

Diseño de un controlador para la formación de grupos de robots móviles

Martinez-Clark R. * Cruz-Hernandez C. *
Reyes-De la Cruz D. * Pinedo-Lomeli **

* Departamento de Electrónica y telecomunicaciones, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE), México. (e-mails: rigomar@cicese.edu.mx, ccruz@cicese.mx, jreyes@cicese.edu.mx).

** Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño, Universidad Autónoma de Baja California (UABC), México (e-mail: luis.pinedo@uabc.edu.mx)

Abstract: Este trabajo presenta el diseño de un controlador basado en la teoría de sistemas complejos para la formación de grupos de robots móviles, los cuales, son representados por modelos de masas puntuales. Se propone un controlador proporcional basado en la posición de cada uno de los robots y se presentan condiciones suficientes para alcanzar el objetivo de formación, además de validar la eficacia del controlador mediante las simulaciones numéricas presentadas.

Keywords: Sistemas complejos, robots móviles, formación, control.

1. INTRODUCCION

Por *formación* en un grupo de robots móviles entendemos a la distancia que guardan entre sí los robots con el propósito de alcanzar ciertas configuraciones predefinidas, ver Stanoev and Smilkov (2013). Estas pueden ser fijas o variantes en tiempo. Esta estrategia de control ha tomado enorme fuerza en años recientes, pues cada vez son más las tareas que pueden realizarse mediante un grupo de robots móviles, entre ellas podemos mencionar: vigilancia y exploración, mapeo, construcción y transportación en grupo, formación de satélites para comunicación, formación de aviones de guerra, etc. ver Kelly et al. (2004), Yamaguchi et al. (2001). Es común encontrar en la literatura controladores para formación de robots diseñados desde una perspectiva distribuida (i.e., cada robot cuenta con su propio controlador) tal es el caso de Yamaguchi et al. (2001), esta estrategia distribuida permite estudiar a los grupos controlados desde la perspectiva de los sistemas complejos, pues el intercambio de información entre los robots permite que cada uno de ellos afecte a la formación del grupo, vista como un todo. Para entender mejor a lo que se refiere con sistemas complejos se expone la diferencia entre el estudio convencional de los sistemas por parte del reduccionismo y el estudio bajo la óptica de la ciencia de la complejidad.

La ciencia convencional se apoya en la filosofía del reduccionismo para explicar los diferentes fenómenos de la naturaleza, esto es, busca reducir los sistemas hasta los elementos más básicos que lo constituyen, pues supone

*Agradecemos al CONACYT, por el apoyo económico brindado a través del proyecto de grupos de investigación en Ciencia Básica, Ref.166654.

que, estudiando a fondo las partes que conforman dicho fenómeno éste puede ser descrito completamente. Esta forma de analizar a los sistemas se puede reducir en la siguiente frase, *el todo no es nada más que la suma de sus partes*. Esta teoría es muy útil para describir sistemas pequeños o simples, en los que los elementos que lo conforman no se encuentran relacionados entre sí; pero cuando se presentan interacciones entre los mismos es difícil describir el comportamiento del sistema completo basado en el comportamiento propio de sus componentes, pues dichas interacciones permiten que el *todo sea más que la suma de sus partes*, pues, por medio del intercambio de información entre los individuos, se forman estructuras, se generan variedades, se produce *complejidad*, etc., en fin, la composición final o el "todo" presenta comportamientos más ricos que los que suceden en cada uno de los individuos, ver Auyang (1999).

No existe una definición precisa (o universalmente aceptada) de *sistema complejo*, pero en el presente trabajo, se utilizará el término para describir sistemas formados por varios componentes, cuyo comportamiento es emergente, esto es, que el comportamiento del sistema no puede ser inferido solamente por el comportamiento de sus componentes, ver Bar - Yam (1997). Como ejemplos se puede citar al cerebro humano, los ecosistemas, internet, ver Wang (2002). Así pues, se analizará la formación como una propiedad emergente de un sistema formado por un grupo de robots móviles, donde entendemos a las

propiedades emergentes como los efectos a gran escala (i.e., que afectan al grupo completo) producidos por las interacciones locales entre los agentes. ver Axelrod (1997).

