde $t \in \Re$. Estas ecuaciones se llaman **ecuaciones paramétricas** de la línea L que pasa por el punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Cada valor del parámetro t da un punto (x, y, z) en L.

Otra forma de escribir una línea L es eliminar el parámetro t de las ecuaciones (3). Si ninguna de las literales a, b o c es 0, se puede resolver cada una de estas ecuaciones para t, igualar los resultados y obtener

$$\frac{x - x_o}{v_x} = \frac{y - y_o}{v_y} = \frac{z - z_o}{v_z} \tag{4}$$

Estas eciaciones se llaman **ecuaciones simétricas** de L.

Dos rectas L_1 y L_2 con vectores direccionales $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ respectivamente, son:

(a) **Perpendiculares**, si $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$.

(b) **Paralelas**, si $\vec{v_2} = k\,\vec{v_1}$ para algún escalar $k \neq 0$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. PLANOS.

Un plano en el espacio se determina por un punto $P_o(x_o, y_o, z_o)$ en el plano y un vector $\vec{n}$ **perpendicular** al plano. Este vector ortogonal $\vec{n}$ se llama **vector normal**. Sea $P(x, y, z)$ un punto arbitrario en el plano, y sean $\vec{r_o}$ y $\vec{r}$ los vectores de posición de P_o y P. Entonces el vector $\vec{r} - \vec{r_o}$ se representa por $\vec{P_oP}$. (Véase figura 1).

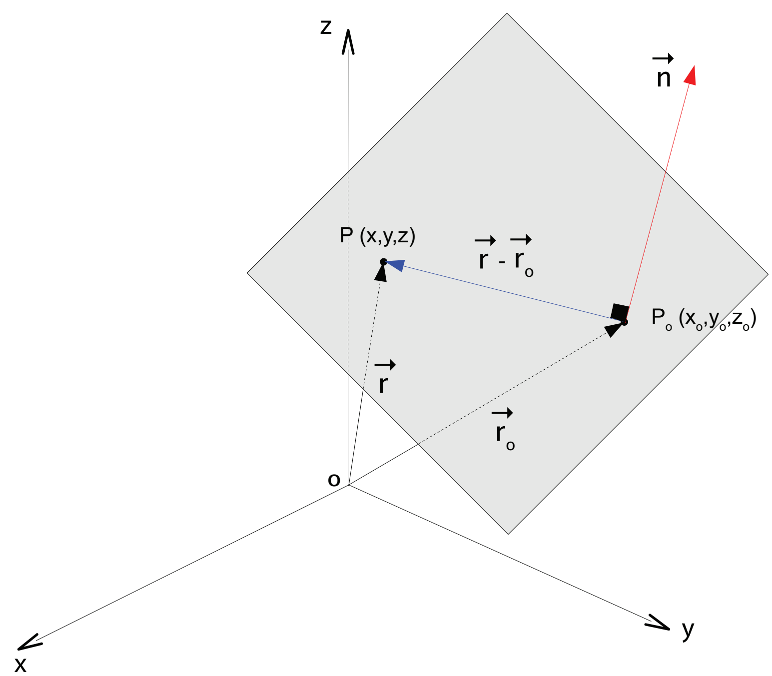

FIG. 1: Plano

El vector normal $\vec{n}$ es ortogonal a todo vector en el plano dado. En particular, $\vec{n}$ es ortogonal a $\vec{r} - \vec{r_o}$, por lo tanto, se tiene

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_o}) = 0 \tag{1}$$

que se puede reescribir

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \vec{r_o} \tag{2}$$

La ecuación 1 o la ecuación 2 reciben el nombre de **ecuación vectorial del plano**.

Para obtener una ecuación escalar del plano, se escribe $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, $\vec{r} = (x, y, z)$ y $\vec{r_o} = (x_o, y_o, z_o)$. Entonces la ecuación vectorial 1 se transforma en

$$(n_x, n_y, n_z) \cdot (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = 0 \tag{3}$$

o bien

$$n_x(x - x_o) + n_y(y - y_o) + n_z(z - z_o) = 0 \tag{4}$$

La ecuación 4 es la **ecuación escalar del plano que pasa por el punto** $P_o(x_o, y_o, z_o)$ **con vector normal** $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. COORDENADAS CILÍNDRICAS CIRCULARES (ρ, ϕ, z)

Un punto P en coordenadas cilíndricas se representa como (ρ, ϕ, z) y es como se muestra en la Fig. 1. Al observar detenidamente la figura se advierte la definición de cada variable espacial: ρ es el radio del cilindro que pasa por P o la distancia radial desde el eje z, el ángulo ϕ se denomina ángulo *azimutal* y se mide desde el eje x en el plano xy y z tiene el mismo significado que en el sistema cartesiano. Los intervalos de estas variables son:

$$0 \leqslant \rho \leqslant \infty$$

$$0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$$

$$-\infty \leqslant z \leqslant \infty \tag{1}$$

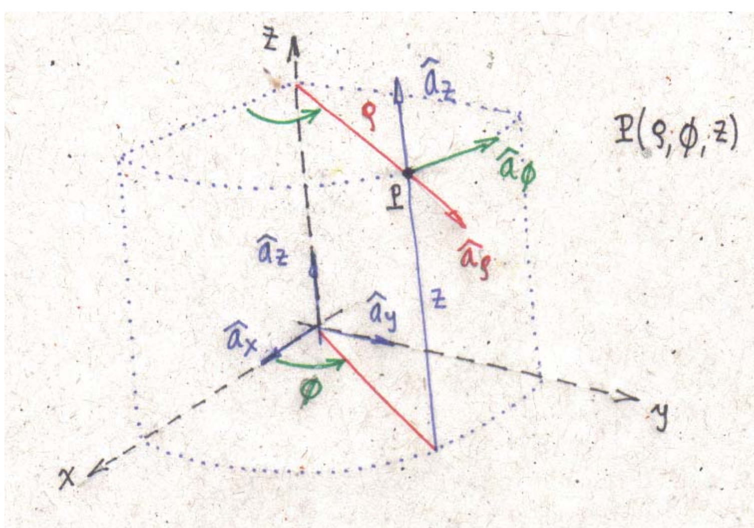

FIG. 1: Coordenada cilíndrica del punto P

En coordenadas cartesianas un vector $\vec{A}$ se expresa como:

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z. \tag{2}$$

Análogamente, en coordenadas cilíndricas un vector $\vec{A}$ se puede expresar por:

$$\vec{A} = (A_\rho, A_\phi, A_z) = A_\rho\hat{a}_\rho + A_\phi\hat{a}_\phi + A_z\hat{a}_z, \tag{3}$$

donde $\hat{a}_\rho$, $\hat{a}_\phi$ y $\hat{a}_z$ son vectores unitarios en las direcciones ρ, ϕ y z como se ilustra en la Fig. 1. Nótese que $\hat{a}_\phi$ no está en grados; representa al vector unitario de $\vec{A}$ en la dirección del ángulo ϕ.

La magnitud de $\vec{A}$ es

$$|\vec{A}| = ({A_\rho}^2 + {A_\phi}^2 + {A_z}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

Nótese que los vectores unitarios $\hat{a}_\rho$, $\hat{a}_\phi$ y $\hat{a}_z$ son mutuamente perpendiculares ya que nuestro sistema de coordenadas es ortogonal; $\hat{a}_\rho$ apunta en la dirección de incremento de ρ, $\hat{a}_\phi$ en la dirección de incremento de ϕ y $\hat{a}_z$ en la dirección positiva de z. Así

$$\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_\rho = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z = 1 \tag{5a}$$

$$\hat{a}_\rho \cdot \hat{a}_\phi = \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z = \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\rho = 0 \tag{5b}$$

$$\hat{a}_\rho \times \hat{a}_\phi = \hat{a}_z \tag{5c}$$

$$\hat{a}_\phi \times \hat{a}_z = \hat{a}_\rho \tag{5d}$$

$$\hat{a}_z \times \hat{a}_\rho = \hat{a}_\phi \tag{5e}$$

Las relaciones entre las variables (x, y, z) del sistema de coordenas cartesiano y las variables (ρ, ϕ, z) del sistema cilíndrico se obtienen fácilmente con base a la Fig. 2, de la manera siguiente:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \phi = \arctan\frac{y}{x}, \qquad z = z \tag{6}$$

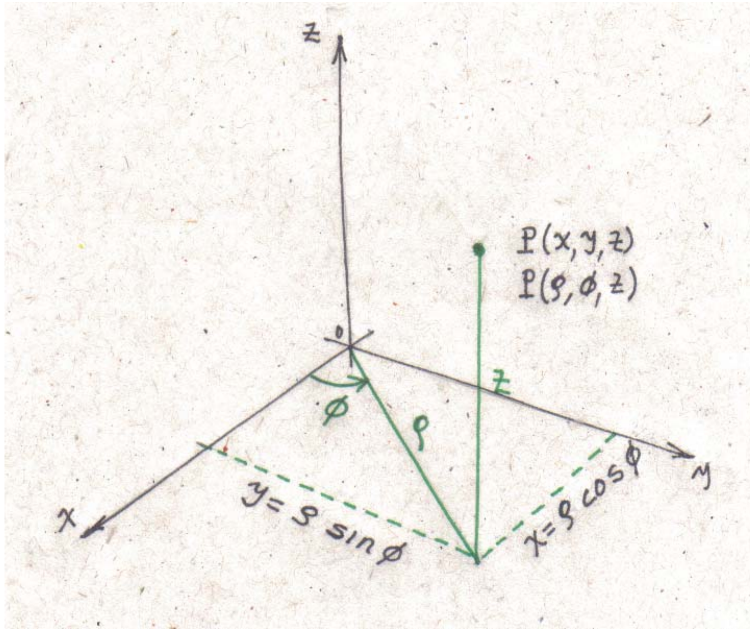

FIG. 2: Relaciones entre (x, y, z) y (ρ, ϕ, z).

o

$$x = \rho \cos \phi, \qquad y = \rho \sin \phi, \qquad z = z \tag{7}$$

Mientras que la ecuación (6) se aplica a la transformación de un punto de coordenas cartesianas (x, y, z) a cilíndricas (ρ, ϕ, z), la ecuación (7) se aplica a la transformación de (ρ, ϕ, z) $\rightarrow (x, y, z)$.

