



Universidad Autónoma de Baja California  
Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño



# INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA



ETAPA BÁSICA

MANUAL DE EJERCICIOS

**13180 CÁLCULO AVANZADO**

*Prof. E. Efrén García G.*

Ensenada, B.C. México 2019

Ver 1.4

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA

## FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

### INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

#### TAREA I - CÁLCULO AVANZADO-

Dr. E. Efrén García Guerrero.

- Encuentre una ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la línea:
  - La línea que pasa por el punto  $(6, -5, 2)$  y es paralela al vector  $\vec{v} = (1, 3, -\frac{2}{3})$ .
  - La línea que pasa por el punto  $(2, 2.4, 3.5)$  y es paralela al vector  $\vec{w} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ .
- ¿La línea que pasa por  $(-4, -6, 1)$  y  $(-2, 0, -3)$  es paralela a la línea que pasa por  $(10, 18, 4)$  y  $(5, 3, 14)$ ?
- ¿La línea que pasa por  $(4, 1, -1)$  y  $(2, 5, 3)$  es perpendicular a la línea que pasa por  $(-3, 2, 0)$  y  $(5, 1, 4)$ ?
- Determine si las líneas  $L_1$  y  $L_2$  son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se cortan, determine el punto de intersección.

(a)  $L_1 : \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{3}$

$L_2 : \quad \frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{2}$

(b)  $L_1 : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$

$L_2 : \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3}$

(c)  $L_1 : \quad x = -6t, \quad y = 1 + 9t, \quad z = -3t$

$L_2 : \quad x = 1 + 2s, \quad y = 4 - 3s, \quad z = s$

- ¿Cuáles de las siguientes líneas son paralelas? ¿Algunas de ellas son idénticas?

$L_1 : \quad x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$

$L_2 : \quad x + 1 = y - 2 = 1 - z$

$L_3 : \quad x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$

$L_4 : \quad \vec{r} = (2, 1, -3) + t(2, 2, -10)$

6. Encuentre el punto en el que se cortan las líneas dadas:

$$L_1 : \quad \vec{r} = (1, 1, 0) + t(1, -1, 2)$$

$$L_2 : \quad \vec{r} = (2, 0, 2) + s(-1, 1, 0)$$

7. Obtenga una ecuación vectorial para el segmento de recta de  $(2, -1, 4)$  a  $(4, 6, 1)$ .

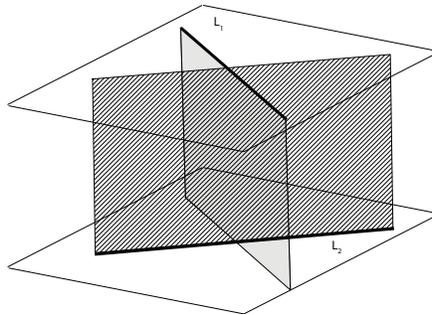
8. Describa la curva que define la siguiente función vectorial:  $\vec{r} = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t)$ .

9. Trace la curva cuya ecuación vectorial es:  $\vec{r} = \cos(t) \hat{i} + \sin(t) \hat{j} + t \hat{k}$ .

10. Demuestre que la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:  $x = t^2, y = 1 - 3t, z = 1 + t^3$  pasa por los puntos  $(1, 4, 0)$  y  $(9, -8, 28)$ , pero no por el punto  $(4, 7, -6)$ .

11. **Investigue y estudie la fórmula para encontrar: i) la distancia de un punto a una línea recta y ii) la distancia de un punto a un plano.**

• En este ejercicio se presenta un tercer problema de distancias, la distancia de dos rectas que se cruzan. Dos rectas en el espacio se *cruzan* (como  $L_1$  y  $L_2$ ) si no son paralelas ni se cortan en algún punto (ver la figura anexa).



(a) Encuentre la distancia entre las siguientes dos rectas en el espacio.

$$L1 : x = 4 + 5t, y = 5 + 5t, z = 1 - 4t$$

$$L2 : x = 4 + s, y = -6 + 8s, z = 7 - 3s$$

Siga el siguiente procedimiento:

i) Mostrar que estas rectas no son paralelas.

ii) Mostrar que estas rectas no se cortan, y por consiguiente las rectas se cruzan.

iii) Mostrar que las dos rectas están en planos paralelos.

iv) Hallar la distancia entre los planos paralelos del apartado iii), lo que corresponde a encontrar la distancia entre las rectas que se cruzan.

12. Encontrar la distancia entre las rectas.

$$L1 : x = 2t, y = 4t, z = 6t$$

$$L2 : x = 1 - s, y = 4 + s, z = -1 + s$$

13. Encontrar la distancia entre las rectas.

$$L1 : x = 3t, y = 2 - t, z = -1 + t$$

$$L2 : x = 1 + 4s, y = -2 + s, z = -3 - 3s$$

14. Desarrollar una fórmula para encontrar la distancia de las rectas que se cruzan.

$$L1 : x = x_1 + a_1t, y = y_1 + b_1t, z = z_1 + c_1t$$

$$L2 : x = x_2 + a_2s, y = y_2 + b_2s, z = z_2 + c_2s$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA

**FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO**  
**INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA**  
**TAREA II - CÁLCULO AVANZADO -**  
**Dr. E. Efren García Guerrero.**

1. Encuentre una ecuación del plano:

- (a) Que pasa por el punto  $(6, 3, 2)$  y es perpendicular al vector  $(-2, 1, 5)$ .
  - (b) Que pasa por el punto  $(-2, 8, 10)$  y es perpendicular a la línea  $x = 1 + t, y = 2t, z = 4 - 3t$ .
  - (c) Que pasa por el origen y es paralelo al plano  $2x - y + 3z = 1$ .
  - (d) Que contiene la línea  $x = 3 + 2t, y = t, z = 8 - t$  y es paralelo al plano  $2x + 4y + 8z = 17$ .
  - (e) Que pasa por el origen y los puntos  $(2, -4, 6)$  y  $(5, 1, 3)$ .
  - (f) Que pasa por el punto  $(-1, 2, 1)$  y contiene la línea de intersección de los planos  $x + y - z = 2$  y  $2x - y + 3z = 1$ .
- 

2. Encuentre el punto en el que la línea corta al plano dado:

- (a)  $x = 3 - t, y = 2 + t, z = 5t$ ;  $x - y + 2z = 9$
  - (b)  $x = 1 + 2t, y = 4t, z = 2 - 3t$ ;  $x + 2y - z + 1 = 0$
- 

3. Determine si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguno. Si no son paralelos ni perpendiculares encuentre el ángulo entre ellos:

- (a)  $x + 4y - 3z = 1, -3x + 6y + 7z = 0$
  - (b)  $2z = 4y - x, 3x - 12y + 6z = 1$
  - (c)  $x = 4y - 2z, 8y = 1 + 2x + 4z$
- 

4. Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea que pasa por el punto  $(0, 1, 2)$  que es paralela al plano  $x + y + z = 2$  y perpendicular a la línea  $x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t$ .