El contenido de este trabajo se estructura como sigue: primeramente se presentan los preliminares para el estudio de este trabajo, los cuales comprenden a la teoría de grafos utilizada. Posteriormente se muestra el controlador con el que se desea alcanzar la formación de los robots móviles, pasando después a la convergencia de las posiciones de los robots dentro del grupo mediante un ejemplo, seguida por las simulaciones numéricas que validan la eficacia del controlador para finalmente mencionar el trabajo futuro y las conclusiones derivadas de este trabajo.

2. PRELIMINARES

2.1 Algunos aspectos de la teoría de grafos

Un *grafo* es una representación de un sistema en el que solamente se mantienen las características de conectividad entre sus diferentes componentes (llamados nodos o vértices), generalmente esto se hace mediante una representación gráfica. Matemáticamente podemos definir a un grafo $G = (V, E)$ como el par formado por un conjunto V de vértices y un conjunto E de aristas que conectan ciertos vértices entre si, ver Berge (2001). Otro aspecto a considerar en un grafo es la topología, es decir, la geometría que se forma por los nodos y las conexiones entre los mismos. Existen algunas topologías bien estudiadas, con formas regulares entre ellas encontramos: acomplamiento global, anillo o vecino cercano, estrella y cadena, ver Posadas-Castillo et al. (2009).

2.2 Matrices asociadas a un grafo

Resulta bastante útil el uso de la teoría de grafos para la descripción de grupos y la relación entre sus miembros, pues al ser una representación gráfica de las conexiones, rápidamente se tiene una idea de cómo se comporta el flujo de información entre los distintos nodos, sin embargo, para realizar cálculos en una computadora, esta representación gráfica representa un reto para la programación, es por esto que es necesario encontrar una estructura que permita una fácil implementación en los cálculos. Por esta razón, un grafo puede definirse mediante álgebra lineal, para el desarrollo de este trabajo se utilizarán principalmente cuatro matrices: *matriz de adyacencia*, *matriz de grafo*, *matriz laplaciana* y *matriz de conexión*, ver Wang (2002), Wu (1996). Para los alcances de este trabajo, el uso de estas matrices permiten representar perfectamente a un grafo.

Matriz de adyacencia $\mathbf{T}(G)$. Es una matriz cuadrada de dimensión $N \times N$, donde N representa el número de nodos en el grupo, es una matriz de 1 y 0 que representa las conexiones entre los diferentes nodos y sus elementos Y_{ij} están dados por Berge (2001)

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } n(i,j) \in E(G) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (1)$$

en donde $(i,j) \in E(G)$ significa que existe una arista que une a los nodos i y j . En el caso de los *digrafos* (grafos con aristas dirigidas), se tiene que $Y_{ij} = 1$ si existe un arco (arista dirigida) que va del nodo j al nodo i .

Matriz de grado $\mathbf{D}(G)$. Es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$ que representa el número de vecinos que tiene cada nodo. Los elementos d_{ij} de dicha matriz están dados por Wang (2002)

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } n(i=j) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (2)$$

donde d_i es el grado del nodo i , el cual se calcula mediante la suma de los elementos de la fila i de la matriz de adyacencia $\mathbf{T}(G)$, esto es

$$d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N (i,j) \in E(G) \quad (3)$$

en el caso de los digrafos podemos distinguir entre el grado de entrada d_i^- y el grado de salida d_i^+ , donde el primero es la suma de todos los arcos que tienen al nodo i como final y el segundo es la suma de los que lo tienen como inicio. En el presente trabajo se utilizará el grado de entrada para referirse al grado de un digrafo.

Matriz laplaciana $\mathbf{L}(G)$. Es una representación matricial de un grafo. Tiene dimensión $N \times N$ y se forma por la diferencia entre la matriz de grado $\mathbf{D}(G)$ y la matriz de adyacencia $\mathbf{T}(G)$ ver Wang (2002), Wu (1996), esto es,

$$\mathbf{L}(G) = \mathbf{D}(G) - \mathbf{T}(G), \quad (4)$$

por tanto, es posible calcular cada uno de sus elementos l_{ij} de la siguiente manera,

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } (i=j) \\ -1, & \text{si } (i,j) \in E(G) \\ 0 & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5)$$

Para el caso de grafos no dirigidos la matriz laplaciana posee las siguientes características Stanoev and Smilkov (2013):

- Las filas de $\mathbf{L}(G)$ suman 0, lo que significa que se tiene una matriz singular con espacio nulo (o kernel) formado únicamente de unos (i.e., $\text{Ker}[\mathbf{L}(G)] = (1, 1, \dots, 1)^T$). Por tanto, existe un valor propio igual a cero, (i.e., $\lambda_i = 0$).
- Todos sus valores propios son reales y no negativos (i.e., $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, N$).
- Si además, el grafo G está fuertemente conectado (es decir, que existe un camino desde cada uno de los nodos hacia cualquiera de los otros) el valor propio igual a cero de la matriz laplaciana es simple, es decir, tiene multiplicidad igual a uno.