Las relaciones geométricas entre $(\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z)$ y $(\hat{a}_\rho, \hat{a}_\phi, \hat{a}_z)$ se obtienen geométricamente [1] a partir de la Fig. 3.

$$\begin{aligned} \hat{a}_x &= \cos \phi \quad \hat{a}_\rho - \sin \phi \quad \hat{a}_\phi \\ \hat{a}_y &= \sin \phi \quad \hat{a}_\rho + \cos \phi \quad \hat{a}_\phi \\ \hat{a}_z &= \hat{a}_z \end{aligned} \tag{8}$$

o

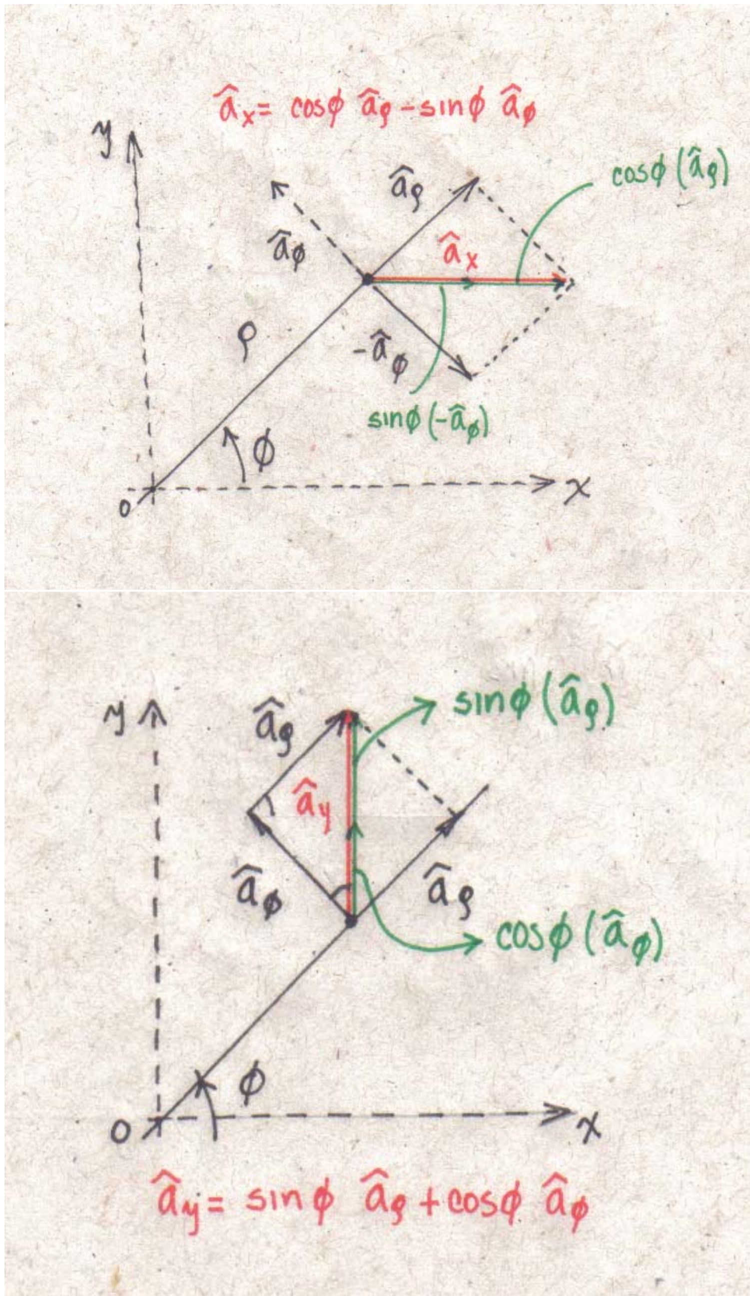

FIG. 3: Componentes cilíndricas de $\hat{a}_x$ y $\hat{a}_y$.

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_\rho &= \cos\phi \quad \hat{a}_x + \sin\phi \quad \hat{a}_y \\
\hat{a}_\phi &= -\sin\phi \quad \hat{a}_x + \cos\phi \quad \hat{a}_y \\
\hat{a}_z &= \hat{a}_z
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Finalmente, las relaciones entre (A_x, A_y, A_z) y (A_ρ, A_ϕ, A_z) se obtienen mediante la simple sustitución de la ecuación (8) en la ecuación (2) y el agrupamiento de términos. Así,

$$\vec{A} = (A_x \cos\phi + A_y \sin\phi)\hat{a}_\rho + (-A_x \sin\phi + A_y \cos\phi)\hat{a}_\phi + A_z \hat{a}_z \tag{10}$$

o

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_x \cos\phi + A_y \sin\phi \\ A_\phi &= -A_x \sin\phi + A_y \cos\phi \\ A_z &= A_z \end{aligned} \tag{11}$$

En forma matricial, la transformación del vector $\vec{A}$ de (A_x, A_y, A_z) a (A_ρ, A_ϕ, A_z) se expresa como

$$\begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

La inversa de la transformación $(A_\rho, A_\phi, A_z) \rightarrow (A_x, A_y, A_z)$ se obtiene así:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_x \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

o directamente de las ecuaciones (3) y (9). En consecuencia,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_x \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

Otra manera de obtener estas ecuaciones consiste en emplear el producto punto, por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_x \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\rho & \hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi & \hat{a}_x \cdot \hat{a}_z \\ \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\rho & \hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi & \hat{a}_y \cdot \hat{a}_z \\ \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\rho & \hat{a}_z \cdot \hat{a}_\phi & \hat{a}_z \cdot \hat{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_\rho \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

---

[1] Sadiku, M. (2007). Elements of Electromagnetics. USA: Oxford University Press, Inc.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. COORDENADAS ESFÉRICAS (r, θ, ϕ)

Un punto P puede representarse a partir de (r, θ, ϕ) como se ilustra en la Fig. 1. De la figura se observa que r es la distancia del origen al punto P o el radio de una esfera centrada en el origen y que pasa por P, θ (llamado *colatitud*) es el ángulo entre el eje z y el vector de posición de P, y ϕ se mide desde el eje x (igual que el ángulo *azimutal* en coordenadas cilíndricas). De acuerdo con estas definiciones, los intervalos de estas variables son:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant r \leqslant \infty \\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi \end{aligned} \tag{1}$$

En coordenadas cartesianas, un vector $\vec{A}$ se expresa por

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z, \tag{2}$$

en coordenadas esféricas, un vector $\vec{A}$ puede expresarse como

$$\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi) = A_r\hat{a}_r + A_\theta\hat{a}_\theta + A_\phi\hat{a}_\phi. \tag{3}$$

donde $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\theta$ y $\hat{a}_\phi$ son vectores unitarios a lo largo de las direcciones r, θ y ϕ. La magnitud de $\vec{A}$ es

$$|\vec{A}| = ({A_r}^2 + {A_\theta}^2 + {A_\phi}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4}$$

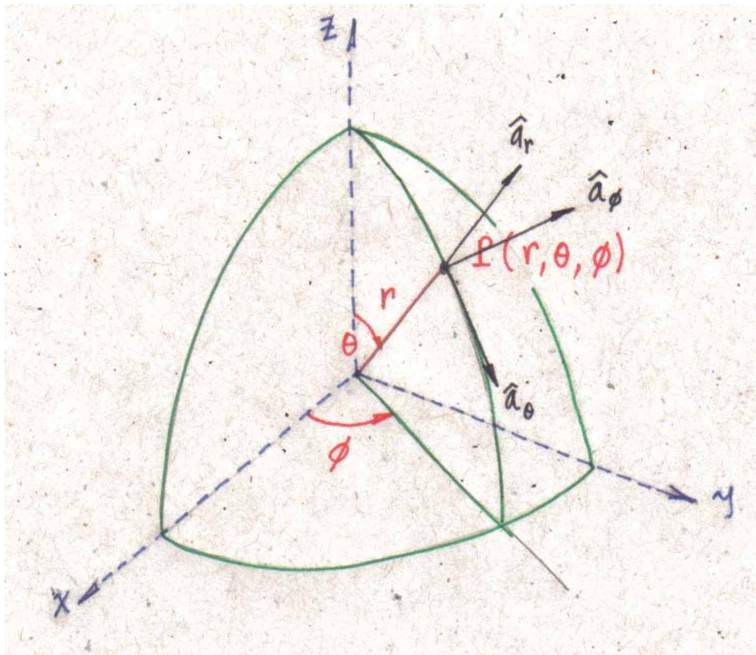

FIG. 1: Punto P y vectores unitarios en coordenadas esféricas.

Los vectores unitarios $\hat{a}_r$, $\hat{a}_\theta$ y $\hat{a}_\phi$ son mutuamente ortogonales; $\hat{a}_r$ sigue la dirección a lo largo del radio o la dirección de incremento de r, $\hat{a}_\theta$ sigue la dirección de incremento de θ y $\hat{a}_\phi$ sigue la dirección de incremento de ϕ. Por tanto,

$$\begin{aligned}\hat{a}_r\cdot\hat{a}_r=\hat{a}_\theta\cdot\hat{a}_\theta=\hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_\phi=1\\ \hat{a}_r\cdot\hat{a}_\theta=\hat{a}_\theta\cdot\hat{a}_\phi=\hat{a}_\phi\cdot\hat{a}_r=0\\ \hat{a}_r\times\hat{a}_\theta=\hat{a}_\phi\\ \hat{a}_\theta\times\hat{a}_\phi=\hat{a}_r\\ \hat{a}_\phi\times\hat{a}_r=\hat{a}_\theta\end{aligned} \tag{5}$$

Las variables espaciales (x,y,z) en las coordenas cartesianas pueden relacionarse con las variables (r,θ,ϕ) de un sistema de coordenadas esférico. De la Fig. 2 se deduce claramente que

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\qquad \theta=\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\qquad \phi=\arctan\frac{y}{x} \tag{6}$$

o

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta \tag{7}$$

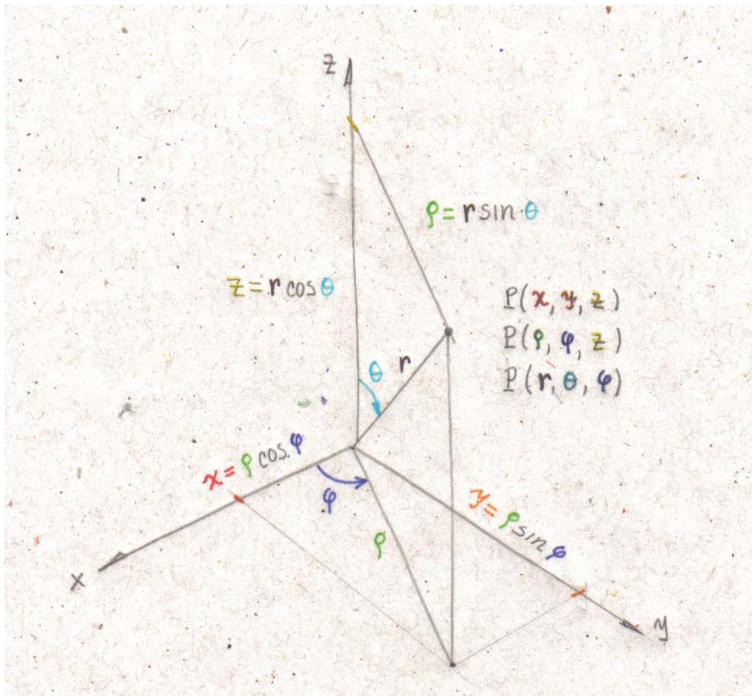

FIG. 2: Relación entre las variables espaciales (x, y, z), (ρ, ϕ, θ) y (r, θ, ϕ).

En la ecuación (6) tenemos la transformación del punto $(x, y, z) \to (r, \theta, \phi)$, y en la ecuación (7) la transformación de $(r, \theta, \phi) \to (x, y, z)$.

De la Fig. 3 se deduce la relación de los vectores unitarios $(\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z)$ y $(\hat{a}_r, \hat{a}_\theta, \hat{a}_\phi)$ de la siguiente manera [1]

$$\begin{aligned} \hat{a}_x &= \sin\theta\cos\phi \quad \hat{a}_r + \cos\theta\cos\phi \quad \hat{a}_\theta - \sin\phi \quad \hat{a}_\phi \\ \hat{a}_y &= \sin\theta\sin\phi \quad \hat{a}_r + \cos\theta\sin\phi \quad \hat{a}_\theta + \cos\phi \quad \hat{a}_\phi \\ \hat{a}_z &= \cos\theta \quad \hat{a}_r - \sin\theta \quad \hat{a}_\theta \end{aligned} \tag{8}$$

o

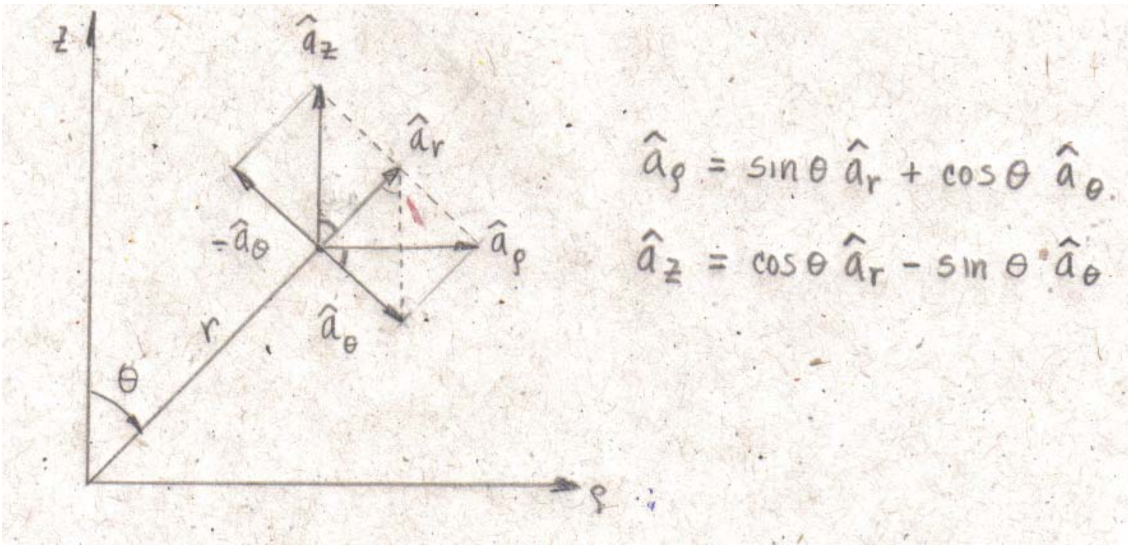

FIG. 3: Transformaciones de un vector unitario para coordenadas cilíndricas y esféricas.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_r &= \sin\theta\cos\phi \quad \hat{a}_x + \sin\theta\sin\phi \quad \hat{a}_y + \cos\theta \quad \hat{a}_z \\
\hat{a}_\theta &= \cos\theta\cos\phi \quad \hat{a}_x + \cos\theta\sin\phi \quad \hat{a}_y - \sin\theta \quad \hat{a}_z \\
\hat{a}_\phi &= -\sin\phi \quad \hat{a}_x + \cos\phi \quad \hat{a}_y
\end{aligned} \tag{9}$$