5. Encuentre el punto de intersección de las rectas  $L_1$  y  $L_2$  y luego encuentre el plano que contiene a dichas rectas.

$$L_1: \quad x = t \quad , \quad y = -t + 2 \quad , \quad z = t + 1.$$

$$L_2: \quad x = 2s + 2 \quad , \quad y = s + 3 \quad , \quad z = 5s + 6$$

6. Encuentre dos planos diferentes cuya intersección sea la recta

$$L: \quad x = 1 + t \quad , \quad y = 2 - t \quad , \quad z = 3 + 2t.$$

Escriba la ecuación para cada plano en la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$ .

7. Demuestre que la recta en que los planos  $\Omega_1: x + 2y - 2z = 5$  y  $\Omega_2: 5x - 2y - z = 0$  se intersecan es paralela a la recta  $L: \quad x = -3 + 2t \quad , \quad y = 3t \quad , \quad z = 1 + 4t$ .

8. Encuentre el vector del origen al punto de intersección de las medianas del triángulo cuyos vértices son:  $A(1, -1, 2)$ ,  $B(2, 1, 3)$  y  $C(-1, 2, -1)$ . Después, encuentre la ecuación del plano definido por dichos vértices.

9. Sea la función vectorial  $\vec{r}(t)$  la posición de una partícula en el plano  $xy$ . Encuentre: *i*) una ecuación en  $x$  e  $y$  cuya gráfica sea la trayectoria de la partícula, *ii*) la gráfica la trayectoria y *iii*) los vectores velocidad y aceleración en el tiempo dado.

(a)  $\vec{r}(t) = (t + 1)\hat{i} + (t^2 - 1)\hat{j}; \quad t = 1.$

(b)  $\vec{r}(t) = (t^2 + 1)\hat{i} + (2t - 1)\hat{j}; \quad t = 1/2.$

(c)  $\vec{r}(t) = e^t\hat{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\hat{j}; \quad t = \ln 3.$

(d)  $\vec{r}(t) = (\cos 2t)\hat{i} + (2 \sin 2t)\hat{j}; \quad t = 0.$

10. En los siguientes ejercicios se dan los vectores de posición de partículas que se mueven a lo largo de varias curvas en el plano  $xy$ . En cada caso encuentre los vectores velocidad  $\vec{v}$  y aceleración  $\vec{a}$  de la partícula en los tiempos estipulados y trácelos como vectores sobre la curva.

(a) Movimiento sobre el círculo  $x^2 + y^2 = 1$   
 $\vec{r}(t) = (\sin t)\hat{i} + (\cos t)\hat{j}; \quad t = \pi/4 \quad \text{y} \quad \pi/2.$

(b) Movimiento sobre el círculo  $x^2 + y^2 = 16$   
 $\vec{r}(t) = (4 \cos \frac{t}{2})\hat{i} + (4 \sin \frac{t}{2})\hat{j}; \quad t = \pi \quad \text{y} \quad 3\pi/2.$

(c) Movimiento sobre la cicloide  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$   
 $\vec{r}(t) = (t - \sin t)\hat{i} + (1 - \cos t)\hat{j}; \quad t = \pi \quad \text{y} \quad 3\pi/2.$

(d) Movimiento sobre la parábola  $y = x^2 + 1$   
 $\vec{r}(t) = t\hat{i} + (t^2 + 1)\hat{j}; \quad t = -1, 0, \text{y} 1.$

- 
- En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA  
TAREA III - CÁLCULO AVANZADO -

Dr. E. Efrén García G.

Sistemas de coordenadas: Cartesiano, Cilíndrico y Esférico

1. Expresé los puntos siguientes en coordenadas cartesianas:

- (a)  $P(1, 60^\circ, 2)$
- (b)  $Q(2, 90^\circ, -4)$
- (c)  $R(3, 45^\circ, 210^\circ)$
- (d)  $T(4, \pi/2, \pi/6)$

2. Expresé los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas y esféricas:

- (a)  $P(1, -4, -3)$
- (b)  $Q(3, 0, 5)$
- (c)  $R(-2, 6, 0)$

3. (a) Si  $V = xz - xy + yz$ , expresé  $V$  en coordenadas cilíndricas.

(b) Si  $U = x^2 - 2y^2 + 3z^2$ , expresé  $U$  en coordenadas esféricas.

4. Transforme los vectores siguientes en coordenadas cilíndricas y esféricas:

- (a)  $\vec{D} = (x + z)\hat{a}_y$
- (b)  $\vec{E} = (y^2 - x^2)\hat{a}_x + xyz\hat{a}_y + (x^2 - z^2)\hat{a}_z$

5. Convierta los vectores siguientes a los sistemas cilíndrico y esférico:

- (a)  $\vec{F} = \frac{x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + 4\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- (b)  $\vec{G} = (x^2 + y^2) \left[ \frac{x\hat{a}_x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y\hat{a}_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\hat{a}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]$

6. Expresé los vectores siguientes en coordenadas cartesianas:

- (a)  $\vec{A} = \rho(z^2 + 1)\hat{a}_\rho - \rho z \cos \phi \hat{a}_\phi$
- (b)  $\vec{B} = 2r \sin \theta \cos \phi \hat{a}_r + r \cos \theta \cos \theta \hat{a}_\theta - r \sin \phi \hat{a}_\phi$
- (c)  $\vec{C} = z \sin \phi \hat{a}_\rho - \rho \cos \phi \hat{a}_\phi + 2\rho z \hat{a}_z$
- (d)  $\vec{D} = \frac{\sin \theta}{r^2} \hat{a}_r + \frac{\cos \theta}{r^2} \hat{a}_\theta$

7. Compruebe lo siguiente:

(a)  $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\rho = \cos \phi$

$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\phi = -\sin \phi$

$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\rho = \sin \phi$

$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\phi = \cos \phi$

(b)  $\hat{a}_x \cdot \hat{a}_r = \sin \theta \cos \phi$

$\hat{a}_x \cdot \hat{a}_\theta = \cos \theta \cos \phi$

$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_r = \sin \theta \sin \phi$

$\hat{a}_y \cdot \hat{a}_\theta = \cos \theta \sin \phi$

$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_r = \cos \theta$

$\hat{a}_z \cdot \hat{a}_\theta = -\sin \theta$

8. (a) Expresar el campo vectorial  $\vec{H} = xy^2z\hat{a}_x + x^2yz\hat{a}_y + xyz^2\hat{a}_z$  en coordenadas cilíndricas y esféricas.

(b) Determine  $\vec{H}$  en  $(3, -4, 5)$  en coordenadas tanto cilíndricas como esféricas.

9. Sea  $\vec{A} = \rho \cos \phi \hat{a}_\rho + \rho z^2 \sin \phi \hat{a}_z$ .

(a) Transforme  $\vec{A}$  a coordenadas rectangulares y calcule su magnitud en el punto  $(3, -4, 0)$ .

(b) Transforme  $\vec{A}$  al sistema esférico y calcule su magnitud en el punto  $(3, -4, 0)$ .

10. Calcule la distancia entre los pares de números siguientes:

(a)  $(2, 1, 5)$  y  $(6, -1, 2)$

(b)  $(3, \pi/2, -1)$  y  $(5, 3\pi/2, 5)$

(c)  $(10, \pi/4, 3\pi/4)$  y  $(5, \pi/6, 7\pi/4)$

11. Dado el punto  $P(-2, 6, 3)$  y el vector  $\vec{A} = y\hat{a}_x + (x+z)\hat{a}_y$ , exprese  $P$  y  $\vec{A}$  en coordenadas cilíndricas y esféricas. Evalúe  $\vec{A}$  en  $P$  en los sistemas cartesiano, cilíndrico y esférico.