Matriz de conexión $\mathbf{A}(G)$. Se utilizará la matriz de conexión o también conocida como matriz de acomplamiento, la cual es simplemente el negativo de la matriz laplaciana, ver Wang (2002), Posadas-Castillo (2008), esto es

$$\mathbf{A}(G) = -\mathbf{L}(G), \quad (6)$$

La característica más importante de esta matriz es que todos sus valores propios son negativos excepto uno, que es igual a cero en el caso de grafos fuertemente conectados, ver Wu (1996), Posadas-Castillo (2008). En las siguientes secciones será más evidente la importancia de esta matriz, pues la ley de control propuesta se basa en el uso de la misma.

3. FORMACION DE GRUPOS DE ROBOTS MOVILES

Se optó por utilizar un modelo de masa puntual para representar a los robots móviles de la red compleja pues al ser un modelo lineal, controlable y observable, permite centrar la atención en las propiedades emergentes de la red en vez de hacerlo en cada uno de los nodos en específico. El modelo matemático de una masa puntual se representa en Qu et al. (2007) mientras que en Cortinat-Velez (2012) y en Martínez-Clark et al. (2013) se realizan aplicaciones de sincronización de estas masas. En lo sucesivo, se utilizará el término masa puntual para referirse al siguiente modelo,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases} \quad (7)$$

En este caso, el estado de x_1 de (7) representa la posición del robot móvil, mientras que el estado de x_2 se asocia a la velocidad del mismo. Es conveniente observar que este modelo representa el movimiento en una dimensión, esto debido a que se plantea formar independientemente cada uno de los ejes de movimiento del robot (en un plano para un robot con ruedas, o en el espacio en el caso de robots voladores) con una ley de control similar para cada componente de posición. Por tanto, se propone una ley de control distribuido para un *grupo homogéneo* de N sistemas dinámicos continuos de la forma

$$\dot{x}_i = f(x_i) + u_i \quad (8)$$

donde $x_i \in R^n$ es el vector de estados del i -ésimo robot y $u_i = (u_{i1} 0 \dots 0) \in R^n$ es el vector de entradas de control. En este caso, se propone el uso de un controlador que actúa sólo sobre la *primer variable de estado* de cada robot móvil, el cual tiene la siguiente estructura,

$$u_{j1} = \sum_{i=1}^N c_{ij} a_{ij} x_{i1} + \delta_{ij} (a_{ij} x_{i1} + \Delta_{ij}), \quad (9)$$

donde c_{ij} es la fuerza de acoplamiento entre los robots i y j , a_{ij} es un elemento de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A} = (a_{ij})$, Δ_{ij} es la distancia deseada entre los robots i y j y δ_{ij} es el coeficiente de repulsión, el cual puede tomar los siguientes valores

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| \geq \Delta_{ij}, \\ \delta, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| \leq \Delta_{ij} \end{cases} \quad (10)$$

con $\delta \in R^n$. La idea es que el controlador se comporte de la siguiente manera, la primer parte del controlador trata de igualar los estados del robot j a los del robot i cuando están suficientemente alejados entre sí (una distancia mayor a Δ_{ij}), cuando la diferencia entre el primer estado (asociado a la posición del robot) es más pequeña que la distancia deseada entre ellos, el coeficiente de repulsión actúa para lograr la separación deseada.