Las componentes del vetor $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ se relacionan mediante la sustitición de la ecuación (8) en la ecuación (2) y el agrupamiento de términos. Así,

$$\begin{aligned}
\vec{A} = &\ (\ A_x\sin\theta\cos\phi + A_y\sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta\ )\hat{a}_r \\
&+ (\ A_x\cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta\ )\hat{a}_\theta \\
&+ (\ -A_x\sin\phi + A_y\cos\phi\ )\hat{a}_\phi
\end{aligned} \tag{10}$$

de lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
A_r &= A_x \sin\theta\cos\phi + A_y \sin\theta\sin\phi + A_z\cos\theta \\
A_\theta &= A_x \cos\theta\cos\phi + A_y\cos\theta\sin\phi - A_z\sin\theta \\
A_\phi &= -A_x\sin\theta + A_y\cos\phi
\end{aligned} \tag{11}$$

En forma matricial, la transformación del vector $(A_x, A_y, A_z) \to (A_r, A_\theta, A_\phi)$ se efectúa de acuerdo con

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

La transformación inversa $(A_r, A_\theta, A_\phi) \to (A_x, A_y, A_z)$ se obtiene de forma similar, o a partir de la ecuación (8). Así

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix}$$

Alternativamente, podemos obtener estas ecuaciones usando el producto punto. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_r \cdot \hat{a}_x & \hat{a}_r \cdot \hat{a}_y & \hat{a}_r \cdot \hat{a}_z \\ \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_x & \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_y & \hat{a}_\theta \cdot \hat{a}_z \\ \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_x & \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_y & \hat{a}_\phi \cdot \hat{a}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

La distancia d entre dos puntos con vectores de posición $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ es generalmente dada por

$$d = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \tag{12}$$

o

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \text{ (en coordenadas cartesianas)} \tag{13}$$

$$d^2 = \rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + (z_2 - z_1)^2 \text{ (en coordenadas cilíndrica)} \tag{14}$$

$$d^2 = r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2 \cos\theta_2 \cos\theta_1 - 2r_1r_2 \sin\theta_2 \sin\theta_1 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\text{(en coordenadas esféricas)} \tag{15}$$

[1] Sadiku, M. (2007). Elements of Electromagnetics. USA: Oxford University Press, Inc.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. SUPERFICIES DE COORDENADAS CONSTANTES

En los sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas es fácil generar superficies **manteniendo constante** una de las variables de las coordenadas y permitiendo que las otras dos varíen.

• Si en el **sistema cartesiano** x se mantiene constante y se permite que y y z varíen, se genera un plano infinito. De esto se deduce la posibilidad de los planos infinitos siguientes:

$$x = \text{constante}$$
$$y = \text{constante}$$
$$z = \text{constante}$$

Los cuales son perpendiculares a los ejes x, y y z, respectivamente, como se muestra en la Fig. 1.

La intersección de dos planos es una línea. Por ejemplo,

$$x = \text{constante}, \qquad y = \text{constante}$$

es la línea RPQ paralela al eje z.

La intersección de tres planos es un punto. Por ejemplo,

$$x = \text{constante}, \qquad y = \text{constante}, \qquad z = \text{constante}$$

es el punto $P(x, y, z)$.

De este modo, el punto P podría definirse como la intersección de tres planos ortogonales infinitos. Si P es $(1, -5, 3)$, entonces P es la intersección de los planos, $x = 1$, $y = -5$ y $z = 3$.

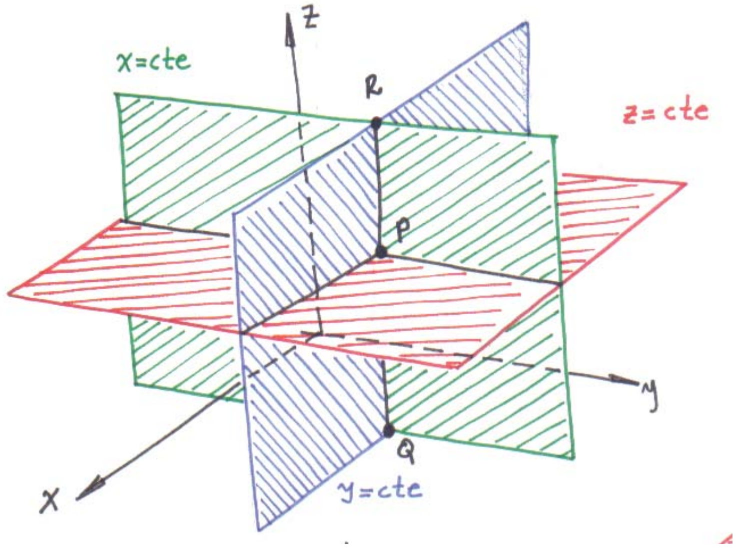

FIG. 1: Superficies x =cte., y =cte., y z =cte.

• En coordenadas cilíndricas es posible generar superficies ortogonales de la misma manera. Las superficies

$$\rho = \text{constante}$$
$$\phi = \text{constante}$$
$$z = \text{constante}$$

se ilustran en la Fig. 2, en la que se advierte fácilmente que $\rho =$ constante es un cilíndro circular; $\phi =$ constante es un plano semiinfinito con su borde a lo largo del eje z, y $z =$ constante es el mismo plano infinito que en el sistema cartesiano.

La intersección de dos superficies da lugar a una línea o un círculo. Así,

$$z = \text{constante}, \qquad \rho = \text{constante}$$

es un círculo QPR de radio ρ, mientras que $z =$ constante, $\phi =$ constante es una línea semiinfinita. Un punto es la intersección de las tres superficies. Por tanto,

$$\rho = 2, \qquad \phi = 60^o, \qquad z = 5$$

es el punto $P(2, 60^o, 5)$.

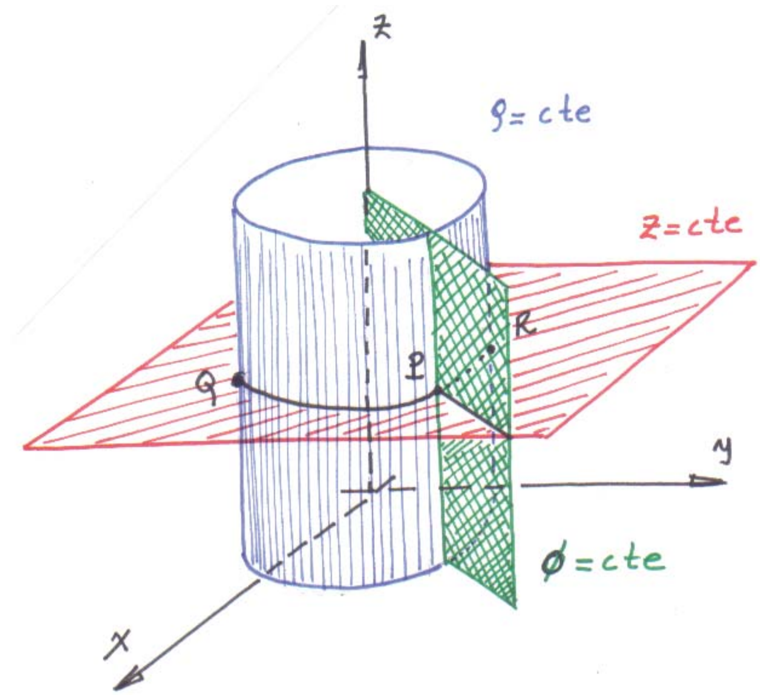

FIG. 2: Superficies ρ =cte., ϕ =cte., y z =cte.

• La naturaleza ortogonal del sistema de coordenadas esféricas es evidente al considerar las tres superficies

$$\begin{aligned} r &= \text{constante} \\ \theta &= \text{constante} \\ \phi &= \text{constante} \end{aligned}$$

las cuales se muestran en la Fig. 3, donde se advierte que r = constante es una esfera con su centro en el origen; θ = constante es un cono circular con el eje z como eje y el origen como vértice, y ϕ = constante es un plano semiinfinito equivalente al del sistema cilíndrico.

Una línea es producto de la intersección de dos superficies. Por ejemplo:

$$r = \text{constante}, \qquad \phi = \text{constante}$$

es un semicírculo que pasa por Q y P. La intersección de tres superficies da como resultado un punto. Así,

$$r = 5, \qquad \theta = 30^o, \qquad \phi = 60^o$$

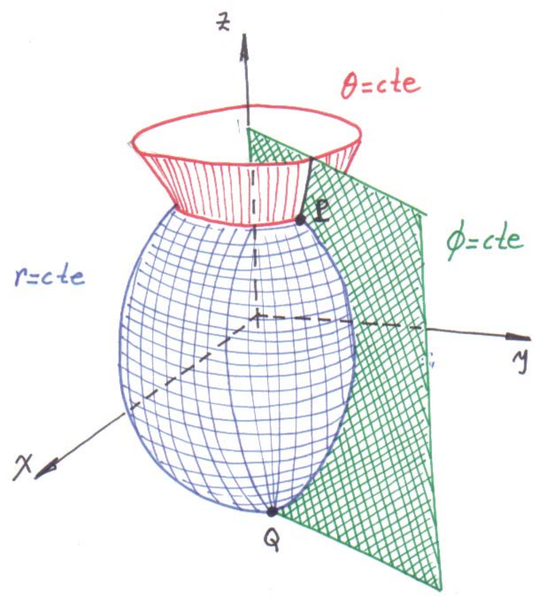

FIG. 3: Superficies r =cte., ϕ =cte., y θ =cte.

es el punto $P(5, 30^o, 60^o)$.

• En general, un punto en el espacio tridimensional puede identificarse como la intersección de tres superficies mutuamente ortogonales. Así mismo, un vector unitario normal a la superficie n = constante es $\pm\, \hat{a}_n$ donde n puede ser x, y, z, ρ, ϕ, r o θ. Por ejemplo, con relación al plano $x = 5$, su vector unitario normal es $\pm\, \hat{a}_x$, mientras que $\hat{a}_\phi$ lo es con relación al plano $\phi = 20^o$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. CILINDROS Y SUPERFICIES CUÁDRICAS

A fin de bosquejar la gráfica de una superficie, es útil determinar las curvas de intersección de la superficie con los planos coordenados. Estas curvas se llaman **trazas** (o secciones transversales) de la superficie.

Un **cilindro** es una superficie que consta de las líneas (llamadas **generatrices**) que son paralelas a la línea dada y que pasa por una curva plana dada.