12. Convierta los puntos  $P(1, 3, 5)$ ,  $T(0, -4, 3)$  y  $S(-3, -4, -10)$  de coordenadas cartesianas a cilíndricas y esféricas.

13. Transforme el vector  $\vec{Q} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} \hat{a}_x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{yz \hat{a}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$  a coordenadas cilíndricas y esféricas.

14. Evalúe  $\vec{Q}$  del inciso anterior en  $T(0, -4, 3)$  en los tres sistemas de coordenadas.

15. Expresar el vector  $\vec{B} = \frac{10}{r} \hat{a}_r + r \cos \theta \hat{a}_\theta + \hat{a}_\phi$  en coordenadas cartesianas y cilíndricas. Halle  $\vec{B}(-3, 4, 0)$  y  $\vec{B}(5, \frac{\pi}{2}, -2)$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA  
TAREA IV - CÁLCULO AVANZADO -

Dr. E. Efren García G.

Cilindros y Superficies Cuadráticas

1. Bosqueje las gráficas de las siguientes superficies:

(a)  $z = x^2$

(b)  $x^2 + y^2 = 1$

(c)  $y^2 + z^2 = 1$

(d)  $x = z^2$

2. (a) ¿Qué representa la ecuación  $y = x^2$  como una curva en  $\mathbb{R}^2$ ?

(b) ¿Qué representa como una superficie en  $\mathbb{R}^3$ ?

3. (a) Bosqueje la gráfica de  $y = e^x$  como una curva en  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Bosqueje la gráfica de  $y = e^x$  como una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Describa y bosqueje la superficie  $z = e^y$ .

4. Describa y bosqueje la superficie:

(a)  $y^2 + 4z^2 = 4$

(b)  $z = 4 - x^2$

(c)  $x - y^2 = 0$

(d)  $yz = 4$

(e)  $z = \cos x$

(f)  $x^2 - y^2 = 1$

(g)  $x = y^2 + 4z^2$

(h)  $x^2 = y^2 + 4z^2$

(i)  $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

5. Bosqueje la región acotada por las superficies  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  y  $x^2 + y^2 = 1$  para  $1 \leq z \leq 2$ .

6. Bosqueje la región acotada por las superficies  $z = x^2 + y^2$  y  $z = 2 - x^2 - y^2$ .

7. (a) Encuentre una ecuación de la esfera que pasa por el punto  $(6, -2, 3)$  y tiene centro  $(-1, 2, 1)$ .

- (b) Encuentre la curva en la que esta esfera cruza el plano  $yz$ .
- (c) Encuentre el centro y el radio de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 6z + 1 = 0$ .
8. Dibuje la región cortada en el primer cuadrante por la curva  $\rho = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ .
  9. Dibuje la región que se encuentra dentro de la cardioide  $\rho = 1 + \cos \theta$  y fuera del círculo  $\rho = 1$ .
  10. Dibuje la región común a los interiores de las cardioides  $\rho = 1 + \cos \theta$  y  $\rho = 1 - \cos \theta$ .
  11. Dibuje el volumen de la porción de la esfera sólida  $r \leq a$  que se encuentra entre los conos  $\theta = \pi/3$  y  $\theta = 2\pi/3$ .
  12. Dibuje el volumen de la región cortada de la esfera sólida  $r \leq a$  por los medios planos  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi/6$  en el primer octante.
  13. Dibuje el volumen de la región más pequeña cortada de la esfera sólida  $r \leq 2$  por el plano  $z = 1$ .
  14. Dibuje el volumen del sólido encerrado por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  entre los planos  $z = 1$  y  $z = 2$ .
  15. Dibuje el volumen de la región limitada por el plano  $z = 0$ , lateralmente por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y arriba por el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA  
TAREA V - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efren García G.

1. Exhiba los valores de las funciones que se indican de las dos maneras siguientes: (a) trazando la superficie  $z = f(x, y)$  y (b) dibujando un grupo de **curvas de nivel** en el dominio de la función. Marque cada curva de nivel con el valor correspondiente de la función.

(a)  $f(x, y) = y^2$

(b)  $f(x, y) = 1 - |x| - |y|$

(c)  $f(x, y) = 1 - |x|$

(d)  $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

Derivadas Parciales de primer orden

2. En los siguientes ejercicios encuentre  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

(a)  $f(x, y) = 2x^2 - 3y - 4$

(b)  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$

(c)  $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$

(d)  $f(x, y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

(e)  $f(x, y) = (x^3 + (y/2))^{3/2}$

(f)  $f(x, y) = x/(x^2 + y^2)$

(g)  $f(x, y) = (x + y)/(xy - 1)$

(h)  $f(x, y) = \arctan(x/y)$

(i)  $f(x, y) = e^{(x+y+1)}$

(j)  $f(x, y) = e^{-x} \sin(x + y)$

(k)  $f(x, y) = \ln(x + y)$

(l)  $f(x, y) = e^{xy} \ln y$

(m)  $f(x, y) = \cos^2(3x - y^2)$

(n)  $f(x, y) = x^y$

(o)  $f(x, y) = \log_y x$

(p)  $f(x, y) = \int_x^y g(t)dt$  ( $g$  continua para toda  $t$ )

- (q)  $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (xy)^n$  ( $|xy| < 1$ )  
 (r)  $f(x, y) = \sin^2(x - 3y)$

3. En los siguientes ejercicios encuentre  $f_x$ ,  $f_y$  y  $f_z$ .

- (a)  $f(x, y, z) = 1 + xy^2 - 2z^2$   
 (b)  $f(x, y, z) = xy + yz + xz$   
 (c)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$   
 (d)  $f(x, y, z) = \ln(x + 2y + 3z)$   
 (e)  $f(x, y, z) = yz \ln(xy)$   
 (f)  $f(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$   
 (g)  $f(x, y, z) = \tanh(x + 2y + 3z)$   
 (h)  $f(x, y, z) = \sinh(xy - z^2)$

Derivadas parciales de segundo orden

4. En los ejercicios siguientes, verifique que  $\omega_{xy} = \omega_{yx}$ .

- (a)  $\omega = \ln(2x + 3y)$   
 (b)  $\omega = e^x + x \ln y + y \ln x$   
 (c)  $\omega = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$   
 (d)  $\omega = x \sin y + y \sin x + xy$

5. Encuentre todas las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones.

- (a)  $f(x, y) = x + y + xy$   
 (b)  $f(x, y) = \sin xy$   
 (c)  $g(x, y) = x^2y + \cos y + y \sin x$   
 (d)  $h(x, y) = xe^y + y + 1$   
 (e)  $r(x, y) = \ln(x + y)$

Ecuación de Laplace

6. La *ecuación tridimensional de Laplace*  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$  se satisface por distribuciones de temperatura en el espacio en estado estacionario  $T = T(x, y, z)$ , por potenciales gravitatorios y por potenciales electrostáticos. La *ecuación bidimensional de Laplace*  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ , describe potenciales y distribuciones de temperaturas en estado estacionario en un plano. Demuestre que cada función de los siguientes ejercicios satisface una ecuación de Laplace.