3.1 Convergencia

A continuación se presentan las condiciones suficientes para que el controlador logre el objetivo de formación de un grupo de robots. Para ilustrar la convergencia de los estados, se utilizan como nodos las masas puntuales cuyo modelo se describe en (7). Dichas masas se acoplan en

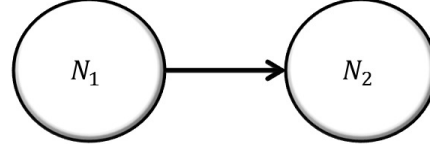


Fig.1. Dos robots móviles en topología cadena, con acoplamiento maestro y esclavo.

topología cadena con comunicación unidireccional (véase la figura 1) desde el robot N_1 (considerando el maestro) hacia el N_2 (el esclavo). La matriz de acoplamiento asociada a este caso es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

por tanto, las ecuaciones del robot maestro N_1 tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12}, \\ \dot{x}_{12} = -x_{11} - 2x_{12} \end{cases} \quad (12)$$

mientras que las ecuaciones del robot esclavo N_2 son

$$\begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} + c_{12}(x_{11} - x_{21}) + \delta_{12}((x_{11} - x_{21}) + \Delta_{12}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{21} - 2x_{22} \end{cases} \quad (13)$$

para encontrar la convergencia del robot esclavo N_2 en estado estacionario, se iguala a cero el lado derecho de (13) y resolviendo para x_{21} y x_{22} , se tiene que dichos estados tienden a

$$\begin{aligned} x_{21} &= \frac{x_{22} + c_{12}x_{11} + \delta_{12}(x_{11} + \Delta_{12})}{C_{12} + \delta_{12}}, \\ x_{22} &= \frac{-x_{21}}{-2} \end{aligned} \quad (14)$$

ahora, considerando que es posible seleccionar $\delta_{12} \gg c_{12}$ y $\delta_{12} \gg 1$, entonces el robot esclavo N_2 en estado estacionario tiende a

$$\begin{aligned} x_{21} &= (x_{11} + \Delta_{12}), \\ x_{22} &= \frac{-x_{21}}{-2} \end{aligned} \quad (15)$$

así que con la *selección apropiada del coeficiente de repulsión* δ la posición del robot esclavo N_2 tiende a la del robot maestro N_1 más una distancia deseada Δ_{12} , lo cual concuerda con el problema de formación.

3.2 Formación de grupos de robots en varias topologías

Para efectos de este trabajo, se seleccionaron tres diferentes topologías: estrella, cadena y anillo; con el acoplamiento tanto unidireccional como bidireccional. Estas topologías son formadas por *redes de tres robots móviles representados por masas puntuales* con modelo matemático descrito por (7). Se presentarán simulaciones numéricas representativas para cada topología.

Red en topología estrella. Para este caso y con *comunicación unidireccional* (figura 2) se tiene la siguiente matriz de acoplamiento $\mathbf{A}_{estrella}$

$$\mathbf{A}_{estrella} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

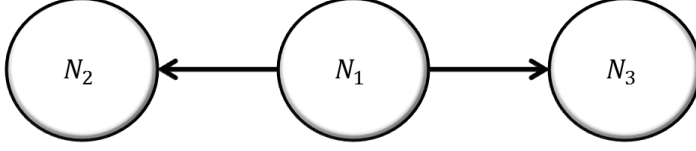


Fig.2. Tres masas puntuales en topología estrella con comunicación unidireccional entre ellas.

por tanto, las ecuaciones de los tres robots se describen a continuación comenzando con las ecuaciones del robot maestro N_1

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} + v, \\ \dot{x}_{12} = -x_{11} - 2x_{12} \end{cases} \quad (17)$$

las ecuaciones del robot esclavo N_2 ,

$$\begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} + c(x_{11} - x_{21}) + \delta_{12}((x_{11} - x_{21}) + \Delta_{12}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{21} - 2x_{22} \end{cases} \quad (18)$$

y por último, las ecuaciones del robot esclavo N_3

$$\begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} + c(x_{11} - x_{31}) + \delta_{13}((x_{11} - x_{31}) + \Delta_{13}), \\ \dot{x}_{32} = -x_{31} - 2x_{32} \end{cases} \quad (19)$$

Se observa que la primera ecuación del robot maestro N_1 (estado x_{11}) contiene un término que no fue descrito anteriormente, as pues, la ley de control v se incluye para dar al robot una trayectoria específica, ya que el objetivo de estos controladores será formar grupos de robots móviles para tareas de exploración y vigilancia. En esta ocasión, se tiene que $v = \sin 2t$, esta trayectoria variante en tiempo permite evaluar la respuesta del controlador a dichas variaciones. Siguiendo el procedimiento descrito en se selecciona $c = 1$, también se selecciona $\delta = 100$ para cumplir con la condición $\delta \gg 1$. Para simulación se seleccionó $\Delta_{12} = 2y\Delta_{13} = -1$ con condiciones iniciales: $x_1(0) = (4, 1)^T$, $x_2(0) = (-10, 3)^T$, $x_3(0) = (10, -2)^T$. En la figura 3 se observa tanto la posición como la velocidad de los tres robots.