Ejemplo: Bosqueje la gráfica de la superficie $z = x^2$.

Observe que la ecuación de la gráfica $z = x^2$, no tiene nada que ver con y. Esto significa que cualquier plano vertical con ecuación $y = k$ (paralelo al plano xz) corta a la gráfica en una curva con ecuación $z = x^2$. Así que estas trazas verticales son parábolas. En la figura 1 se muestra cómo se forma la gráfica al tomar la parábola $z = x^2$ en el plano xz y moverla en la dirección del eje y.

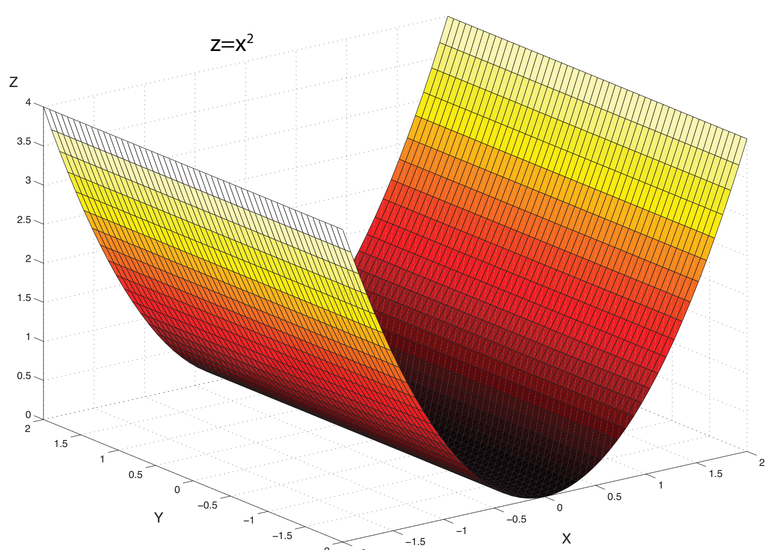

FIG. 1: Cilindro parabólico

Una **superficie cuadrática** es la gráfica de una ecuación de segundo grado en tres variables x, y, z. La ecuación más general es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \tag{1}$$

donde $A, B, C, ..., J$ son constantes, pero por traslación y rotación se puede llevar a una de las dos formas estándar $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0$ o bien $Ax^2 + By^2 + Iz = 0$.

Algunos ejemplos:

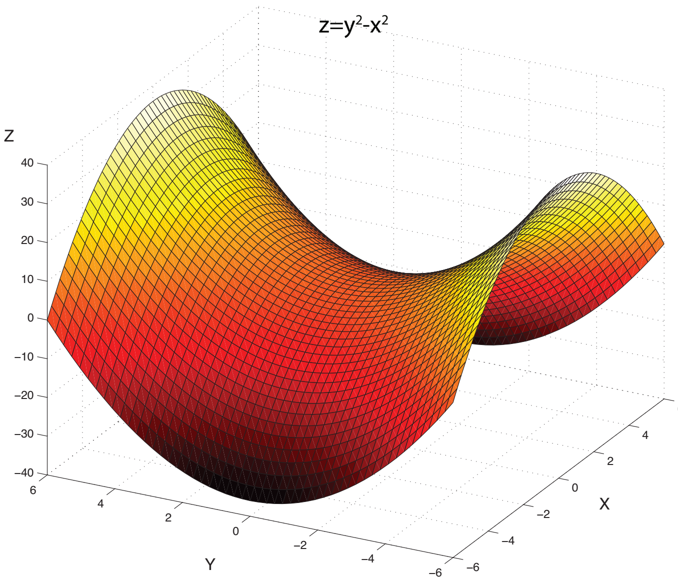

FIG. 2: Paraboloide hiperbólico

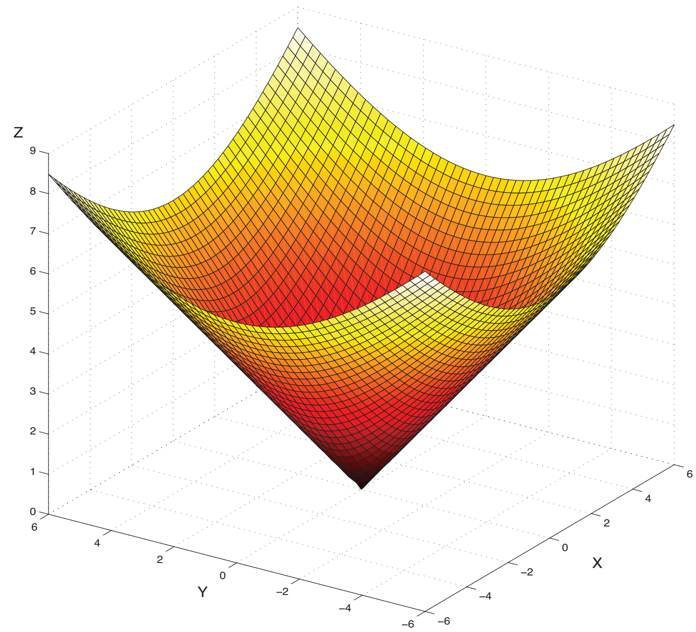

FIG. 3: Cono

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. DERIVADAS PARCIALES

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables y sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto en el dominio de dicha función.

• Si en la función $z = f(x, y)$ consideramos a $y = y_0$, entonces se obtiene la función $z_1 = f(x, y_0)$ que es una función que depende de una sola variable, a saber, de la variable x.

Si $z_1 = f(x, y_0)$ resultase ser una función derivable en x_0, entonces podemos calcular su derivada, en x_0. Primero derivamos con respecto a x,

$$\frac{d}{dx} f(x, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y_0) - f(x, y_0)}{h} \tag{1}$$

y posteriormente evaluamos la drivada en x_0, es decir $\frac{d}{dx} f(x, y_0) \mid_{x_0}$. Al número obtenido lo denominamos **derivada parcial de** $z = f(x, y)$ **respecto a** x **en** $P_0(x_0, y_0)$.

• Ahora, si en la función $z = f(x, y)$ consideramos a $x = x_0$, entonces se obtiene la función $z_2 = f(x_0, y)$ que es una función que depende de una sola variable, a saber, de la variable y.

Si $z_2 = f(x_0, y)$ resultase ser una función derivable en y_0, entonces podemos calcular su derivada, en y_0. Primero derivamos con respecto a y,

$$\frac{d}{dy} f(x_0, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y + h) - f(x_0, y)}{h} \tag{2}$$

y posteriormente evaluamos la drivada en y_0, es decir $\frac{d}{dy} f(x_0, y)|_{y_0}$. Al número obtenido lo denominamos **derivada parcial de** $z = f(x, y)$ **respecto a** y **en** $P_0(x_0, y_0)$.

Geométricamente lo que se ha definido se muestra en la Fig. 1.

Observe lo siguiente:

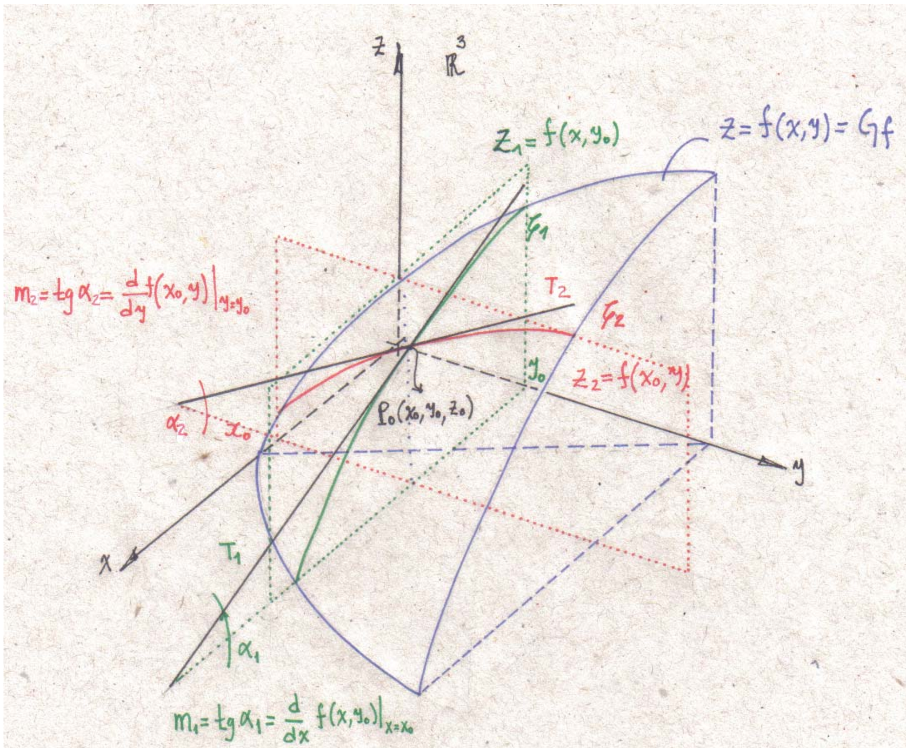

FIG. 1: Concepto de derivada parcial

Al considerar G_f como la gráfica de la función $z = f(x, y)$, G_f es una superficie contenida en $\Re^3$.

1. Al tomar $y = y_0$ obtenemos la función $f(x, y_0)$ que es la curva ζ_1 contenida en el plano $y = y_0$ (que es paralelo al plano xz). La curva ζ_1 es la gráfica de la función $f(x, y_0)$, es decir, $g(x) = f(x, y_0)$.

   Por tanto:

$$\frac{d}{dx}g(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y_0)-f(x,y_0)}{h} = \frac{d}{dx}f(x,y_0). \tag{3}$$

   Al evaluar $\frac{d}{dx}f(x, y_0)$ en $x = x_0$ ($\frac{d}{dx}f(x, y_0)|_{x_0}$), obtenemos un número m_1 que es la pendiente de la recta tangente a la curva ζ_1 en $x = x_0$, es decir,

$$\frac{d}{dx}f(x,y_0)|_{x=x_0} = m_1, \tag{4}$$

   que es la pendiente de la recta tangente T_1 a la superficie G_f en el punto (x_0, y_0, z_0).

2. Al tomar $x = x_0$ obtenemos la función $f(x_0, y)$ que es la curva ζ_2 contenida en el plano $x = x_0$ (que es paralelo al plano yz). La curva ζ_2 es la gráfica de la función $f(x_0, y)$, es decir, $\varphi(y) = f(x_0, y)$.

   Por tanto:

$$\frac{d}{dy}\varphi(y) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(y+h)-\varphi(y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y+h)-f(x_0,y)}{h} = \frac{d}{dy}f(x_0,y). \tag{5}$$

   Al evaluar $\frac{d}{dy}f(x_0,y)$ en $y = y_0$ ($\frac{d}{dy}f(x_0,y)|_{y_0}$), obtenemos un número m_2 que es la pendiente de la recta tangente a la curva ζ_2 en $y = y_0$, es decir,

$$\frac{d}{dy}f(x_0,y)|_{y=y_0} = m_2, \tag{6}$$

   que es la pendiente de la recta tangente T_2 a la superficie G_f en el punto (x_0, y_0, z_0).