- (a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

- (b)  $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$   
 (c)  $f(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$   
 (d)  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$   
 (e)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$   
 (f)  $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \cos 5z$

Ecuación de onda

7. Si estamos en la playa de un océano y tomamos una fotografía de las olas, ésta mostrará un patrón regular de cimas y valles en un instante de tiempo. Vemos movimiento vertical periódico en el espacio, respecto a la distancia. Si nos metemos al agua, podemos sentir el subir y bajar del agua conforme pasan las olas. Vemos movimiento vertical periódico en el tiempo. En física, esta simetría se expresa por la ecuación de *onda unidimensional*  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ , donde  $w$  es la altura de la ola,  $x$  es la variable distancia,  $t$  es la variable tiempo y  $c$  es la velocidad con que se propagan las olas. En nuestro ejemplo,  $x$  es la distancia a través de la superficie del océano, pero en otras aplicaciones  $x$  podría ser la distancia a lo largo de una cuerda vibrante, la distancia a través del aire (ondas acústicas) o distancia a través del espacio (ondas de luz). El número  $c$  varía con el medio y el tipo de onda.

Demuestre que las funciones de los siguientes ejercicios, son todas solución de la ecuación de onda.

- (a)  $w = \sin(x + ct)$   
 (b)  $w = \cos(2x + 2ct)$   
 (c)  $w = \sin(x + ct) + \cos(2x + 2ct)$   
 (d)  $w = \ln(2x + 2ct)$   
 (e)  $w = \tan(2x - 2ct)$   
 (f)  $w = 5 \cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

Derivadas parciales en valores específicos

- (a) Encuentre  $\partial w / \partial r$  cuando  $r = 1$ ,  $s = -1$  si  $w = (x + y + z)^2$ ,  $x = r - s$ ,  $y = \cos(r + s)$ ,  $z = \sin(r + s)$ .  
 (b) Encuentre  $\partial w / \partial v$  cuando  $u = -1$ ,  $v = 2$  si  $w = xy + \ln z$ ,  $x = v^2/u$ ,  $y = u + v$ ,  $z = \cos u$ .

• En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA  
FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO

INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

TAREA VI - CÁLCULO AVANZADO -

**Prof: Dr. E. Efred García G.**

Derivadas direccionales

En los siguientes ejercicios, encuentre la derivada de la función en  $P_0$  en la dirección de  $\vec{A}$ .

1.  $f(x, y) = 2xy - 3y^2$ ,  $P_0(5, 5)$ ,  $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$
2.  $g(x, y) = x - (y^2/x) + \sqrt{3} \operatorname{arcsec}(2xy)$ ,  $P_0(1, 1)$ ,  $\vec{A} = 12\hat{i} + 5\hat{j}$
3.  $h(x, y) = \arctan(y/x) + \sqrt{3} \operatorname{arcsec}(xy/2)$ ,  $P_0(1, 1)$ ,  $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$
4.  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ ,  $P_0(1, -1, 2)$ ,  $\vec{A} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$
5.  $g(x, y, z) = 3e^x \cos yz$ ,  $P_0(0, 0, 0)$ ,  $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

Direcciones de crecimiento y decrecimiento más rápido

En los siguientes ejercicios, encuentre las direcciones en que las funciones crecen y decrecen más rápidamente en  $P_0$ . Luego encuentre las derivadas de las funciones en esas direcciones.

1.  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ ,  $P_0(-1, 1)$
2.  $f(x, y) = x^2y + e^{xy} \sin y$ ,  $P_0(1, 0)$
3.  $g(x, y, z) = xe^y + z^2$ ,  $P_0(1, \ln 2, 1/2)$
4.  $f(x, y, z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz$ ,  $P_0(1, 1, 1)$
5.  $h(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$ ,  $P_0(1, 1, 0)$

Planos tangentes y rectas normales a superficies

En los siguientes ejercicios, encuentre ecuaciones para (a) el plano tangente y (b) la recta normal en el punto  $P_0$  sobre la superficie dada.

1.  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ,  $P_0(1, 1, 1)$
2.  $2z - x^2 = 0$ ,  $P_0(2, 0, 2)$
3.  $\cos \pi x - x^2y + e^{xz} + yz = 4$ ,  $P_0(0, 1, 2)$
4.  $x^2 - xy - y^2 - z = 0$ ,  $P_0(1, 1, -1)$

5.  $x + y + z + 1, P_0(0, 1, 0)$

Miscelánea de problemas

1. En los siguientes ejercicios, encuentre por dos formas diferentes las derivadas que se indican.

- (a) La  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y la  $\frac{\partial z}{\partial v}$  cuando  $u = 1$  y  $v = -2$  si  $z = \ln \theta$  y  $\theta = \sqrt{v+3} [\arctan u]$
- (b) La  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y la  $\frac{\partial z}{\partial v}$  cuando  $u = 5$  y  $v = 4$  si  $z = \ln \theta$  y  $\theta = \sqrt{v+3} [\arccos u]$
- (c) La  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y la  $\frac{\partial z}{\partial v}$  cuando  $u = 3$  y  $v = -1$  si  $z = \ln \beta$  y  $\beta = \sqrt{v^2+2} [\sin u]$

2. Considere que  $\Phi(x, y, z) = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$ .

- (a) Encuentre el valor de  $\nabla \cdot \nabla \Phi$  en el punto  $P_0(1, -1, 1)$ .
- (b) Encuentre el valor de  $\nabla^2 \Phi$  en el punto  $P_0(1, -1, 1)$ .

3. Considere la superficie definida por:  $z = 2(x^2 + y^2) \exp(-x^2 - y^2)$  y que se muestra en la siguiente figura ( $\exp(u) = e^u$ ).

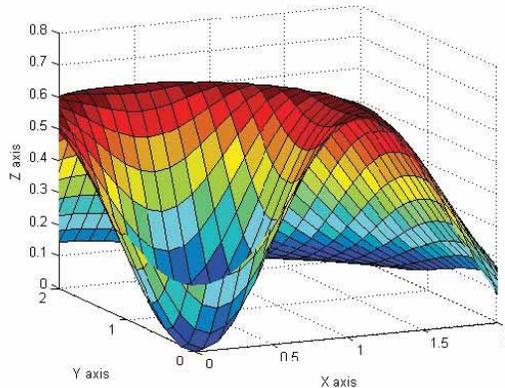


Figure 1: Sección de la superficie  $z = 2(x^2 + y^2) \exp(-x^2 - y^2)$

- (a) Encuentre el plano tangente sobre la superficie correspondiente al punto  $P_0(1, 1)$  del plano  $xy$ .
  - (b) Evalúe la derivada direccional  $\mathcal{D}_\gamma$  de la función  $z = z(x, y)$  en la dirección de  $\vec{v} = 2\hat{i} + \hat{j}$ .
4. Use la regla de la cadena para encontrar la derivada de  $w = xy$  respecto a  $t$  a lo largo de la trayectoria  $x = \cos t, y = \sin t$ . ¿Cuál es el valor de la derivada en  $t = \pi/2$ ?
5. Encuentre  $d\omega/dt$  si

$$w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

¿Cuál es el valor de la derivada en  $t = 0$ ?