Red en topología cadena. En este caso, se presenta una *comunicación bidireccional* entre los robots (como se ilustra en la figura 4). La matriz de acoplamiento para este caso es

$$\mathbf{A}_{cadena} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

Las ecuaciones dinámicas de cada robot para este caso se describen a continuación, primeramente se tienen las ecuaciones del robot N_1

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} + c(x_{21} - x_{11}) + \delta_{12}((x_{21} - x_{11}) - \Delta_{12}) + v, \\ \dot{x}_{12} = -x_{11} - 2x_{12} \end{cases} \quad (21)$$

después se tienen las del robot N_2

$$\begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} + c(x_{11} - x_{21}) + \delta_{12}((x_{11} - x_{21}) + \Delta_{12}) + \delta_{23}((x_{31} - x_{21}) + \Delta_{23}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{21} - 2x_{22} \end{cases} \quad (22)$$

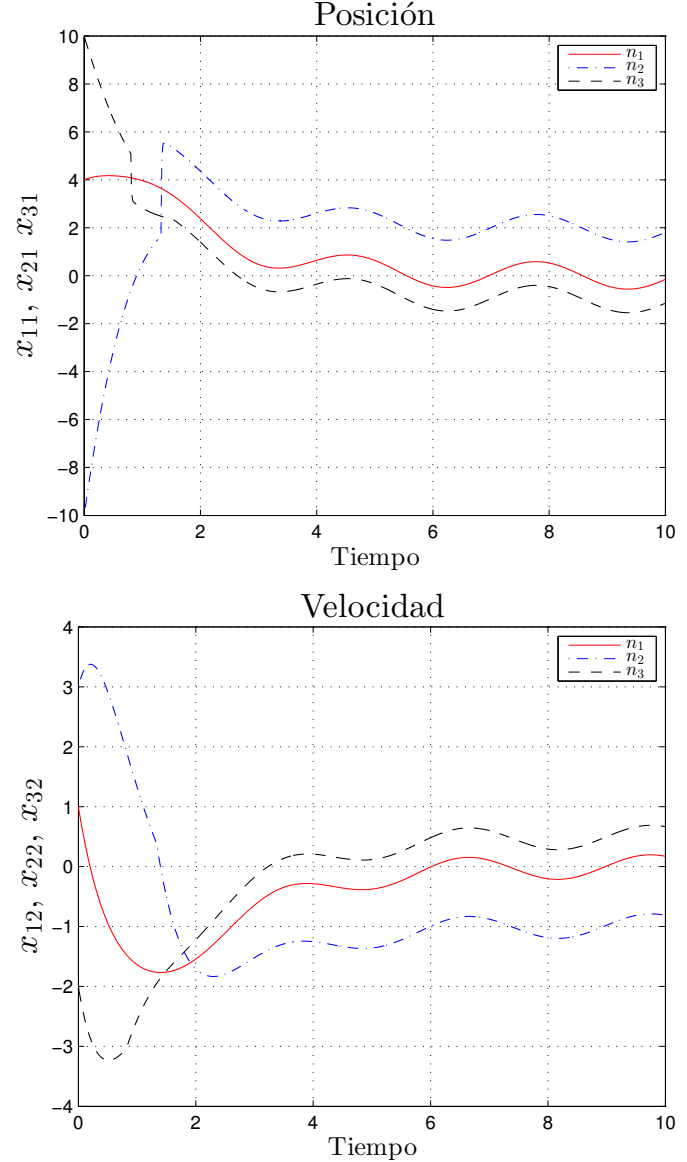


Fig.3. Posición(a) y velocidad (b) de tres robots formados en una red con topología estrella con comunicación unidireccional.

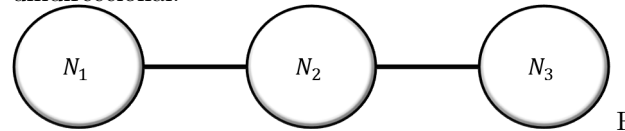


Fig.4.