Nótese que:

1. **Dada la función $f(x,y)$ definida en (x_0, y_0), podemos obtener la derivada parcial de $f(x,y)$ respecto a x en ese punto (x_0, y_0). Calculando directamente la derivada $\frac{d}{dx}f(x,y)$ considerando a la variable y como si fuera una constante $(y = y_0)$, para finalmente evaluar dicha derivada en $x = x_0$ y $y = y_0$.**

2. **Dada la función $f(x,y)$ definida en (x_0, y_0), podemos obtener la derivada parcial de $f(x,y)$ respecto a y en ese punto (x_0, y_0). Calculando directamente la derivada $\frac{d}{dy}f(x,y)$ considerando a la variable x como si fuera una constante $(x = x_0)$, para finalmente evaluar dicha derivada en $x = x_0$ y $y = y_0$.**

Utilizamos las notaciones siguientes:

- Para la derivada parcial respecto a x,

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = f_x = z_x \tag{7}$$

y evaluada en el punto (x_0, y_0)

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)|_{x=x_0,y=y_0} = f_x(x_0,y_0) = z_x(x_0,y_0). \tag{8}$$

- Para la derivada parcial respecto a y,

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = f_y = z_y \tag{9}$$

y evaluada en el punto (x_0, y_0)

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)|_{x=x_0,y=y_0} = f_y(x_0,y_0) = z_y(x_0,y_0). \tag{10}$$

2. DERIVADAS PRACIALES DE ORDEN SUPERIOR

Sea $z = f(x,y)$ una función de dos variables independientes. Las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x,y)$ y $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x,y)$ son, en general, funciones de las variables x e y. Por lo que a su vez, pueden tener derivadas parciales. Por consiguiente, las derivadas parciales de segundo orden de una función de dos variables, son cuatro, puesto que cada una de las funciones $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ puede ser derivada tanto respecto a x como respecto a y. Designamos las derivadas parciales de segundo orden de la siguiente manera:

• $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x,y);$	donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a x
• $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x,y);$	donde f se deriva sucesivamente dos veces respecto a y
• $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x}) = f_{xy}(x,y);$	donde f se deriva primero con respecto a x y el resultado se deriva con respecto a y
• $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y}) = f_{yx}(x,y);$	donde f se deriva primero con respecto a y y el resultado se deriva con respecto a x

Las derivadas de segundo orden, a su vez, se pueden derivar de nuevo tanto respecto a x, como respecto a y. Como resultado obtenemos derivadas de tercer orden.

• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$	• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$	• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$	• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$
• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$	• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y}$	• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}$	• $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. EL OPERADOR ∇

El operador vectorial diferencial (del o nabla) ∇ *no* es un vector, sino un operador. Así, si f es un campo escalar, entonces $f\nabla$ es un operador, mientras ∇f da la importante función vectorial llamada *gradiente*. De modo similar, si $\vec{F}$ es una función vectorial diferenciable, entonces $\vec{F}\cdot\nabla$ y $\vec{F}\times\nabla$ son operadores, mientras que $\nabla\cdot\vec{F}$ y $\nabla\times\vec{F}$ dan las importantes funciones escalar y vectorial llamadas *divergencia* y *rotacional* respectivamente.

Por tanto, una *función* que multiplica a ∇ da un operador, mientras que si ∇ multiplica a una *función* da importantes funciones escalares o vectoriales, según sea el caso.

COORDENADAS RECTANGULARES

Operador nabla: $\nabla = \hat{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$

Gradiente de f: $\nabla f = \hat{a}_x \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{a}_y \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{a}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

Divergencia de $\vec{F}$: $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

Rotacional de $\vec{F}$: $\nabla\times\vec{F} = \hat{a}_x \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{a}_y \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{a}_z \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$

COORDENADAS CILÍNDRICAS

Operador nabla: $\nabla = \hat{a}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{a}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial}{\partial z}$

Gradiente de f: $\nabla f = \hat{a}_\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{a}_\phi \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial f}{\partial z}$

Divergencia de $\vec{F}$: $\nabla\cdot\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

Rotacional de $\vec{F}$: $\nabla\times\vec{F} = \hat{a}_\rho \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial z}\right) + \hat{a}_\phi \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right) + \hat{a}_z \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right)$

COORDENADAS ESFERICAS

Operador nabla: $\nabla = \hat{a}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}$

Gradiente de f: $\nabla f = \hat{a}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{a}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}$

Divergencia de $\vec{F}$: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$

Rotacional de $\vec{F}$: $\nabla \times \vec{F} = \hat{a}_r \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial(F_\phi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\phi}) + \hat{a}_\theta \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}) + \hat{a}_\phi \frac{1}{r}(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta})$

2. DERIVADA DIRECCIONAL

Consideremos la función $z = f(x,y)$ y el punto $P(x,y)$ definidos en un dominio D. Por el punto P tracemos un vector unitario $\hat{u}$, que forme con la dirección positiva del eje x, un ángulo γ. Consideremos un punto $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$ sobre el vector a una distancia $\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ de P (ver Fig. 1).

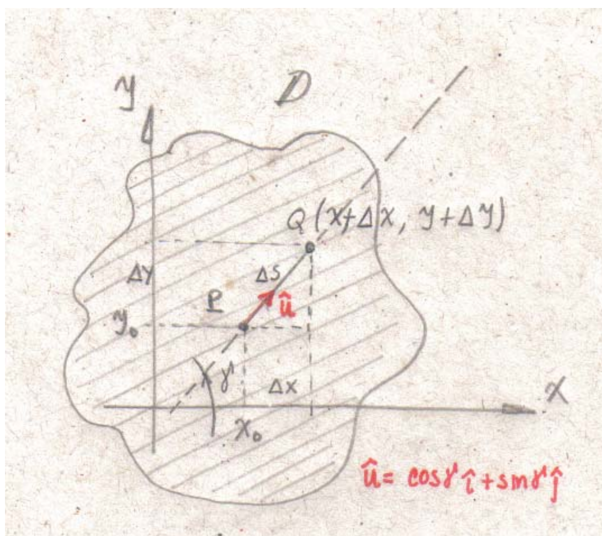

FIG. 1: Definición del vector unitario $\hat{u}$.

Supongamos que $z = f(x,y)$ es contínua y tiene derivadas respecto a sus variables en el dominio D. El incremento total de la función $z = f(x,y)$ es :

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{1}$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 tienden a cero, cuando Δs tiende a cero. Dividiendo la ecuación (1) por Δs, se obtiene

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} \tag{2}$$

De aquí se observa que:

$$\cos\gamma = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$\sin\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta s},$$

por lo que la ecuación (2) queda como

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\gamma + \epsilon_1\cos\gamma + \epsilon_2\sin\gamma \tag{3}$$

El límite de la razón $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ para cuando $\Delta s \to 0$ se llama derivada de la función $z = f(x, y)$ en el punto (x, y) según la dirección γ, y se denota por $(\frac{df}{ds})_\gamma = f_\gamma(x, y) = D_\gamma f$.

Entonces:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta s} = f_\gamma(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\gamma \tag{4}$$

es la derivada direccional de la función $z = f(x, y)$ en la dirección del ángulo γ.

De aquí se observa que:

- Conociendo las derivadas parciales f_x y f_y de la función $z = f(x, y)$, es fácil hallar la derivada siguiendo cualquier dirección γ.
- Las mismas derivadas parciales f_x y f_y se presentan como un caso particular de la derivada direccional, es decir: *i)* Si $\gamma = 0$, $D_0 f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$ y *ii)* Si $\gamma = \pi/2$, $D_{\pi/2} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Interpretación Geométrica de la derivada direccional.

De la Fig. 2, observese que:

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{NM_1}{NM} = \tan\sphericalangle NMM_1.$$

En otros términos, el cociente $\frac{\Delta z}{\Delta s}$ es igual a la tangente del ángulo formado por la secante MM_1 con el plano xy ($\sphericalangle NMM_1$). Cuando $\Delta s \to 0$, esta secante MM_1, tiende a ocupar la

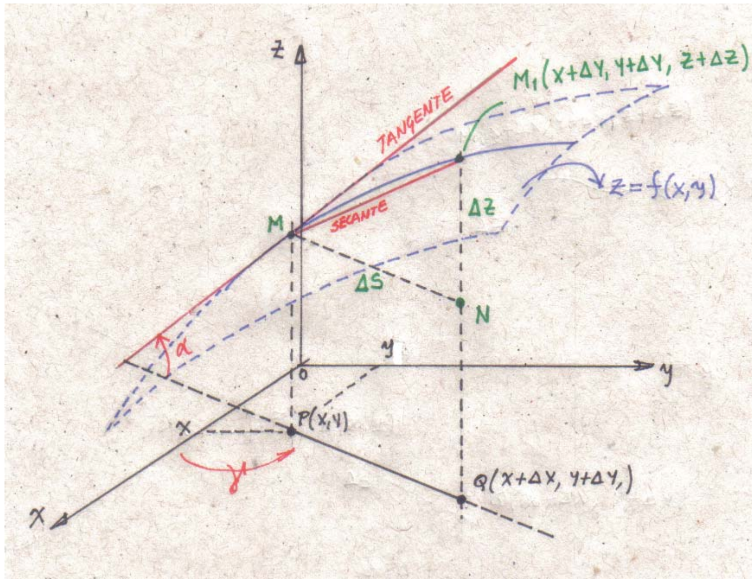

FIG. 2: Interpretación geomética de $f_\gamma(x,y)$.

posición de la **tangente**, el ángulo NMM_1 tiende al ángulo α, formado por el plano xy y la tangente a la superficie en el "plano trazado en la dirección γ". Así pues:

$$f_\gamma(x,y) = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \tan\alpha.$$

Remarcando (ver Fig. 3):

• Del cálculo de la derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección γ evaluada en el punto $P(x_0,y_0)$, es decir:

$$f_\gamma(x_0,y_0) = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\gamma + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\gamma,$$

se obtiene la pendiente de la recta tangente T_1 a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $M(x_0,y_0,z_0)$.

Dado que:

• El **vector gradiente** (**gradiente**) de $f(x,y)$ en un punto $P(x_0,y_0)$ es el vector

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{a}_y \tag{5}$$

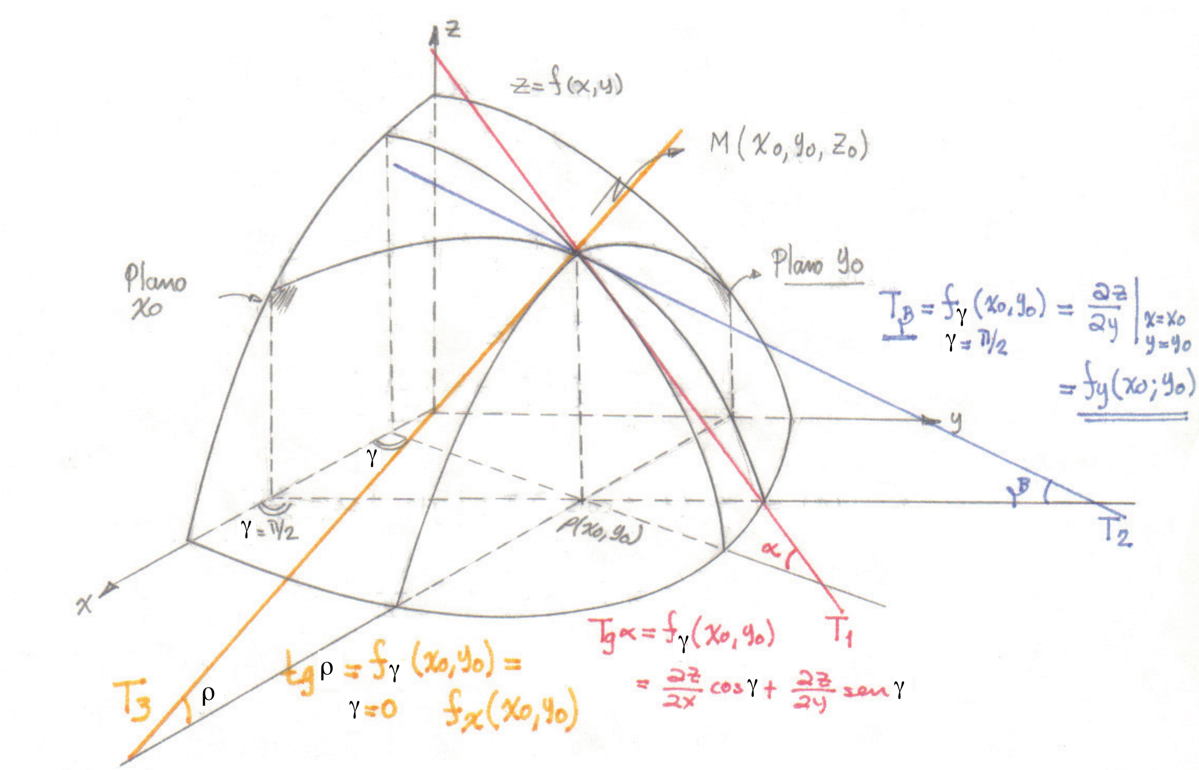

FIG. 3: Derivada direccional para $\gamma = 0$ y $\gamma = \pi/2$.

obtenido al evaluar las derivadas parciales de f en P_0.