6. Expresa  $\partial\omega/\partial r$  y  $\partial\omega/\partial s$  en términos de  $r$  y  $s$  si

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = r/s, \quad y = r^2 + \ln s, \quad z = 2r$$

7. Determine el GRADIENTE de los campos escalares siguientes:

- (a)  $U = x^2y + xyz$
- (b)  $V = \rho z \sin \phi + z^2 \cos^2 \phi + \rho^2$
- (c)  $f = \cos \theta \sin \theta \ln r + r^2 \phi$

8. Determine la DIVERGENCIA de los campos vectoriales siguientes:

- (a)  $\vec{P} = x^2yz \hat{a}_x + xz \hat{a}_z$
- (b)  $\vec{Q} = \rho \sin \phi \hat{a}_\rho + \rho^2 z \hat{a}_\phi + z \cos \phi \hat{a}_z$
- (c)  $\vec{T} = \frac{1}{r^2} \cos \theta \hat{a}_r + r \sin \theta \cos \phi \hat{a}_\theta + \cos \theta \hat{a}_\phi$

9. Determine la DIVERGENCIA de los campos vectoriales siguientes y evalúelos en los puntos especificados.

- (a)  $\vec{A} = yz \hat{a}_x + 4xy \hat{a}_y + y \hat{a}_z$  en  $(1, -2, 3)$
- (b)  $\vec{B} = \rho z \sin \phi \hat{a}_\rho + 3\rho z^2 \cos \phi \hat{a}_\phi$  en  $(5, \pi/2, 1)$
- (c)  $\vec{C} = 2r \cos \theta \cos \phi \hat{a}_r + r^{1/2} \hat{a}_\phi$  en  $(1, \pi/6, \pi/3)$

10. Determine el ROTACIONAL de los campos vectoriales siguientes:

- (a)  $\vec{P} = x^2yz \hat{a}_x + xz \hat{a}_z$
- (b)  $\vec{Q} = \rho \sin \phi \hat{a}_\rho + \rho^2 z \hat{a}_\phi + z \cos \phi \hat{a}_z$
- (c)  $\vec{T} = \frac{1}{r^2} \cos \theta \hat{a}_r + r \sin \theta \cos \phi \hat{a}_\theta + \cos \theta \hat{a}_\phi$

11. Determine el ROTACIONAL de los campos vectoriales del ejercicio (6.) y evalúelos en los puntos especificados.

12. If  $f(x, y) = xy$ , find the gradient vector  $\nabla f(2, 3)$  and use it to find the tangent line to the level curve  $f(x, y) = 6$  at the point  $(3, 2)$ . Sketch the level curve, the tangent line, and the gradient vector.

13. If  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$ , find the gradient vector  $\nabla g(1, 2)$  and use it to find the tangent line to the level curve  $g(x, y) = 1$  at the point  $(1, 2)$ . Sketch the level curve, the tangent line, and the gradient vector.

14. Show that the equation of the tangent plane to the ellipsoid  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  at the point  $(x_0, y_0, z_0)$  can be written as

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

15. Find the equation of the tangent plane to the hyperboloid  $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$  at  $(x_0, y_0, z_0)$  and express it a form similar to the one in Exercise 3.
16. Show that the equation of the tangent plane to the elliptic paraboloid  $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$  at the point  $(x_0, y_0, z_0)$  can be written as

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z+z_0}{c}$$

17. At what point on the paraboloid  $y = x^2 + z^2$  is the tangent plane parallel to the plane  $x + 2y + 3z = 1$ ?
18. Are there any points on the hyperboloid  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  where the tangent plane is parallel to the plane  $z = x + y$ ?
19. Show that the ellipsoid  $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$  and the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$  are tangent to each other at the point  $(1, 1, 2)$ . (This means that they have a common tangent plane at the point.)
20. Show that every plane that is tangent to the cone  $x^2 + y^2 = z^2$  passes through the origin.
21. Find parametric equations for the tangent line to the curve of intersection of the paraboloid  $z = x^2 + y^2$  and the ellipsoid  $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$  at the point  $(-1, 1, 2)$ .

• En cada problema, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA  
TAREA VII - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efren García G.

1. Aplique la regla de la cadena para hallar  $dz/dt$  o  $d\omega/dt$ .

(a)  $z = x^2 + y^2 + xy$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = e^t$

(b)  $z = \cos(x + 4y)$ ,  $x = 5t^4$ ,  $y = 1/t$

(c)  $x = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ,  $x = \ln t$ ,  $y = \cos t$

(d)  $z = \arctan(y/x)$ ,  $x = e^t$ ,  $y = 1 - e^{-t}$

(e)  $\omega = xe^{y/z}$ ,  $x = t^2$ ,  $y = 1 - t$ ,  $z = 1 + 2t$

(f)  $\omega = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ ,  $z = \tan t$

2. Mediante la regla de la cadena encuentre  $\partial z/\partial s$  y  $\partial z/\partial t$ .

(a)  $z = x^2y^3$ ,  $x = s \cos t$ ,  $y = s \sin t$

(b)  $z = \arcsin(x - y)$ ,  $x = s^2 + t^2$ ,  $y = 1 - 2st$

(c)  $z = \sin \theta \cos \phi$ ,  $\theta = st^2$ ,  $\phi = s^2t$

(d)  $z = e^{x+2y}$ ,  $x = s/t$ ,  $y = t/s$

(e)  $z = e^r \cos \theta$ ,  $r = st$ ,  $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

(f)  $z = \tan(u/v)$ ,  $u = 2s + 3t$ ,  $v = 3s - 2t$

3. Si  $z = f(x, y)$ , donde  $f$  es diferenciable,  $x = g(t)$ ,  $y = h(t)$ ,  $g(3) = 2$ ,  $h(3) = 7$ ,  $g'(3) = 5$ ,  $h'(3) = -4$ ,  $f_x(2, 7) = 6$  y  $f_y(2, 7) = -8$ . Determine  $dz/dt$  cuando  $t = 3$ .

4. Sea  $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$ , donde  $F$ ,  $u$  y  $v$  son diferenciables,  $u(1, 0) = 2$ ,  $v(1, 0) = 3$ ,  $u_s(1, 0) = -2$ ,  $v_s(1, 0) = 5$ ,  $u_t(1, 0) = 6$ ,  $v_t(1, 0) = 4$ ,  $F_u(2, 3) = -1$  y  $F_v(2, 3) = 10$ . Determine  $W_s(1, 0)$  y  $W_t(1, 0)$ .

5. Suponga que  $f$  es una función diferenciable de  $x$  y  $y$ , y que  $g(u, v) = f(e^u + \sin v, e^u + \cos v)$ . Mediante la tabla de valores calcule  $g_u(0, 0)$  y  $g_v(0, 0)$ .

	$f$	$g$	$f_x$	$f_y$
$(0, 0)$	3	6	4	8
$(1, 2)$	6	3	2	5

6. Suponga que  $f$  es una función diferenciable de  $x$  y  $y$ , y que  $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$ . Mediante la tabla de valores del ejercicio anterior calcule  $g_r(1, 2)$  y  $g_s(1, 2)$ .