Masas puntuales en topología de cadena con comunicación bidireccional.

y por último, las ecuaciones del robot N_3

$$\begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} + c(x_{21} - x_{31}) + \delta_{23}((x_{21} - x_{31}) + \Delta_{23}), \\ \dot{x}_{32} = -x_{31} - 2x_{32} \end{cases} \quad (23)$$

Para la simulación, de nuevo se seleccionó $c = 1$ y $\delta = 100$, la formación final estará dada por $\Delta_{12} = 2y\Delta_{23} = 1$ mientras que las condiciones iniciales de los robots son:

$\mathbf{x}_1(0) = (1, 0)^T, \mathbf{x}_2(0) = (-100, 0)^T, \mathbf{x}_3(0) = (100, 0)^T$. EN este caso, se decidió que las distancias iniciales entre los robos, fuesen lo suficientemente lejanas para observar si la convergencia se sostiene. En la figura 5 se observa un acercamiento de la gráfica de posición y la de velocidad para comprobar que se logra la formación. EN este caso,

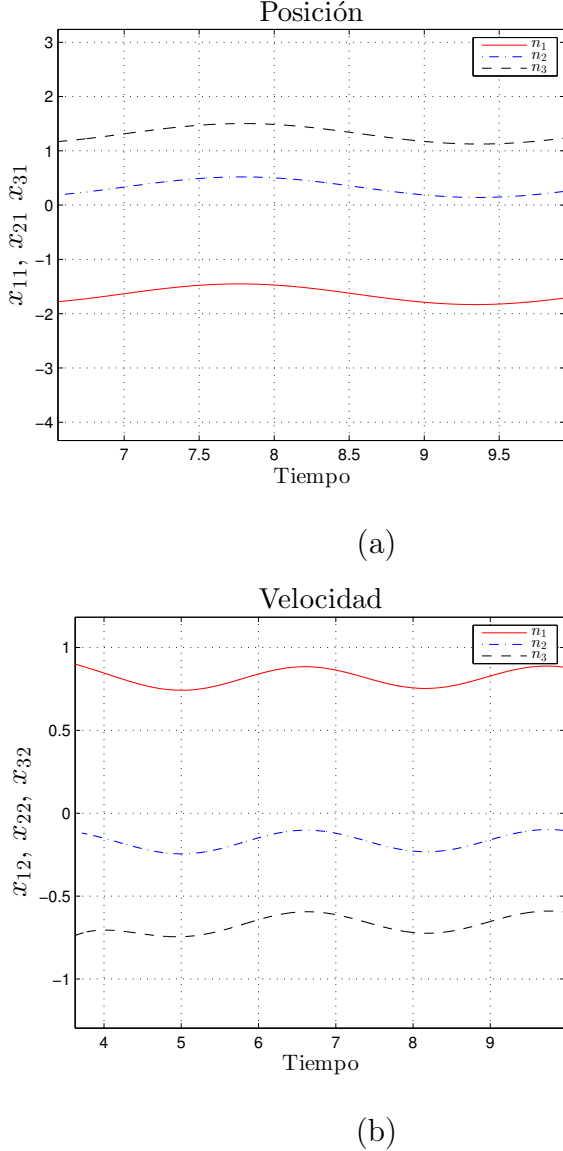


Fig. 5. Posicion (a) y velocidad (b) de tres robots formados en una red con topologia cadena con acoplamiento bidireccional.

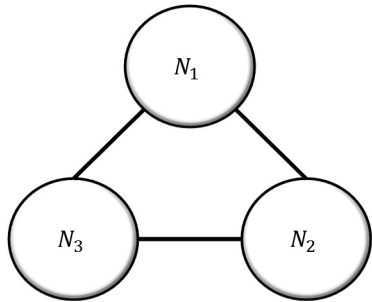


Fig. 6. Red de tres masas puntuales conectadas en topologia anillo con enlaces bidireccionales.

se observa el efecto de la comunicacion bidireccional en la posicion del robot N_1 pues en vez de oscilar en torno a 0, esta vez lo hace alrededor de -2 pues los otros nodos ejercen fuerza de atraccion sobre el modificando su trayectoria de convergencia. Red en topologia anillo. En el caso de esta topologia se selecciono una comunicacion bidireccional entre los robots (igual a la figura 6), de esta forma la matriz de acoplamiento tiene la siguiente forma,

$$A_{anillo} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

por tanto, las ecuaciones para los robots se describen a continuacion, en primer lugar las ecuaciones del robot N_1 ,