- Y como el vector unitario $\hat{u} = \cos\gamma\,\hat{a}_x + \sin\gamma\,\hat{a}_y$ (ver Fig. 1).

Entonces, la ecuación (4) se puede reescribir como:

$$D_{\hat{u}}f = (\frac{df}{ds})_{\hat{u},P_0} = f_\gamma(x_0, y_0) = (\nabla f)_{P_0} \cdot \hat{u}, \tag{6}$$

que es el producto escalar del gradiente de f en P_0 y $\hat{u}$.

Propiedades de las derivadas direccionales.

Al evaluar el producto punto en la fórmula

$$D_{\hat{u}}f = |(\nabla f)_{P_0}| \cdot |\hat{u}| \cos\theta$$

se revelan las siguientes propiedades.

Propiedades de la derivada direccional $D_{\hat{u}}f = \nabla f \cdot \hat{u} = |(\nabla f)| \cos\theta$

1. La función f crece más rápidamente cuando $\cos\theta = 1$ o cuando $\hat{u}$ está en la dirección de ∇f. Es decir, en cada punto P es su dominio, f crece más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇f en P. La deirvada en esta dirección es

$$D_{\hat{u}}f = |(\nabla f)| \cos(0) = |(\nabla f)|$$

2. De manera similar, f decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. La derivada en esta dirección es $D_{\hat{u}}f = |(\nabla f)| \cos(\pi) = -|(\nabla f)|$.

3. Cualquier dirección $\hat{u}$ ortogonal al gradiente es una dirección de cambio nulo de f porque θ es igual a $\pi/2$ y

$$D_{\hat{u}}f = |(\nabla f)| \cos(\pi/2) = |(\nabla f)| \cdot 0 = 0.$$

Funciones de tres variables

Obtenemos fórmulas de tres variables al sumar los términos z a las fórmulas de dos variables. Para una función diferenciable $f(x, y, z)$ y un vector unitario $\hat{u} = u_1\,\hat{\imath} + u_2\,\hat{\jmath} + u_3\,\hat{k}$ en el espacio, tenemos

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{a}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{a}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{a}_z \tag{7}$$

y

$$D_{\hat{u}} = \nabla f \cdot \hat{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3. \tag{8}$$

La derivada direccional puede escribirse de nuevo de la forma $D_{\hat{u}}f = \nabla f \cdot \hat{u} = |(\nabla f)| \cos\theta$, por lo que las propiedades dadas en la lista anterior para funciones de dos variables aún son válidas. En cualquier punto dado, f se incrementa más rápidamente en la dirección de ∇f y decrece más rápidamente en la dirección de $-\nabla f$. En cualquier dirección ortogonal a ∇f, la derivada es cero.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. REGLA DE LA CADENA PARA FUNCIONES DEVARIAS VARIABLES

Usamos la regla de la cadena cuando $\omega = \omega(x)$ es una función diferenciable de x, y $x = x(t)$ es una función diferenciable de t, es decir, es una composición de funciones. Esto hace que ω sea una función diferenciable de t y la regla de la cadena permite calcular $d\omega/dt$ con la fórmula siguiente:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Regla de la cadena para una función de dos variables intermedias y una variable independiente.
Si $\omega = \omega(x, y)$ es diferenciable y $x = x(t)$ y $y = y(t)$ son funciones diferenciables en t, entonces ω es una función diferenciable de t, por tanto:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{1}$$

Para obtener la regla de la cadena para funciones de tres variables intermedias, agregamos un término a la ecuación (1).

Regla de la cadena para una función de tres variables intermedias y una variable independiente.
Si $\omega = \omega(x, y, z)$ es diferenciable y $x = x(t)$, $y = y(t)$ y $z = z(t)$ son funciones diferenciables

de t, entonces ω es una función diferenciable de t, por tanto:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

Regla de la cadena para una función de tres variables intermedias y dos variables independientes.

Supongamos que $\omega = \omega(x, y, z)$, $x = x(r, s)$, $y = y(r, s)$ y $z = z(r, s)$. Si las cuatro funciones son diferenciables, entonces ω tiene derivadas parciales respecto a r y s, dadas por:

$$\frac{\partial\omega}{\partial r} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}. \tag{4}$$

2. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

La regla de la cadena se puede aplicar para tener una descripción más completa del proceso de la derivación implícita.

Sea $y = f(x)$, una función diferenciable para toda x en el dominio de $f(x)$. Por lo que, una ecuación de la forma $F(x, y) = 0$ puede definir a y de forma implícita, es decir, $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$.

Por lo que, para obtener dy/dx a partir de su definición implícita, aplicamos la regla de la cadena para diferenciar ambos miembros de la ecuación $F(x, y) = 0$ **con respecto a** x. Puesto que x y y son funciones de x se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{5}$$

Pero $dx/dx = 1$, de este modo si $\partial F/\partial y \neq 0$, dy/dx se obtiene apartir de

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{6}$$

Por otra parte, sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, a saber, x y y. Sea la ecuación $F(x, y, z) = 0$ la definición implícita de z como función de x y y. Esto quiere decir que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) en el dominio de $f(x, y)$. Si F y f son diferenciables, entonces aplica la regla de la cadena para derivar la ecuación $F(x, y, z) = 0$ como sigue:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{7}$$

De donde,

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

Por lo que, (7) se transforma en

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \tag{8}$$

Si $\partial F/\partial z \neq 0$, podemos obtener $\partial z/\partial x$ a partir de

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z} \tag{9}$$

Análogamente,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z} \tag{10}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

1. CÁLCULO APLICADO A VECTORES

A. Longitud, área y volumenes de diferenciales

Los elementos diferenciales de **longitud**, **área** y **volumen** son útiles en al cálculo aplicado a vectores. Los definiremos en sistemas de coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

1. Coordenadas cartesianas

En la Fig. 1 se advierte que

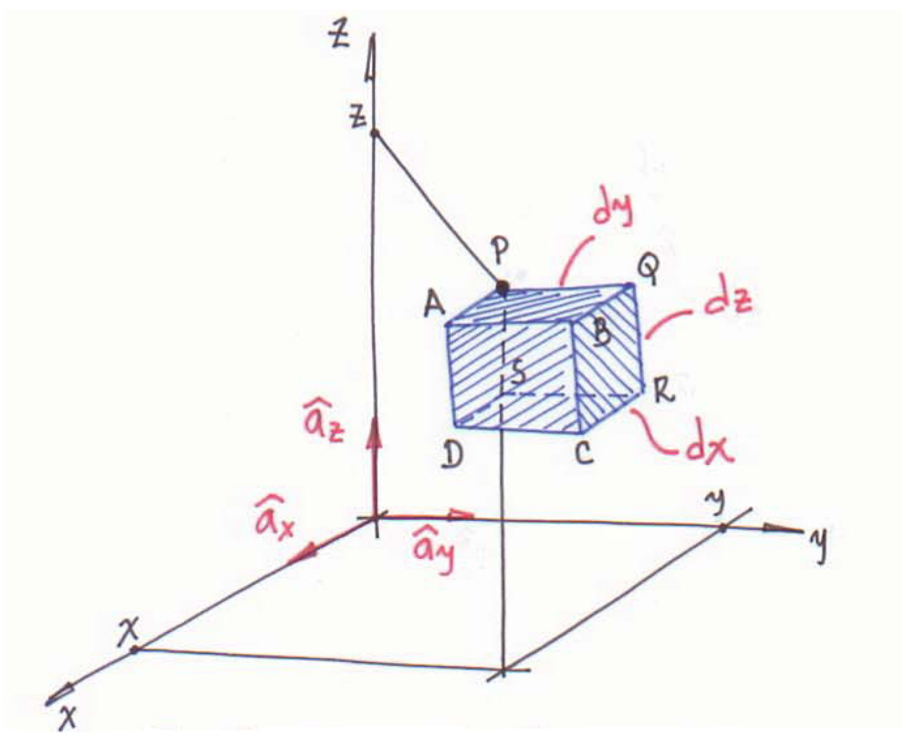

FIG. 1: Elementos diferenciales

• El desplazamiento diferencial está dado por

$$\vec{dl} = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z \tag{1}$$

En la Fig. 2 se advierte que

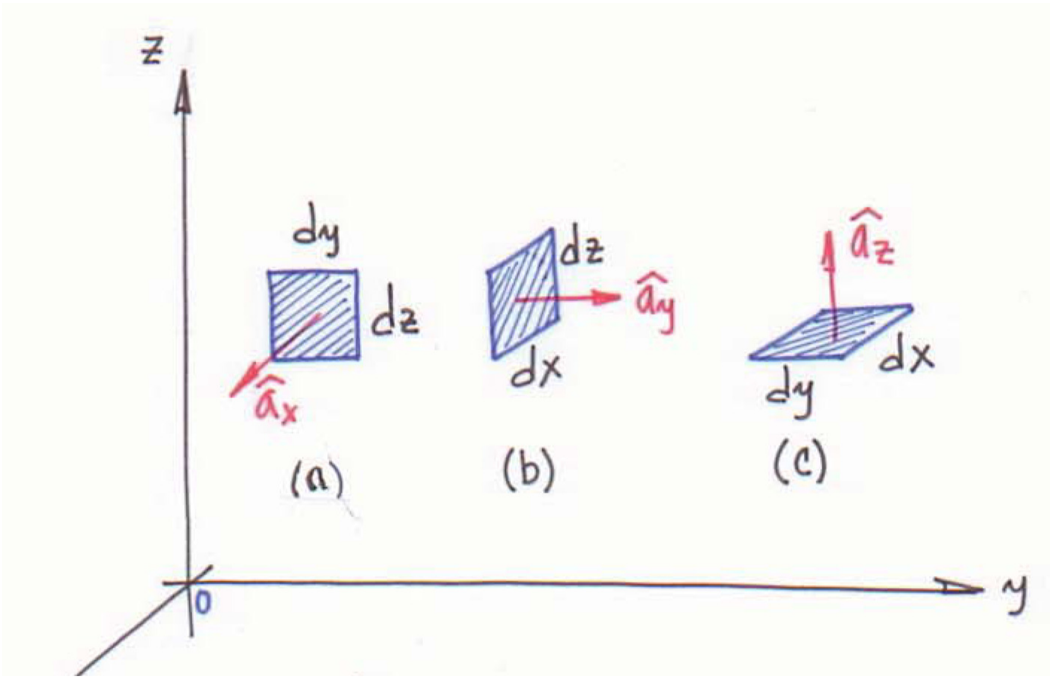

FIG. 2: Áreas normales diferenciales

• El área normal diferencial está dada por

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \vec{dS}_x = dydz\,\hat{a}_x \\
&(b) \quad \vec{dS}_y = dxdz\,\hat{a}_y \\
&(c) \quad \vec{dS}_z = dxdy\,\hat{a}_z
\end{aligned} \tag{2}$$

• El volumen diferencial está dado por

$$dv = dxdydz \tag{3}$$

En las ecuaciones (1) a (3) se advierte que $\vec{dl}$ y $\vec{dS}$ son vectores, mientras que dv es un escalar. En la Fig. 1, observe que si nos movemos del punto P a Q (o de Q a P), por ejemplo,

$\vec{dl} = dy\,\hat{a}_y$, porque nos desplazamos en la dirección de y, en tanto que si nos movemos de Q a S (o de S a Q), $\vec{dl} = dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$, porque tenemos que mover dy a lo largo de y, dz a lo largo de z y $dx = 0$ (no hay movimiento a lo largo de x). De igual manera, el desplazamiento de D a Q significaría $\vec{dl} = dx\,\hat{a}_x + dy\,\hat{a}_y + dz\,\hat{a}_z$.