7. Use la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales que se indican.

- (a) Si  $z = x^2 + xy^3$ ,  $x = uv^2 + \omega^3$  y  $y = u + ve^\omega$ . Calcular:  $\partial z/\partial u$ ,  $\partial z/\partial v$  y  $\partial z/\partial \omega$ , cuando  $u = 2$ ,  $v = 1$  y  $\omega = 0$ .
- (b) Si  $u = \sqrt{r^2 + s^2}$ ,  $r = y + x \cos t$  y  $s = x + y \sin t$ . Calcular:  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$  y  $\partial u/\partial t$ , cuando  $x = 1$ ,  $y = 2$  y  $t = 0$ .
- (c) Si  $R = \ln(u^2 + v^2 + \omega^2)$ ,  $u = x + 2y$ ,  $v = 2x - y$  y  $\omega = 2xy$ . Calcular:  $\partial R/\partial x$  y  $\partial R/\partial y$ , cuando  $x = y = 1$ .
- (d) Si  $M = xe^{y-z^2}$ ,  $x = 2uv$ ,  $y = u - v$  y  $z = u + v$ . Calcular:  $\partial M/\partial u$ ,  $\partial M/\partial v$ , cuando  $u = 3$  y  $v = -1$ .
- (e) Si  $u = x^2 + yz$ ,  $x = pr \cos \theta$ ,  $y = pr \sin \theta$  y  $z = p + r$ . Calcular:  $\partial u/\partial p$ ,  $\partial u/\partial r$  y  $\partial u/\partial \theta$ , cuando  $p = 2$ ,  $r = 3$  y  $\theta = 0$ .
- (f) Si  $Y = \omega \arctan(uv)$ ,  $u = r + s$ ,  $v = s + t$  y  $\omega = t + r$ . Calcular:  $\partial Y/\partial r$ ,  $\partial Y/\partial s$  y  $\partial Y/\partial t$ , cuando  $r = 1$ ,  $s = 0$  y  $t = 1$ .

8. Encuentre  $dy/dx$  para las siguientes funciones en forma implícita.

- (a)  $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$
- (b)  $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$
- (c)  $\cos(x - y) = xe^y$
- (d)  $\sin x + \cos y = \sin x \cos y$

9. Encuentre  $\partial z/\partial x$  y  $\partial z/\partial y$  para las siguientes funciones en forma implícita.

- (a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$
- (b)  $xyz = \cos(x + y + z)$
- (c)  $x - z = \arctan(yz)$
- (d)  $yz = \ln(x + z)$

10. Si  $u = f(x, y)$ , donde  $x = e^s \cos t$  y  $y = e^s \sin t$ , demuestre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right]$$

• En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA

FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA  
TAREA VIII - CÁLCULO AVANZADO -

Prof: Dr. E. Efrén García G.

COORDENADAS POLARES

---

1. Encuentre el área de la región cortada del primer octante por la curva  $\rho = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ .
2. Encuentre el área de la región que se encuentra dentro de la cardioide  $\rho = 1 + \cos \theta$  y fuera del círculo  $\rho = 1$ .
3. Encuentre el área encerrada dentro de un pétalo de la rosa  $\rho = 12 \cos 3\theta$ .
4. Encuentre el área de la región encerrada por el eje  $x$  positivo y la espiral  $\rho = 4\theta/3$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La región parece la concha de un caracol.
5. Encuentre el área de la región cortada del primer cuadrante por la cardioide  $\rho = 1 + \sin \theta$ .
6. Encuentre el área de la región común a los interiores de las cardioides  $\rho = 1 + \cos \theta$  y  $\rho = 1 - \cos \theta$ .

COORDENADAS CARTESIANAS

---

Encuentre los volúmenes de las regiones siguientes:

1. La región entre el cilindro  $z = y^2$  y el plano  $xy$ , que está limitada por los planos  $x = 1, y = -1, y = 1$ .
2. La región en el primer octante limitada por los planos coordenados y los planos  $x + z = 1, y + 2z = 2$ .
3. La región en el primer octante limitada por los planos coordenados, el plano  $y + z = 2$  y el cilindro  $x = 4 - y^2$ .
4. La cuña cortada del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  por los planos  $z = -y$  y  $z = 0$ .
5. El tetraedro en el primer octante limitado por los planos coordenados y el plano  $x + y/2 + z/3 = 1$ .

## COORDENADAS CARTESIANAS, CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

---

1. Encuentre el volumen de la porción de la esfera sólida  $r \leq a$  que se encuentra entre los conos  $\theta = \pi/3$  y  $\theta = 2\pi/3$ .
  2. Encuentre el volumen de la región cortada de la esfera sólida  $r \leq a$  por los medios planos  $\phi = 0$  y  $\phi = \pi/6$  en el primer octante.
  3. Encuentre el volumen de la región más pequeña cortada de la esfera sólida  $r \leq 2$  por el plano  $z = 1$ .
  4. Encuentre el volumen del sólido en-cerrado por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  entre los planos  $z = 1$  y  $z = 2$ .
  5. Encuentre el volumen de la región limitada por el plano  $z = 0$ , lateralmente por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y arriba por el paraboloides  $z = x^2 + y^2$ .
- 

1. En los apartados a) y b), graficar y hallar el volumen de las esferas deformadas.  
*Estos sólidos se usan como modelos de tumores.*

a) Esfera deformada:

$$\rho = 1 + 0.2\sin(8\theta)\sin(\phi)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

b) Esfera deformada:

$$\rho = 1 + 0.2\sin(8\theta)\sin(4\phi)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

- |  |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"><li>• En los problemas, mostrar su procedimiento matemático y las gráficas correspondientes.</li></ul> |
|--|

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
CAMPUS ENSENADA  
FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

**TAREA IX - CÁLCULO AVANZADO -**

**Dr. Enrique Efren García Guerrero.**

1. Encuentre el área del casquete cortado del paraboloides  $y^2 + z^2 = 3x$ , por el plano  $x = 1$ .
2. Encuentre el área de la región elíptica cortada del plano  $x + y + z = 1$ , por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
3. Encuentre el área del casquete cortado de la parte superior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , por el plano  $z = \sqrt{2}/2$ .
4. a) Encuentre el área de la superficie cortada del hemisferio  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $z \geq 0$ , por el cilindro  $x^2 + y^2 = 2x$ .  
b) Encuentre el área de la porción del cilindro que se encuentra dentro del hemisferio.
5. Encuentre el área cortada del paraboloides  $x^2 + y^2 - z = 0$  por el plano  $z = 2$ .
6. Encuentre el área de la banda cortada del paraboloides  $x^2 + y^2 - z = 0$  por los planos  $z = 2$  y  $z = 6$ .
7. Encuentre el área de la región cortada del plano  $x + 2y + 2z = 5$  por el cilindro cuyas paredes son  $x = y^2$  y  $x = 2 - y^2$ .
8. Encuentre el área de la porción de la superficie  $x^2 - 2z = 0$  que se encuentra arriba del triángulo limitado por las rectas  $x = \sqrt{3}$ ,  $y = 0$  y  $y = x$  en el plano  $xy$ .
9. Encuentre el área de la superficie  $x^2 - 2y - 2z = 0$  que se encuentra arriba del triángulo limitado por las rectas  $x = 2$ ,  $y = 0$  y  $y = 3x$  en el plano  $xy$ .
10. Encuentre el área del casquete cortado de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  por el cono  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
11. Encuentre el área de la elipse cortada del plano  $z = cx$  por el cilindro  $x^2 + y^2 = 1$ .
12. Encuentre el área de la porción superior del cilindro  $x^2 + z^2 = 1$  que se encuentra entre los planos  $x = \pm 1/2$  y  $y = \pm 1/2$ .
13. Encuentre el área de la porción del paraboloides  $x = 4 - y^2 - z^2$  que se encuentra arriba del anillo  $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$  en el plano  $yz$ .
14. Encuentre el área de la superficie cortada del paraboloides  $x^2 + y + z^2 = 2$  por el plano  $y = 0$ .