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = x_{12} + c(x_{21} + x_{31} - 2x_{11} + \delta_{12}(x_{21} - x_{11} - \Delta_{12}) \\ \quad + \delta_{13}(x_{31} - x_{11} + \Delta_{31} + v), \\ \dot{x}_{12} = -x_{21} + 2x_{22} \end{cases} \quad (25)$$

seguidas de las ecuaciones del robot N_2 ;

$$\begin{cases} \dot{x}_{21} = x_{22} + c(x_{11} + x_{31} - 2x_{21} + \delta_{12}(x_{11} - x_{21} - \Delta_{12}) + \\ \quad + \delta_{23}(x_{31} - x_{21} + \Delta_{23}), \\ \dot{x}_{22} = -x_{31} + 2x_{32} \end{cases} \quad (26)$$

y finalmente, las correspondientes al robot N_3 ,

$$\begin{cases} \dot{x}_{31} = x_{32} + c(x_{11} + x_{21} - 2x_{31} + \delta_{23}(x_{21} - x_{31} - \Delta_{23}) \\ \quad + \delta_{13}(x_{11} - x_{31} + \Delta_{31}), \\ \dot{x}_{32} = -x_{31} + 2x_{32} \end{cases} \quad (27)$$

se mantuvo la misma fuerza de acoplamiento $c = 1$ y el mismo coeficiente de acoplamiento = 100; la formacion propuesta esta dada por $12 = 3$ y $23 = 1$: Para este caso, las condiciones iniciales son: $x_1(0) = (3; 0)^T, x_2(0) = (3; 0)^T, x_3(0) = (3; 0)^T$. En este caso se plantea el escenario en el que los robots inician con una distancia menor a la distancia deseada, esto con el proposito de observar al control discontinuo (10) en accion desde el principio de la simulacion, se llevo esta condicion hasta el extremo, en el cual, se supone que todos los robots tienen la misma posicion inicial. La figura 7 conrma que se sostiene la formacion de los tres robots.

4. CONCLUSIONES

Se presento una estrategia de control distribuido que permite lograr la formacion de un grupo homogeneo de robots moviles, este controlador se basa en el envio de la posicion actual de los robots siguiendo la topologia de conexcion que existe entre ellos. Para lograr este objetivo de formacion, es necesario seleccionar adecuadamente el coeficiente de repulsion con el fin de disminuir el efecto

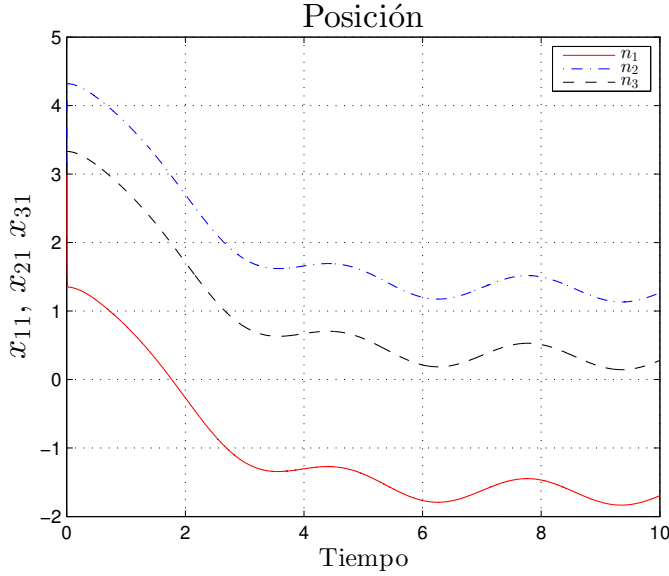
de la dinamica propia del robot. Cabe destacar que la estrategia utilizada en este trabajo fue la de formar cada uno de los ejes por separado, es por esto que se tendran tantas leyes de control como ejes de movimiento esten disponibles. Se presentaron simulaciones numericas para validar la ecacia del controlador en diferentes escenarios, entre los cuales, se incluye la adiccion de una trayectoria variante en tiempo para alguno de los robots. Se hace incapie en la necesidad de incluir un termino de evasion de objetos para evitar colisiones entre los robots, pues la topologa de conexion no permite que los robots conozcan a todos los demas del grupo. Esto permitira utilizar este.

esquema de control para aplicarlo en tareas de exploracion o patrullaje. A continuacion se mencionan algunas de las actividades a realizar posteriormente:

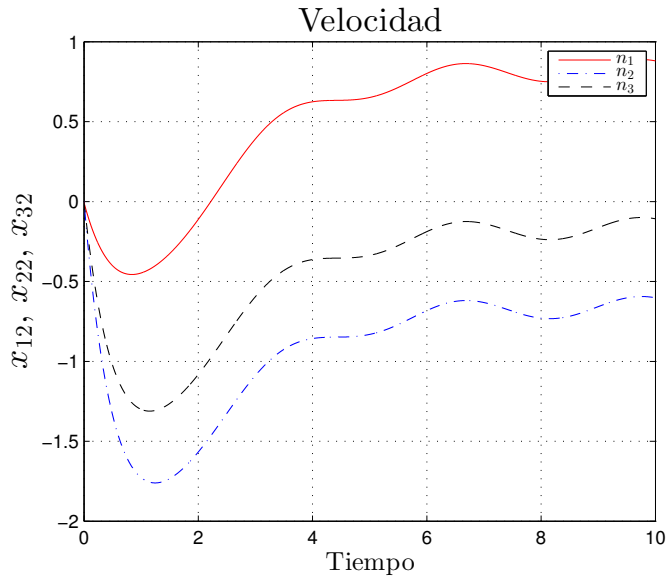
- Incluir un termino en el controlador, para evitar colisiones entre los robots que no se encuentran acoplados directamente.
- Realizar mas simulaciones que incluyan la formacion en dos dimensiones.
- Aumentar el numero de robots en el grupo.
- Utilizar la formacion de robots para aplicarlo en tareas de exploracion, patrullaje, etc.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al CONACYT, por el apoyo economico brindado a traves del proyecto de Grupos de Investigacion en Ciencia Basica, Ref. 166654.



(a)



(b)

Fig. 7. Posicion (a) y velocidad (b) de tres robots formados en una red con topologa anillo con comunicacion bidireccional.

REFERENCES

- Auyang, S. (1999). *Foundations of complex-system theories: in economics, evolutionary biology, and statistical physics*. Cambridge University Press.
- Axelrod, R. (1997). *The complexity of cooperation: Agent-based models of competition and collaboration*. Princeton University Press.
- Bar - Yam, Y. (1997). *Dynamics of complex systems*. Addison-Wesley.
- Berge, C. (2001). *The theory of graphs*. Dover.
- Cortinat-Velez, S. (2012). *Sincronización de múltiples sistemas móviles en diferentes topologías*. licenciatura, Universidad Autónoma de Baja California.
- Kelly, R., Carelli, R., Zannatha, J.I., and Monroy, C. (2004). control de una pandilla de robots móviles para el seguimiento de una constelación de puntos objetivo. In *VI Congreso Mexicano de Robótica*, 83–89.
- Martínez-Clark, R., Reyes-De la Cruz, D., Cruz-Hernández, C., López-Gutiérrez, R.M., and Pinedo-Lomelí, L.F. (2013). Sincronización de robots móviles en redes complejas deterministas de mundo pequeño. In *Congreso Internacional COMPUMAT 2013*. La Habana Cuba, del 27 al 29 de noviembre.
- Posadas-Castillo, C. (2008). *Sincronización de sistemas complejos*. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Baja California.
- Posadas-Castillo, C., Cruz-Hernández, C., and López-Gutiérrez, R.M. (2009). Experimental realization of synchronization in complex networks with Chua's circuits like nodes. *Chaos, Solitons and Fractals*, 40(4), 1963–1975. doi:10.1016/j.chaos.2007.09.076.
- Qu, Z., Wang, J., and Hull, R.a. (2007). Leaderless cooperative formation control of autonomous mobile robots under limited communication range constraints. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 588, 79–104.
- Stanoev, A. and Smilkov, D. (2013). Consensus theory in networked systems. In L. Kocarev (ed.), *Understanding Complex Systems*, 1–22. Springer Berlin Heidelberg. doi:10.1007/978-3-642-33359-0-1.
- Wang, X.F. (2002). Complex Networks: Topology, Dynamics and Synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 12(05), 885–916. doi: 10.1142/S0218127402004802.
- Wu, C.W. (1996). On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 43(2), 161–165. doi:10.1109/81.486440.
- Yamaguchi, H., Arai, T., and Beni, G. (2001). A distributed control scheme for multiple robotic vehicles to make group formations. *Robotics and Autonomous Systems*, 36(4), 125–147. doi: 10.1016/S0921-8890(01)00133-6.