La definición de $\vec{dS}$ es importante. El elemento diferencial de superficie (o área) $\vec{dS}$ puede definirse por lo general como

$$\vec{dS} = dS\,\hat{a}_n \tag{4}$$

donde dS es el área del elemento de superfice y $\hat{a}_n$ es un vector unitario normal a la superficie dS ($\hat{a}_n$ debe apuntar en **dirección de alejamiento del volumen**, si dS forma parte de la superfice que describe un volumen). Si se considera $ABCD$ de la Fig. 1, por ejemplo, $\vec{dS} = dydz\,\hat{a}_x$, mientras que en el caso de la superficie $PQRS$, $\vec{dS} = -dydz\,\hat{a}_x$ puesto que $\hat{a}_n = -\hat{a}_x$ es normal a $PQRS$.

Lo que debe recordarse siempre acerca de los elementos diferenciales es $\vec{dl}$ y cómo obtener de él $\vec{dS}$ y dv. Una vez recordado $\vec{dl}$, es fácil hallar $\vec{dS}$ y dv. Por ejemplo, $\vec{dS}$ a lo largo de $\hat{a}_x$ puede obtenerse de $\vec{dl}$ en la ecuación (1) multiplicando los componentes de $\vec{dl}$ a lo largo de $\hat{a}_y$ y $\hat{a}_z$; esto es, $dydz\,\hat{a}_x$. En forma similar, $\vec{dS}$ a lo largo de $\hat{a}_z$ es el producto de las componentes de $\vec{dl}$ a lo largo de $\hat{a}_x$ y $\hat{a}_y$; es decir, $dxdy\,\hat{a}_z$. Asimismo, dv puede obtenerse de $\vec{dl}$ como el producto de las tres componentes de $\vec{dl}$: esto es, $dxdydz$. Prolonguemos ahora a otros sistemas de coordenadas la idea ya desarrollada aquí en torno a las coordenadas cartesianas.

2. Coordenadas Cilíndricas

De la Fig. 3 se deduce que, en coordenadas cilíndricas, los elementos diferenciales pueden hallarse de la siguiente manera:

- El desplazamiento diferencial está dado por

$$\vec{dl} = d\rho\,\hat{a}_\rho + \rho\,d\phi\,\hat{a}_\phi + dz\,\hat{a}_z \tag{5}$$

- El área normal diferencial está dada por y se ilustra en la Fig. 4.

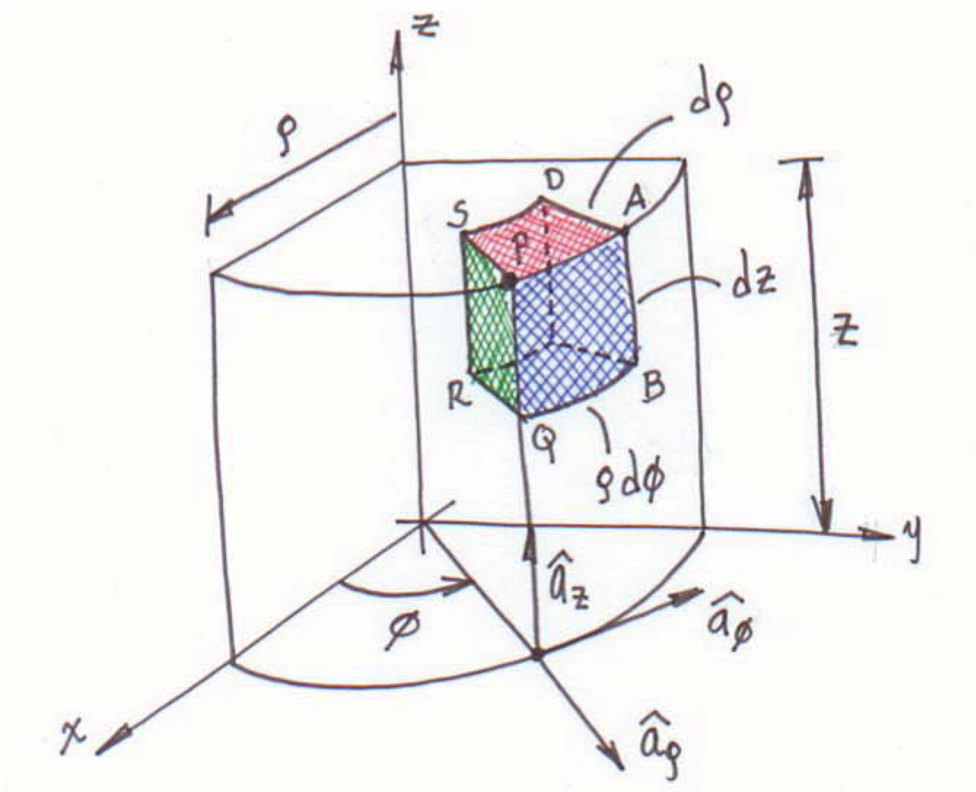

FIG. 3: Elementos dierenciales

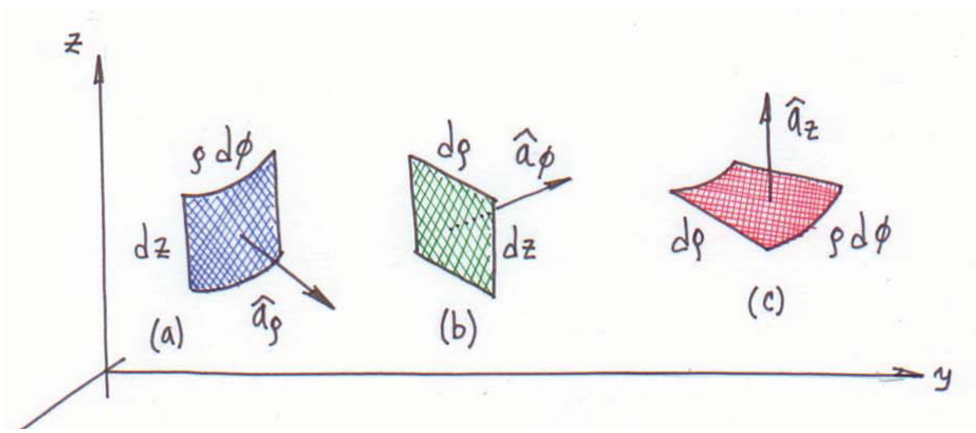

FIG. 4: Áreas normales diferenciales

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad d\vec{S}_\rho = \rho\, d\phi\, dz\, \hat{a}_\rho \\
&(b) \quad d\vec{S}_\phi = d\rho\, dz\, \hat{a}_\phi \\
&(c) \quad d\vec{S}_z = \rho\, d\rho\, d\phi\, \hat{a}_z
\end{aligned}
\tag{6}
$$

• El volumen diferencial está dado por

$$dv = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \tag{7}$$

Como se mencionó en la sección anterior respecto a las coordenadas cartesianas, también en este caso basta recordar $\vec{dl}$; $\vec{dS}$ y dv pueden obtenerse fácilmente a partir de ella. Por ejemplo, $\vec{dS}$ a lo largo de $\vec{a}_z$ es el producto de las componentes de $\vec{dl}$ a lo largo de $\hat{a}_\rho$ y $\hat{a}_\phi$; esto es, $d\rho\, \rho\, d\phi\, \hat{a}_z$. Asimismo, dv es el producto de las tres componentes de $\vec{dl}$, es decir, $d\rho\, \rho\, d\phi\, dz$.

3. Coordenadas Esféricas

En la Fig. 5 se advierte que, en coordenadas esféricas,

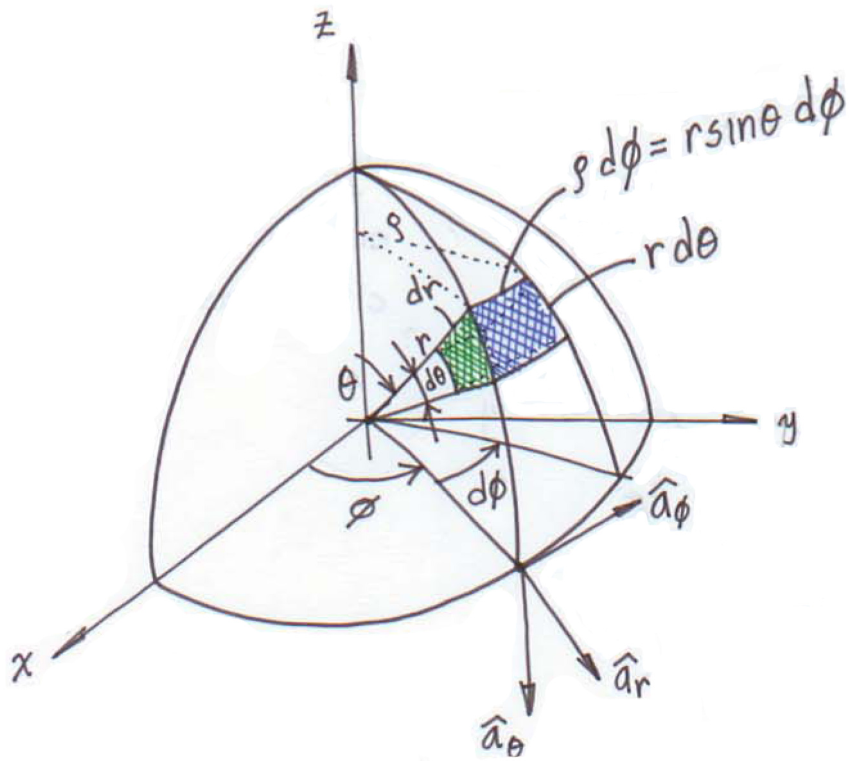

FIG. 5: Elementos diferenciales

• El desplazamiento diferencial es

$$\vec{dl} = dr\, \hat{a}_r + r\, d\theta\, \hat{a}_\theta + r \sin\theta\, d\phi\, \hat{a}_\phi \tag{8}$$

• El área normal diferencial es y se ilustra en la Fig. 6.

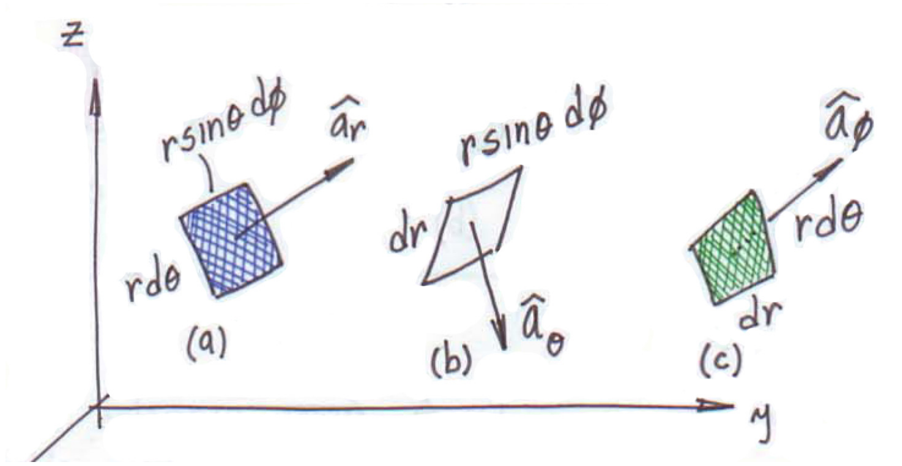

FIG. 6: Áreas normales diferenciales

$$
\begin{aligned}
(a) \quad & d\vec{S}_r = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{a}_r \\
(b) \quad & d\vec{S}_\theta = r \sin\theta \, dr \, d\phi \, \hat{a}_\phi \\
(c) \quad & d\vec{S}_\phi = r \, dr \, d\theta \, \hat{a}_\phi
\end{aligned}
\tag{9}
$$

• El volumen diferencial es

$$dv = r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \tag{10}$$

También esta vez es suficiente recordar $\vec{dl}$, de la que se obtienen fácilmente $d\vec{S}$ y dv. Por ejemplo, $d\vec{S}$ a lo largo de $\hat{a}_\theta$ se obtiene como el producto de las componentes de $\vec{dl}$ a lo largo de $\hat{a}_r$ y $\hat{a}_\phi$; esto es, $dr\, r \, \sin\theta \, d\phi \, \hat{a}_\phi$; dv es el producto de las tres componentes de $\vec{dl}$; es decir, $dr \, r \, d\theta \, r \, \sin\theta \, d\phi$.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño -FIAD-

-Ingeniería en Nanotecnología-

Cálculo Avanzado

Prof. Dr. E. Efren García G.