15. Encuentre el área de la superficie  $x^2 - 2 \ln x + \sqrt{15}y - z = 0$  arriba del cuadrado  $R$  :  $1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ , en el plano  $xy$ .
16. Encuentre el área de la superficie  $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$  arriba del cuadrado  $R$  :  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , en el plano  $xy$ .
17. Integre  $g(x, y, z) = y + z$  sobre la superficie de la cuña en el primer octante limitada por los planos coordenados y los planos  $x = 2$  y  $y + z = 1$ .
18. Integre  $g(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$  sobre la superficie cortada del cilindro parabólico  $y^2 + 4z = 16$  por los planos  $x = 0, x = 1$  y  $z = 0$ .

Encuentre el flujo del campo  $\vec{F}$  a través de la porción de la superficie dada en la dirección especificada.

19.  $\vec{F}(x, y, z) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$   
 $S$  : superficie rectangular  $z = 0, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ , en dirección  $\hat{k}$ .
  20.  $\vec{F}(x, y, z) = yx^2\hat{i} - 2\hat{j} + xz\hat{k}$   
 $S$  : superficie rectangular  $y = 0, -1 \leq x \leq 2, 2 \leq z \leq 7$ , en dirección  $-\hat{j}$ .
-

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE BAJA CALIFORNIA  
 CAMPUS ENSENADA  
 FACULTAD DE INGENIERÍA, ARQUITECTURA Y DISEÑO  
 INGENIERÍA EN NANOTECNOLOGÍA

**TAREA X - CÁLCULO AVANZADO -**

**Prof: Dr. E. Efren García G.**

1. En los siguientes ejercicios mostrar si las dos funciones vectoriales dadas definen: *a)* la misma curva orientada, *b)* curvas opuestas, *c)* una define un subarco o el opuesto de un subarco de la curva orientada definida por la otra, *d)* ninguna relacion entre ellas.

(a)  $f(\vec{t}) = t^2 \hat{e}_1 + t^4 \hat{e}_2$  para  $0 \leq t \leq 1$  &  $g(\vec{u}) = (\sin u) \hat{e}_1 + (\sin u)^2 \hat{e}_2$  para  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ .

(b)  $f(\vec{t}) = \frac{t}{t+1} \hat{e}_1 + \frac{t+1}{t-1} \hat{e}_2$  para  $2 \leq t \leq 4$  &  $g(\vec{u}) = \frac{1}{u+1} \hat{e}_1 + \frac{1+u}{1-u} \hat{e}_2$  para  $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{2}$ .

(c)  $f(\vec{t}) = [\ln(t-1)] \hat{e}_1 + \frac{1}{t-1} \hat{e}_2$  para  $2 \leq t \leq 8$  &  $g(\vec{u}) = 2(\ln u) \hat{e}_1 + u^{-2} \hat{e}_2$  para  $1 \leq u \leq 2$ .

(d)  $f(\vec{t}) = \frac{t}{t^2+1} \hat{e}_1 + t \hat{e}_2$  para  $0 \leq t \leq 1$  &  $g(\vec{u}) = u^2 \hat{e}_1 + \frac{2u}{u+1} \hat{e}_2$  para  $0 \leq u \leq 1$ .

(e)  $f(\vec{t}) = (t^2 + 1) \hat{e}_1 + t^2 \hat{e}_2$  para  $0 \leq t \leq 2$  &  $g(\vec{u}) = (\sec^2 u) \hat{e}_1 + (\sec^2 u - 1) \hat{e}_2$  para  $0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}$ .

(f)  $f(\vec{t}) = e^t \hat{e}_1 + t \hat{e}_2$  para  $-1 \leq t \leq 0$  &  $g(\vec{u}) = \frac{1}{u} \hat{e}_1 - (\ln u) \hat{e}_2$  para  $1 \leq u \leq e$ .

(g)  $f(\vec{t}) = \sqrt{t+1} \hat{e}_1 + (t+1) \hat{e}_2$  para  $-1 \leq t \leq 3$  &  $g(\vec{u}) = u \hat{e}_1 + u^2 \hat{e}_2$  para  $-2 \leq u \leq 2$ .

(h)  $f(\vec{t}) = t^2 \hat{e}_1 - \sqrt{t} \hat{e}_2$  para  $0 \leq t \leq 1$  &  $g(\vec{u}) = e^{-2u} \hat{e}_1 - e^{-u/2} \hat{e}_2$  para  $0 \leq u \leq 1$ .

2. En los siguientes ejercicios, calcular la longitud de la curva dada entre los límites indicados.

(a)  $f(\vec{t}) = (t^2 - 1, t^3)$  para  $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ .

(b)  $f(\vec{t}) = (\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}(2t+1)^{\frac{3}{2}})$  para  $0 \leq t \leq 1$ .

(c)  $f(\vec{t}) = (\frac{1}{6}t^6, \frac{1}{4}t^4)$  para  $1 \leq t \leq \sqrt[4]{5}$ .

(d)  $f(\vec{t}) = (2e^{t/2}, 4e^{3t/4})$  para  $0 \leq t \leq 2$ .

(e)  $f(\vec{t}) = (\frac{1}{3} \cos^3 t, \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t)$  para  $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ .

(f)  $f(\vec{t}) = (\sin t, \sin^{3/2} t)$  para  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ .

3. Evalúe  $\int_{\zeta} (x+y) dl$  donde  $\zeta$  es el segmento de recta  $x = t, y = (1-t), z = 0$ , de  $(0, 1, 0)$  a  $(1, 0, 0)$ .

4. Evalúe  $\int_{\zeta} (x - y + z - 2) dl$  donde  $\zeta$  es el segmento de recta  $x = t, y = (1-t), z = 1$ , de  $(0, 1, 1)$  a  $(1, 0, 1)$ .

5. Evalúe  $\int_{\zeta} (xy + y + z) dl$  a lo largo de la curva  $\vec{r}(t) = 2t \hat{i} + t \hat{j} + (2 - 2t) \hat{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

6. Evalúe  $\int_{\zeta} \sqrt{x^2 + z^2} dl$  a lo largo de la curva  $\vec{r}(t) = (4 \cos t) \hat{i} + (4 \sin t) \hat{j} + 3t \hat{k}$ ,  $-2\pi \leq t \leq 2\pi$ .

7. Encuentre la integral de línea de  $f(x, y, z) = x + y + z$  sobre el segmento de recta de  $(1, 2, 3)$  a  $(0, -1, 1)$ .

8. Encuentre la integral de línea de  $f(x, y, z) = \sqrt{3}/(x^2 + y^2 + z^2)$  sobre la curva  $\vec{r}(t) = t \hat{i} + t \hat{j} + t \hat{k}$ ,  $1 \leq t \leq \infty$ .