I. INTEGRALES DE LÍNEA, SUPERFICIE Y VOLUMEN

El ya conocido concepto de integración se prolongará a casos en los que el integrando sea un vector. Por una línea se entiende la trayectoria a lo largo de una curva en el espacio. Usaremos indistintamente los términos *línea*, *curva* y *contorno*.

Terminología: Supongamos que ζ es una curva parametrizada $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, y que A y B son los puntos inicial y terminal $(x(a), y(a), z(a))$ y $(x(b), y(b), z(b))$, respectivamente.

Afirmamos que:

• ζ es una **curva suave** si $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ son continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y no son simultáneamente cero sobre el intervalo abierto (a, b).

• ζ es una **curva suave por partes** si consiste en un número finito de curvas suaves $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n$ unidas extremo por extremo; esto es, $\zeta = \zeta_1 \cup \zeta_2 \cup ... \cup \zeta_n$.

• ζ es una **curva cerrada** si $A = B$.

• ζ es una **curva simple** si no se cruza a sí misma entre A y B.

• ζ es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza a sí misma.

• Si ζ no es una curva cerrada, entonces la **orientacón** impuesta sobre ζ es la dirección que corresponde a los valores crecientes de t.

En la Fig. 1 se ilustran las definiciones anteriores.

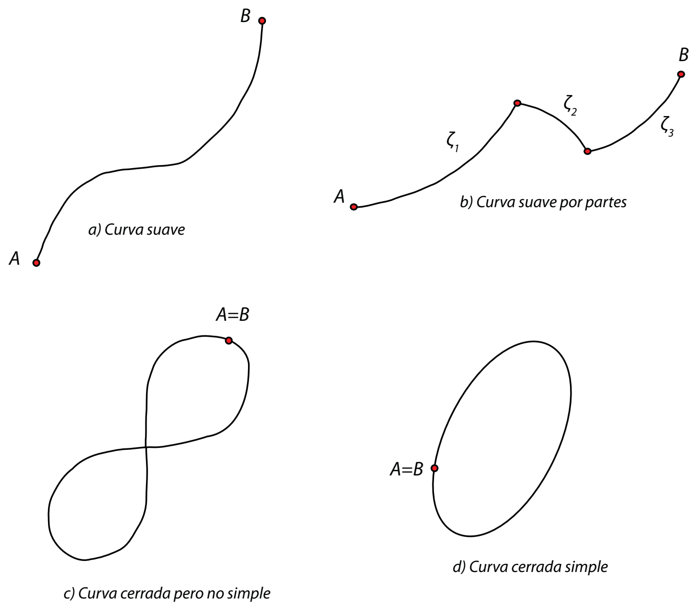

FIG. 1: Tipos de curvas

Integrales de línea

El vector desplazamiento diferencial $\vec{dl}$ (en coordenadas cartesianas) a lo largo de ζ es $\vec{dl} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}$. Si ζ es una curva suave represenada por $\vec{r}(t)$ para $a \leq t \leq b$ ($\vec{r'}(t) = d\vec{r}/dt$ es continua y nunca $\vec{0}$). Podemos usar la ecuación

$$l(t) = \int_a^t |\vec{r'}(\tau)|\, d\tau \tag{1}$$

para expresar a dl, como $dl = |\vec{r'}(t)|\, dt$ o a $\vec{dl}$, como $\vec{dl} = \vec{r'}(t)\, dt$. Las integrales que incluyen al vector de desplazamiento diferencial $\vec{dl}$ (o dl) se llaman **integrales de línea**. Consideremos las siguientes integrales de línea a lo largo de una curva ζ que puede ser abierta o cerrada:

Integrales de línea en campos escalares:

- $\int_\zeta \phi\, dl$
- $\int_\zeta \phi\, \vec{dl}$

- $\oint_\zeta \phi\, dl$
- $\oint_\zeta \phi\, \vec{dl}$

Integrales de línea en campos vectoriales:

• $\int_\zeta \vec{f} \cdot \vec{dl}$	• $\oint_\zeta \vec{f} \cdot \vec{dl}$
• $\int_\zeta \vec{f} \times \vec{dl}$	• $\oint_\zeta \vec{f} \times \vec{dl}$

Dado un campo vectorial $\vec{A}$ y una curva L, definimos la integral

$$\int_L \vec{A} \cdot \vec{dl} \tag{2}$$

como la *integral de línea* de $\vec{A}$ sobre de L, y que se representa en la Fig. 2.

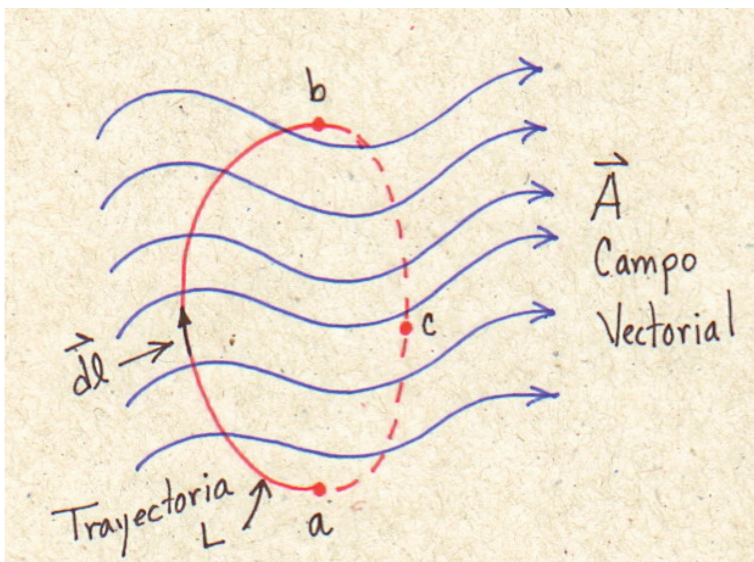

FIG. 2: Trayectoria de integración de un campo vectorial $\vec{A}$ sobre la curva L.

Si la trayectoria de integración es una curva cerrada, como *abca* en la Fig.2, la ecuación (2) se convierte en una integral de contorno cerrado

$$\oint_L \vec{A} \cdot \vec{dl} \tag{3}$$

la cual recibe el nombre de *circulación* de $\vec{A}$ alrededor de L.

Dado un campo vectorial $\vec{A}$ continuo en una región que contiene la superficie S, la *integral de superficie o flujo* de $\vec{A}$ a través de S, como se representa en la Fig. 3 se define como

$$\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{A} \cdot \hat{a}_n dS \tag{4}$$

donde, en cualquier punto sobre S, $\hat{a}_n$ es el vector unitario normal a S.

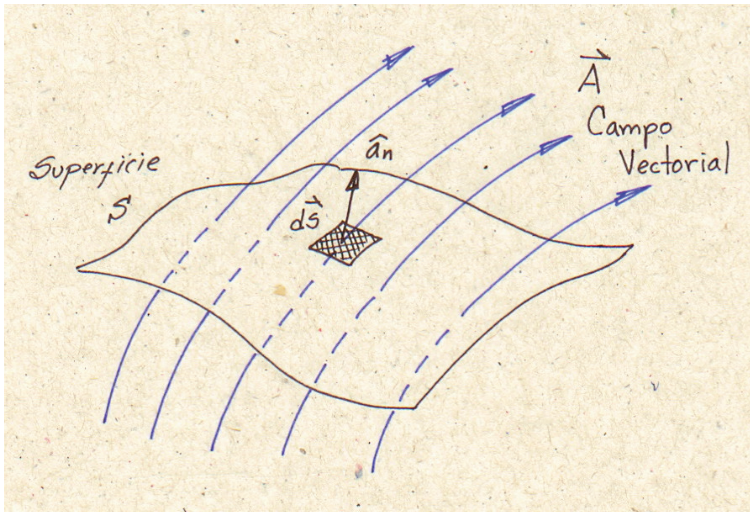

FIG. 3: Flujo de un campo vectorial $\vec{A}$ a través de la superficie S.

En el caso de una superficie cerrada (que define un volumen), la ecuación (4) se conviente en

$$\Psi = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{a}_n dS \tag{5}$$

Adviérase que una trayectoria cerrada define una superficie abierta, mientas que una superficie cerrada define un volumen.

Definimos la integral

$$\int_v \rho_v dv \tag{6}$$

como la integral de volumen del escalar ρ_v sobre el volumen v. El significado físico de una integral de línea, superficie o volumen depende de la naturaleza de la cantidad física representada por $\vec{A}$ o ρ_v. Cabe señalar que $\vec{dl}$, $d\vec{S}$ y dv son como le definimos en la sección anterior.

Teorema de Stokes

- **George Gabriel Stokes (1819-1903).**
  Una de las figuras científicas más influyentes de su siglo, fue profesor Lucaciano de matemáticas en la Universidad de Cambridge, de 1849 hasta su muerte en 1903. Sus investigaciones teóricas y experimentales versaron sobre hidrodinámica, electricidad, luz, gravedad, sonido, calor, metrología y física solar. Dejó la electricidad y el magnetismo a su amigo William Thomson, barón de Kelvin de Largs. Otras de esas curiosidades históricas es que el teorema que llamamos de Stokes no es de él, en lo absoluto. Stokes lo aprendió de Thomson en 1850 y unos años después lo incluyó entre las preguntas que escribió para el Premio Smith. Desde entonces, ha sido conocido como teorema de Stokes. Pero como todo el la vida, las cosas se balancearon: Stokes fue el descubridor original de los principios del análisis espectral que ahora acreditamos a Bunsen y a Kirchhoff.

$$\oint_{\zeta} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{s} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n} d\tau \tag{1}$$

  La circulación de un campo vectorial $\vec{F}$ alrededor de la frontera ζ de una superficie orientada S en sentido antihorario respecto al vector $\hat{n}$, normal unitario a la superficie, es igual a la integra de $\nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}$ sobre S.

Teorema de la Divergencia

- **Mikhail Vasilievich Ostrogradsky (1801-1862).**
  Fue el primer matemático que publicó una prueba del teorema de la divergencia. Después de que le fue negado su grado en la Universidad de Kharkhov por el ministro para asuntos religiosos y educación nacional (debido a su ateísmo). Ostrogradsky salió de Rusia y se dirigió a París en 1822, atraído por la presencia de Laplace, Legendre, Fourier, Poisson y Cauchy. Mientras trabajaba en la teoría del calor a mediados de la década de 1820, formuló el teorema de la divergencia como una herramienta para convertir las integrales de volumen a integrales de superficie.

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} d\tau = \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV \qquad (2)$$

  El flujo del campo vectorial $\vec{F}$ a través de una superficie S cerrada y orientada en la dirección del vector normal unitario $\hat{n}$ hacia afuera de la superficie, es igual a la integral de $\nabla \cdot \vec{F}$ sobre la región D encerrada por la superficie.

Teorema de la Divergencia

- **Carl Friedrich Gauss (1777-1855).**
  Probó el teorema antes de elaborar la teoría de la gravitación, pero sus notas no fueron publicadas si no hasta varios años depués. (De hecho, aveces se le llama teorema de Gauss.) La lista de los logros de Gauss en ciencia y matemáticas es verdaderamente sorprendente; abarcó desde la invención del telégrafo eléctrico (con Wilhelm Weber en 1833) hasta el desarrollo de una teoría maravillosamente exacta de las órbitas planetarias y trabajos de geometría no euclidiana, que luego resultaron fundamentales para la teoría de la relatividad general de Einstein.