9. Integre  $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} - z^2$  sobre la trayectoria de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 1)$  dada por:

$$C_1 : \vec{r}(t) = t \hat{i} + t^2 \hat{j}, 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : \vec{r}(t) = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, 0 \leq t \leq 1 \text{ y que se representan en la figura 1.}$$

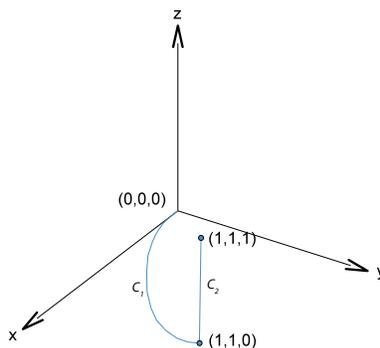


FIG. 1: Trayectoria de integración

10. Evalúe  $\int_{\zeta} (y^2 dx + x dy)$  donde (a)  $\zeta = \zeta_1$  es el segmento rectilíneo desde  $(-5, -3)$  a  $(0, 2)$  y (b) si  $\zeta = \zeta_2$  es el arco de parábola  $x = 4 - y^2$  desde  $(-5, -3)$  a  $(0, 2)$ , como se muestra en la figura 2.

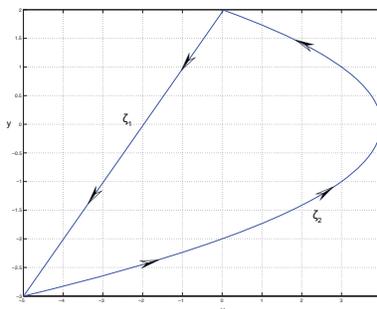


FIG. 2: Trayectoria  $\zeta$  formada por dos segmentos

11. Calcule la circulación de  $\vec{A} = \rho \hat{a}_\rho + z \sin \phi \hat{a}_\phi$ , alrededor de la curva  $L$  representada en la figura 3.

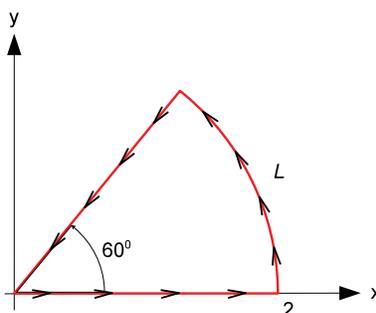


FIG. 3: Trayectoria  $L$

12. Para cada fuerza  $\vec{F}$  dada, encuentre el trabajo realizado del punto  $P_0(0, 0, 0)$  al punto  $P_1(1, 1, 1)$ , sobre cada una de las siguientes trayectorias:

- La trayectoria en línea recta  $C_1$ :  $\vec{r}(t) = t \hat{i} + t \hat{j} + t \hat{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- La trayectoria curva  $C_2$ :  $\vec{r}(t) = t \hat{i} + t^2 \hat{j} + t^4 \hat{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .
- La trayectoria  $C_3 \cup C_4$  que consiste en el segmento de recta de  $(0, 0, 0)$  a  $(1, 1, 0)$  seguido del segmento de  $(1, 1, 0)$  a  $(1, 1, 1)$ .

(a)  $\vec{F} = 3y \hat{i} + 2x \hat{j} + 4z \hat{k}$

(b)  $\vec{F} = [1/(x^2 + 1)] \hat{j}$

(c)  $\vec{F} = \sqrt{z} \hat{i} - 2x \hat{j} + \sqrt{y} \hat{k}$

(d)  $\vec{F} = xy \hat{i} + yz \hat{j} + xz \hat{k}$

(e)  $\vec{F} = (3x^2 - 3x) \hat{i} + 3z \hat{j} + \hat{k}$

(f)  $\vec{F} = (y + z) \hat{i} + (z + x) \hat{j} + (x + y) \hat{k}$

13. Evalúe  $\int_c \vec{F} \cdot \hat{T} d\vec{l}$  para el campo vectorial  $\vec{F} = x^2 \hat{i} - y \hat{j}$  a lo largo de la curva  $x = y^2$  de  $(4, 2)$  a  $(1, -1)$ .

14. Evalúe  $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$  para el campo vectorial  $\vec{F} = y \hat{i} - x \hat{j}$  en sentido antihorario a lo largo del círculo unitario  $x^2 + y^2 = 1$  de  $(1, 0)$  a  $(0, 1)$ .

15. Encuentre la circulación y el flujo de los campos

$$\vec{F}_1 = x \hat{i} + y \hat{j} \quad y \quad \vec{F}_2 = -y \hat{i} + x \hat{j}$$

alrededor y a través de cada una de las siguientes curvas.

a) El círculo  $\vec{r}(t) = (\cos t) \hat{i} + (\sin t) \hat{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

b) La elipse  $\vec{r}(t) = (\cos t) \hat{i} + (4 \sin t) \hat{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

16. Encuentre el flujo de los campos

$$\vec{F}_1 = 2x \hat{i} - 3y \hat{j} \quad y \quad \vec{F}_2 = 2x \hat{i} + (x - y) \hat{j}$$

a través del círculo

$$\vec{r}(t) = (a \cos t) \hat{i} + (a \sin t) \hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

17. Encuentre la circulación y el flujo del campo  $\vec{F}$ , alrededor y a través de la trayectoria semicircular cerrada que consiste en el arco semicircular  $\vec{r}_1(t) = (a \cos t) \hat{i} + (a \sin t) \hat{j}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , seguido por el segmento de recta  $\vec{r}_2(t) = t \hat{i}$ ,  $-a \leq t \leq a$ .

- (a)  $\vec{F} = x \hat{i} + y \hat{j}$
- (b)  $\vec{F} = x^2 \hat{i} + y^2 \hat{j}$
- (c)  $\vec{F} = -y \hat{i} + x \hat{j}$
- (d)  $\vec{F} = -y^2 \hat{i} + x^2 \hat{j}$
18. Evalúe la integral de flujo del campo de velocidades  $\vec{F} = (x + y) \hat{i} - (x^2 + y^2) \hat{j}$  a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias de  $(1, 0)$  a  $(-1, 0)$  en el plano  $xy$ .
- a) La mitad superior del círculo  $x^2 + y^2 = 1$ .
- b) El segmento de recta de  $(1, 0)$  a  $(-1, 0)$ .
- c) El segmento de recta de  $(1, 0)$  a  $(0, -1)$  seguido por el segmento de recta de  $(0, -1)$  a  $(-1, 0)$ .
19. Encuentre el flujo hacia afuera del campo de velocidades  $\vec{F} = (x + y) \hat{i} - (x^2 + y^2) \hat{j}$ , a través del triángulo con vértices  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ .
20. Encuentre la circulación de  $\vec{F} = 2x \hat{i} + 2z \hat{j} + 2y \hat{k}$  alrededor de la trayectoria cerrada que consiste en las siguientes tres curvas recorridas en la dirección de  $t$  creciente:
- $C_1$ :  $\vec{r}(t) = (\cos t) \hat{i} + (\sin t) \hat{j} + t \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$
- $C_2$ :  $\vec{r}(t) = \hat{j} + (\pi/2)(1 - t) \hat{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$
- $C_3$ :  $\vec{r}(t) = t \hat{i} + (1 - t) \hat{j}, \quad 0 \leq t \leq 1.$